Statica dei fluidi

Pressione: $\phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} = \phi_{nn} = p$

Tensore degli sforzi: $\nabla\overline{\overline{\Phi}} = p\overline{\overline{I}}$

Bilancio quantità di moto in forma indefinita: $\nabla p = -\rho g \nabla \tilde{z}$

Bilancio di quantità di moto in forma globale: $\overline{\Pi_p} + \overline{G} = \overline{0}$

Spinta su superficie piana: $\overline{\Pi_p} = p_g A$

Legge di Stevino: $\nabla\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \tilde{z}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad p = \gamma h = \gamma(\widetilde{z_{pc\imath}} - \tilde{z})$

Dinamica

Bilancio di massa lagrangiano: $\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \overline{v} = 0$

Bilancio di massa euleriano: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\overline{v}) = 0$

Bilancio di massa per fluidi incomprimibili: $\nabla \cdot \overline{v} = 0$

Bilancio di massa in forma globale (comprimibili): $\frac{dM}{dt} = \dot{M}_e - \dot{M}_u$

Bilancio di massa in forma globale (incomprimibili): $\frac{dM}{dt} = \dot{Q}_e - \dot{Q}_u$

Bilancio di quantità di moto generico: $\rho\left(\overline{f} - \overline{a}\right) = \nabla \cdot \overline{\overline{\Phi}}$ $\qquad \overline{f} = -g\nabla\tilde{z}$

Bilancio di quantità di moto lagrangiana: $-\rho g\nabla\tilde{z} - \rho\frac{d\overline{v}}{dt} = \nabla \cdot \overline{\overline{\Phi}}$ $\qquad \overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

Bilancio di quantità di moto euleriano non cons.: $-\rho g\nabla\tilde{z} - \rho\frac{\partial\overline{v}}{\partial t} - \rho\overline{v} \cdot \nabla\overline{v} = \nabla \cdot \overline{\overline{\Phi}}$ $\qquad \overline{a} = \frac{\partial\overline{v}}{\partial t} + \overline{v} \cdot \nabla\overline{v}$

Bilancio di quantità di moto euleriano cons.: $-\rho g\nabla\tilde{z} - \frac{\partial\rho\overline{v}}{\partial t} - \nabla(\rho\overline{v}\overline{v}) = \nabla \cdot \overline{\overline{\Phi}}$ $\qquad \overline{a} = \frac{\partial\overline{v}}{\partial t} + \overline{v} \cdot \nabla\overline{v}$

Bilancio di quantità di moto in forma globale: $\overline{\Pi_p} + \overline{G} + \overline{I} + \overline{M} = \overline{0}$

Fluidi ideali

Tensore degli sforzi: $\overline{\overline{\phi}} = p\overline{\overline{I}}$

Equazioni Eulero: $\begin{cases} \rho\left(\bar{f} - \bar{a}\right) = \nabla p \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\overline{v}) = 0 \end{cases}$

Teorema di Bernoulli: $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \tilde{z} + \frac{v^2}{2g}\right) = 0$

Fluidi viscosi moto in condotta

Caduta di pressione per unità di lunghezza: $\frac{\Delta p}{L} = \gamma J$

Cadente energetica media fluido incomprimibile: $J = \frac{V^2}{2gD}\lambda = \frac{V^2}{2gD}f^*\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}\right)$

Indice di resistenza moto laminare: $\lambda = \frac{64}{Re}$

Indice di resistenza moto turbolento (commerciali): $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{1}{3.71}\frac{\mathcal{R}}{D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$

Cadente energetica media fluido comprimibile: $J = \frac{V^2}{2gD}\lambda = \frac{V^2}{2gD}f^*\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}, Ma\right)$

Fluidi viscosi: equazioni generali

Tensore delle velocità di deformazione generico:

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Tensore delle velocità di deformazione semplificato: $\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} & -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_z}{\partial t} & -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_y}{\partial t} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_z}{\partial t} & \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} & -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_x}{\partial t} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_y}{\partial t} & -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_x}{\partial t} & \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} \end{bmatrix}$

Tensore delle rotazioni rigide generale: $\overline{\overline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}$

Tensore delle rotazioni rigide semplificato: $\overline{\overline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$

