Matricola:

0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9

Istruzioni: riempire ***completamente*** *le bolle con le cifre del numero di matricola (una cifra per colonna); nella parte sotto del foglio, riempire* ***completamente*** *le bolle con le risposte alle domande a scelta multipla. Per riempire, usare penna o matita nera, colorando tutto l'interno e cercando di non uscire dal bordo. Non sono ammesse correzioni, dato che il foglio verrà analizzato da un computer.*

Cognome:.. **Nome**:..

Segnare le risposte delle domande a scelta multipla

(1) A B C D E

(2) A B C D E

(3) A B C D E

(4) A B C D E

(5) A B C D E

(6) A B C D E

(7) A B C D E

(8) A B C D E

(9) A B C D E

(10) A B C D E

(11) A B C D E

(12) A B C D E

Domande a scelta multipla

* Gli esercizi marcati con un asterisco valgono più punti e vanno giustificati in maniera sintetica e chiara sul retro del primo foglio. In particolare, per i test specificare: tipo di test, ipotesi nulla ed alternativa, statistica utilizzata e suo valore numerico, regione di rifiuto o P-value con relativa stima (a seconda dei casi e di quanto richiesto nel testo).

(1) Si sa che alcuni studenti di un corso studiano solo la prima metà del programma mentre gli altri studiano il programma intero. La percentuale degli studenti che passano l'esame è pari all'55%. Tutti gli studenti imparano ciò che studiano; il docente sceglie a caso due domande indipendentemente nelle due metà del corso (cioè ciascuna domanda ha probabilità $1/2$ di appartenere alla prima metà del corso) ed è necessario rispondere ad entrambe le domande per superare l'esame. Se uno studente passa l'esame, qual è la probabilità che abbia studiato solo la prima metà del corso?

- ▢ *(a)* $9/53$.
- ▢ *(b)* $1/4$.
- ▢ *(c)* $9/17$.
- ▢ *(d)* [=] $3/11$. *(*) Se A_1, A_2, B sono rispettivamente gli eventi "studia solo la prima metà", "studia tutto" e "passa l'esame" allora $\mathbb{P}(B) = 11/20$, $\mathbb{P}(B|A_1) = 1/4$ (cioè la probabilità che entrambe le domande riguardino la prima metà) $\mathbb{P}(B|A_2) = 1$. Si osservi che $1 - \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)$ e che $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2)(1 - \mathbb{P}(A_1)$ ed essendo $\mathbb{P}(B|A_1) \neq \mathbb{P}(B|A_2)$ si ha $\mathbb{P}(A_1) = (\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B|A_2))/(\mathbb{P}(B|A_1) - \mathbb{P}(B|A_2)) = 3/5$. Pertanto $\mathbb{P}(A_1|B) = \mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1)/\mathbb{P}(B) = 3/11$.*
- ▢ *(e)* $11/47$.

(2) Da un campione di 20 lamine di acciaio, vengono misurati i valori dello spessore, ottenendo una media campionaria $\bar{x} = 10.8$ ed una varianza campionaria $s^2 = 40$.

Determinare l'intervallo bilaterale di confidenza al 95% per la media degli spessori.

- ▢ *(a)* $[10.46, 11.14]$.
- ▢ *(b)* $[10.51, 11.09]$.
- ▢ *(c)* $[8.4, 13.2]$.
- ▢ *(d)* $[5.61, 15.99]$.
- ▢ *(e)* [=] $[7.84, 13.76]$.

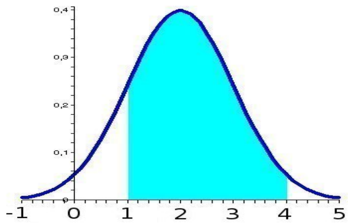
(3) Siano $\{x_i\}_{i=1}^n$ e $\{y_i\}_{i=1}^n$ due campioni di ampiezza $n > 1$ provenienti da variabili accoppiate. Sappiamo che le varianze campionarie siano 40 e 15 rispettivamente. Se la covarianza è pari a 10, quanto vale la varianza campionaria della differenza delle due variabili?

- ☐ *(a)* 55 e la covarianza è un dato superfluo.
- ☐ *(b)* 15.
- ☐ *(c)* [=] 35. *(*) Poiché si ha che la varianza è* $var(X - Y) = var(X) + var(Y) - 2cov(X, Y)$.
- ☐ *(d)* 25 e la covarianza è un dato superfluo.
- ☐ *(e)* 45.

