FORMULARIO

Cinematica corpo rigido

- Teorema di Rivals rispetto pt fisso: $\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_{O_1}} + \vec{\omega} \wedge (B - O_1) = \vec{\omega} \wedge (B - O_1)$

  $\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_{O_1}} + \vec{\dot{\omega}} \wedge (B - O_1) - \vec{\omega}^2 (B - O_1) = \vec{\dot{\omega}} \wedge (B - O_1) - \vec{\omega}^2 (B - O_1)$

- Teorema di Rivals rispetto qualunque pt: $\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \vec{\omega} \wedge (B - A)$

  $\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \vec{\dot{\omega}} \wedge (B - A) - \vec{\omega}^2 (B - A)$

- Relazioni tra i versori: $\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ $\quad$ $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$

  $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n} = \dfrac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}$

- È importante ricordare che generalmente si sceglie come punto fisso rispetto al quale calcolare la velocità e l'accelerazione il CIR del corpo perché il modulo della velocità di ogni punto del corpo rigido è proporzionale alla distanza dal CIR. Il CIR è il centro di istantanea rotazione. In un disco incernierato a terra il CIR è la cerniera a terra mentre in un disco che rotola sulla terra il CIR è il punto di contatto tra disco e terra.

- Relazione velocità e velocità angolare: $v = \omega R$

Dinamica

- Momento d'inerzia corona circolare: $J_G = M \frac{{R_2}^2 - {R_1}^2}{2}$
- Momento d'inerzia disco pieno: $J_G = \frac{1}{2} M R^2$
- Momento d'inerzia anello sottile: $J_G = M R^2$
- Momento d'inerzia asta: $J_G = \frac{M L^2}{12}$
- Momento d'inerzia rettangolo omogeneo: $J_G = \frac{M}{12}(b^2 + h^2)$
- Momento d'inerzia "spostamento": $J_{spos} = m d^2$

Equilibrio dinamico

- Gradi di libertà: $Gdl = 3n_c - 2n_2 - n_1 - n^*$

$\boldsymbol{n_c}$	$\boldsymbol{n_2}$	$\boldsymbol{n_1}$	$\boldsymbol{n^*}$
Numero corpi	numero di vincoli che applicano 2 gradi di vincolo: - Cerniera a terra 1 corpo - Pattino - Rotolamento senza strisciamento - Manicotto pistone cilindro	numero di vincoli che applicano 1 grado di vincolo: - Carrello - Contatto semplice - Manicotto rotante	numero di vincoli non binari: - Cerniera a terra più corpi - Cerniera interna più corpi - Carrello a terra più corpi

- Cerniera a terra più corpi: $n^* = 2k$
- Cerniera interna più corpi: $n^* = 2(k-1)$
- Carrello a terra più corpi: $n^* = 2k - 1$
- Principio di D'Alembert: $\vec{R} + \overrightarrow{F_{in}} = 0$
- Equilibrio dinamico corpo rigido: $\begin{cases} \vec{R} + \overrightarrow{F_{in}} = 0 \\ \overrightarrow{M_O} + (G-O) \wedge \overrightarrow{F_{in}} + \overrightarrow{C_{iG}} = 0 \end{cases}$
- Forza d'inerzia: $\overrightarrow{F_{in}} = -M\overrightarrow{a_G}$
- Coppia d'inerzia: $\overrightarrow{C_{iG}} = -\dot{\omega} J_G$
- Energia cinetica corpo rigido: $E_c = \frac{1}{2} M {v_G}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 J_G$
- Bilancio di potenze: $\Pi_{att} + \Pi_{in} = \frac{dE_c}{dt}$
- Potenza di una coppia: $\Pi_{att} = C\dot{\omega}$
- Potenza di una forza: $\Pi_{att} = Fv$
- Potenza della forza peso: $\Pi_{att} = -mgv$ (se $g \perp v$ $\Pi_{att} = 0$)
- Potenza della pressione: $\Pi_{att} = pSv$
- Potenza d'attrito dinamico: $\Pi_{in} = -Tv = -Nf_d v$
- Potenza del rotolamento: $\Pi_{in} = -Nu\omega = -NRf_v\omega$
- Condizione di aderenza: $|T| < |N| f_s$

PLV

- Forza peso: $P = mg$
- Forza elastica (molla): $F = -k\Delta l$ $\Delta l = -l_0 + lunghezza$