Tensore degli sforzi fluidi stokesiani: $\phi_{i,j} = p\delta_{i,j} + f(D_{i,j}, I_1, I_2, I_3)$

Tensore degli sforzi fluidi newtoniani indiciale: $\phi_{i,j} = p\delta_{i,j} + a_{i,j}D_{i,j} + b_{i,j}I_1$

Tensore degli sforzi fluidi newtoniani vettoriale: $\overline{\overline{\phi}} = (p + b\nabla \cdot \overline{v})\overline{\overline{I}} + a\overline{\overline{D}}$

Indice di resistenza a cambiamenti di forma: $a = -2\mu$

Viscosità di dilatazione: $b = \frac{2}{3}\mu$

Equazione di Stokes: $\begin{cases} \rho\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \rho\overline{v} \cdot \nabla\overline{v} = -\rho g\nabla\tilde{z} - \nabla\left(p - \frac{1}{3}\mu\nabla \cdot \overline{v}\right) + \mu\nabla^2\overline{v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla\overline{v} = 0 \\ \rho = \rho(p, T) \end{cases}$

Equazione di Navier-Stokes in forma indefinita: $\begin{cases} \rho\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \rho\overline{v} \cdot \nabla\overline{v} = -\nabla p_e + \mu\nabla^2\overline{v} \\ \nabla\overline{v} = 0 \end{cases}$

Equazione di Navier-Stokes in forma adimensionale: $\begin{cases} \frac{\partial \breve{\overline{v}}}{\partial \breve{t}} + \breve{\overline{v}} \cdot \breve{\nabla}\breve{\overline{v}} = -\breve{\nabla}\widetilde{p_e} + \frac{1}{Re}\breve{\nabla}^2\breve{\overline{v}} \\ \breve{\nabla}\breve{\overline{v}} = 0 \end{cases}$

Equazione di Navier-Stokes in forma globale: $\overline{I} + \overline{M} + \overline{G} + \overline{\Pi_p} + \overline{\Pi_\mu} = \overline{0}$

Sviluppo della seconda equazione di Navier-Stokes: $\begin{cases} \frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{t}} + \breve{u}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{x}} + \breve{v}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{y}} = -\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial \breve{x}^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial \breve{y}^2}\right) \\ \frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{t}} + \breve{u}\frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{x}} + \breve{v}\frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{y}} = -\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{y}} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \breve{v}}{\partial \breve{x}^2} + \frac{\partial^2 \breve{v}}{\partial \breve{y}^2}\right) \end{cases}$

Risoluzione Couette: $\breve{u} = \breve{y}$

Sforzi tangenziali Couette: $\tau = \frac{1}{Re}$

Risoluzione poisuelle: $\breve{u} = \frac{Re}{2}\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}}\breve{y}^2 - \frac{Re}{2}\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}}\breve{y}$

Sforzi tangenziali poisuelle: $\tau = \frac{1}{Re}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{y}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}}(1 - 2\breve{y})$

Risoluzione poisuelle -Couette: $\breve{u} = -\frac{Re}{2}\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}}\breve{y}(1 - \breve{y}) + \breve{y}$

Sforzi tangenziali poisuelle -Couette: $\tau = \frac{1}{Re}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{y}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}}(1 - 2\breve{y}) + \frac{1}{Re}$

Moto poiseuille in condotta:

Turbolenza:

Equazioni di Reynolds (o RANS) in forma indefinita:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho\langle\overline{v}\rangle)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\langle\overline{v}\rangle\langle\overline{v}\rangle) = -g\rho\nabla\tilde{z} + \mu\nabla^2\langle\overline{v}\rangle - \nabla\cdot\bar{\bar{\phi}}_{Re} \\ \nabla\langle\overline{v}\rangle = 0 \end{cases}$$

Equazioni di Reynolds (o RANS) in forma globale:

$$\begin{cases} \langle\bar{I}\rangle + \overline{M_m} + \overline{M'} + \bar{G} + \langle\overline{\Pi_{\mathrm{p}}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{\mu}}\rangle = \bar{0} \\ \int_W \nabla\cdot\langle\overline{v}\rangle dW = -\int_A \langle\overline{v}\rangle\cdot\hat{n}dA \end{cases}$$