(4) * In un esame con 250 studenti iscritti, si sa che ogni studente si presenta indipendentepente con probabilità 0.7. Qual è il numero minimo di elaborati che il docente deve stampare affinché con probabilità almeno pari al 95% non vi siano studenti che rimangono senza testo d'esame?

- ☐ *(a)* Almeno 156.
- ☐ *(b)* Almeno 200. *(*) Questa è la varianza*
- ☐ *(c)* 250. *(*) Questa è la media*
- ☐ *(d)* Nessuna delle altre risposte è corretta.
- ☐ *(e)* [=] Almeno 187. *(*) Poiché* $250 \cdot 0.7 > 5$ *e* $250 \cdot 0.3 > 5$ *possiamo utilizzare l'approssimazione normale. In questo caso, il numero di studenti che si presentano* X *ha una legge* $B(250, 0.7)$. *Cerchiamo* k *tale che* $\mathbb{P}(X \leq k) \equiv \mathbb{P}(X \leq k + 0.5) \geq 0.95$. *Quindi, in approssimazione normale,* $\Phi((k + 0.5 - 250 \cdot 0.7)/\sqrt{250 \cdot 0.7 \cdot 0.3)}) \geq 0.95$ *da cui* $k \geq -0.5 + 250 \cdot 0.7 + q_{0.95}\sqrt{250 \cdot 0.7 \cdot 0.3)} \approx 186.418$.

(5) Nella seguente figura è rappresentato il grafico della densità di una certa variabile aleatoria assolutamente continua X. Quanto vale la misura dell'area colorata?



- ☐ *(a)* $q_4 - q_1$ dove q_α è il quantile di ordine α della variabile X.
- ☐ *(b)* [=] $P(1 < X < 4)$.
- ☐ *(c)* 3.
- ☐ *(d)* $e^{-8} - e^{-1/2}$.
- ☐ *(e)* $\Phi(4) - \Phi(2)$.

(6) * Una partita di resistenze ha una probabilità di durare più di 10 anni pari a 0.5. Quante resistenze devo utilizzare come minimo (specificare se in parallelo o in serie) affinché la probabilità che nel circuito passi corrente per almeno 10 anni sia almeno 0.99?

- ☐ *(a)* almeno 10 in serie.
- ☐ *(b)* almeno 3 in parallelo.
- ☐ *(c)* almeno 3 in serie.
- ☐ *(d)* [=] almeno 7 in parallelo.
- ☐ *(e)* almeno 9 non importa se in serie o in parallelo.

(7) In una città si sa che della popolazione il 10% è ricco, il 5% è famoso e il 3% è sia ricco che famoso. La probabilità che un individuo scelto a caso sia ricco dato che è famoso è

- ☐ *(a)* [=] $3/5$
- ☐ *(b)* $7/10$ *(*) Questa è la probabilità che l'individuo non sia famoso dato che è ricco.*
- ☐ *(c)* $1/2$
- ☐ *(d)* $3/10$ *(*) Questa è la probabilità che l'individuo sia famoso dato che è ricco.*

(8) Due tipi di pezzi A e B vengono lavorati contemporaneamente da due macchine che operano in maniera indipendente. Siano $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ e $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ i tempi di lavorazione (che si suppongono indipendenti) di 10 pezzi di tipo A e 10 pezzi di tipo B rispettivamente. Supponendo che, per ogni $i = 1, \ldots, 10$, valga $X_i \sim \mathcal{N}(1,4)$ e $Y_i \sim \mathcal{N}(4,1)$; quanto vale la probabilità che per almeno due valori di i si verifichi $X_i > Y_i$?

- ☐ *(a)* Circa 0.0567.
- ☐ *(b)* Circa 0.6097.
- ☐ *(c)* [=] Circa 0.2249. *(*)* $X_i - Y_i \sim \mathcal{N}(-3,5)$. *Si utilizzi* $\mathbb{P}(X_i - Y_i \le 0) = \Phi(3/\sqrt{5}) = \Phi(1.341) \approx 0.910143753$, *da cui la probabilità cercata è* $1 - \mathbb{P}(X_1 \le Y_1)^{10} - 10 \cdot \mathbb{P}(X_1 \le Y_1)^9 \mathbb{P}(X_1 < Y_1) \approx 0.2249$
- ☐ *(d)* Circa 0.8274.
- ☐ *(e)* Circa 0.9952.

(9) Data $X \sim \mathcal{P}(2)$, quanto deve valere a tale che aX abbia media 1

- ☐ *(a)* $\frac{1}{4}$
- ☐ *(b)* [=] $\frac{1}{2}$
- ☐ *(c)* 2
- ☐ *(d)* 4
- ☐ *(e)* 1

(10) * In un test d'ipotesi per la media a varianza nota con $H_0 : \mu \leq \mu_0$ e $H_1 : \mu > \mu_0$ si rifiuta H_0 ad un livello $\alpha = 0.05$ in corrispondenza ad un campione di ampiezza n. Si prenda ora un campione di ampiezza $m > n$ tale che $\overline{x}_m = \overline{x}_n$; cosa succede al $P - value\ \overline{\alpha}$? (Sugg: ricordarsi che $\phi(x) < 1/2$ se e solo se $x < 0$.)

- ☐ *(a)* aumenta.
- ☐ *(b)* non cambia.
- ☐ *(c)* [=] diminuisce.
- ☐ *(d)* dipende dal valore della deviazione standard σ.
- ☐ *(e)* dipende dal segno di $\overline{x}_n$.

(11) * Una casa farmaceutica ha messo a punto un farmaco in grado di aumentare la velocità di esecuzione di un determinato compito manuale da parte degli esseri umani. Per ciascuno dei 10 candidati si sono calcolati i minuti necessari allo svolgimento di tale compito prima dell'assunzione del farmaco (siano essi X_i) e dopo (siano Y_i). Sapendo che $\sum_{i=1}^{10}(Y_i - X_i) = -21.5$ mentre $\sum_{i=1}^{10}(Y_i - X_i)^2 = 127.25$ si può ritenere davvero efficace il farmaco all'1%? Al 5%? E al 10%?

- ☐ *(a)* Il farmaco è efficace all'1%, al 5% e al 10%.
- ☐ *(b)* Il farmaco è efficace al 10% ma non all'1%, né al 5%.
- ☐ *(c)* [=] Il farmaco è efficace al 5% e al 10% ma non all'1%.
- ☐ *(d)* Il farmaco è efficace all'1% e al 5% ma non al 10%.
- ☐ *(e)* Il farmaco non è efficace a nessuno dei tre livelli indicati.

(12) * Il famoso pitcher Theodore Henry Row (T.H.Row) negli ultimi 30 lanci ha ottenuto una velocità media campionaria pari a 159 Km/h ed una varianza campionaria pari a 120 $\mathrm{Km}^2/\mathrm{h}^2$. Dopo essersi sottoposto alla cura del dottor Donald Oliver Ping (D.O.Ping) effettua 40 lanci di prova, ottenendo una velocità media campionaria pari a 160 Km/h ed una varianza campionaria pari a 100 $\mathrm{Km}^2/\mathrm{h}^2$. Supponendo che le varianze vere siano uguali, si può affermare che dopo la cura di D.O.Ping la media vera della velocità dei lanci di T.H.Row è aumentata?

- ☐ *(a)* [=] Non ci sono abbastanza evidenze dell'efficacia della cura. *(*) Si tratta di un test di confronto per due medie a varianze incognite ma supposte uguali. $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ contro $H_1 : \mu_1 < \mu_2$, dove le stime campionarie di μ_1 e μ_2 sono 159 e 160 rispettivamente ($n_1 = 30$ ed $n_2 = 40$). La varianza combinata è $s^2 = 108.52941$ da cui la stima $t = (159 - 160)/\sqrt{s^2(1/n_1 + 1/n_2)} = -1/2.516 \approx -0.39743$. Il P-value soddisfa $t_{\overline{\alpha}}(68) = t$ da cui, essendo $0 > t > -t_{0.8}(68) = t_{0.2}(68)$ si ha $0.2 < \overline{\alpha} < 1/2$.*
- ☐ *(b)* La cura non è efficace al livello di significatività del 5% ma lo è a livello 10%.
- ☐ *(c)* Il P-value è circa 0.02.
- ☐ *(d)* La cura non è efficace al livello di significatività del 10% ma lo è a livello 5%.
- ☐ *(e)* Ci sono abbastanza evidenze dell'efficacia della cura.