Risolvere esercizi con PLV:
1. Riconoscere le forze che agiscono sul sistema: forze esterne, coppie applicate e forza peso
2. Scrivere le equazioni che descrivono i punti di applicazioni delle forze: $(G - O)$
3. Ricavare l'equazione degli spostamenti virtuali: $\delta G = \delta x_G i + \delta y_G j$
4. Ricavare l'equazione dei lavori virtuali: $\delta L = F * \delta G$
5. Ricavare i legami cinematici
6. Riscrivere i lavori virtuali sostituendo i legami cinematici
7. Imporre la somma dei singoli lavori virtuali, cioè il lavoro totale, nullo

Motore

- Bilancio di potenze allo spunto: $W_m + W_p + W_u = \frac{dE_c}{dt}$
- Bilancio di potenze a regime: $W_m + W_p + W_u = 0$ perché $v = cost$ $a = 0$ $\frac{dE_c}{dt} = 0$
- Potenza motrice moto diretto: $W_m = C_m\omega_m - J_m\omega_m\dot{\omega}_m$
- Potenza motrice moto retrogrado: $W_m = -C_m\omega_m + J_m\omega_m\dot{\omega}_m$
- Energia cinetica: $E_c = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$

- Potenza persa va determinata effettuando un bilancio di potenze parziali tra forze esterne e forze interne da uno dei due lati della trasmissione.

- Bilancio lato utilizzatore: $W_{int} + W_2 = \frac{dE_c}{dt}$

  Se $W_2 < 0$ moto diretto
  $W_2 > 0$ moto retrogrado

- Bilancio lato motore: $W_{int} - W_1 = \frac{dE_c}{dt}$

  Se $W_1 > 0$ moto diretto
  $W_1 < 0$ moto retrogrado

- Potenza persa moto diretto: $W_p = -(1-\eta_D)W_e$ $W_e = W_m = W_1$
- Potenza persa moto retrogrado: $W_p = -(1-\eta_R)W_e$ $W_e = W_u = W_2$
- N.B.: nel termine W_e che moltiplica il rendimento per ottenere la potenza persa occorre inglobare anche i termini di energia cinetica! Così che possano essere semplificati con quelli a destra dell'uguale. CI sarà sempre un termine derivante dall'energia cinetica moltiplicato per il rendimento.
- Velocità angolare trasmissione: $\omega_u = \tau\omega_m$
- Coppia della trasmissione: $C_u = \frac{C_m}{\tau}$
- Se la coppia istantaneamente si annulla $C_m = 0$ si ha $\omega_m > 0$ mentre $\dot{\omega_m} < 0$ quindi $\dot{\omega_m}\omega_m$ è negativo
- Tempo di arresto: $t = -\frac{\omega_{m,reg}}{\dot{\omega_m}}$
- Attrito volvente: $\Pi_{vol} = -Nf_v v$
- Attrito radente: $\Pi_{rad} = -Tv = -Nf_d v$
- Se motore è scollegato allora $W_m = 0$ quindi il moto è di sicuro retrogrado

Risolvere esercizi sugli MTU:

1. Studiare il tipo di moto effettuando un bilancio di potenze parziale dal lato utilizzatore oppure dal lato motore se la coppia motrice si annulla istantaneamente in quanto in questo caso $\omega_m > 0$ mentre $\dot{\omega_m} < 0$ quindi $\dot{\omega_m}\omega_m$ è negativo
2. Nel bilancio parziale se il moto è a regime non c'è il contributo né dell'energia cinetica né delle inerzie. Se invece lo studio del moto è allo spunto bisogna considerare anche questi contributi e ricordarsi che allo spunto la velocità e l'accelerazione hanno lo stesso verso.
3. Legami cinematici
4. Effettuare poi un bilancio totale del sistema

Attriti

- Rotolamento: $T = Nf_v$
- Potenza d'attrito: $\Pi_{in} = -Tv = -Nf_d v$
- Potenza del rotolamento: $\Pi_{in} = -Nf_v v$

Vibrazioni

- Equazione del moto: $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = Q_x$
- Equazione di Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_x$
- Energia cinetica: $E_c = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = E_c(\dot{x}^2)$
- Energia potenziale: $V = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = V(x)$
- Funzione dissipativa: $D = \frac{1}{2}r\Delta\dot{l}^2 = \frac{1}{2}rv^2 = D(\dot{x}^2)$
- Pulsazione: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$
- Fattore di smorzamento: $h = \frac{r}{2m\omega_0}$
- Pulsazione propria: $\omega = \omega_0\sqrt{1-h^2}$
- Frequenza propria: $f = \frac{\omega}{2\pi}$
- Pulsazione adimensionale: $a = \frac{\Omega}{\omega_0}$
- Soluzione forzante armonica regime: $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0\cos(\Omega t)$

$$x(t) = |X_o|\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$|X_o| = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-a^2)^2 + (2ah)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{2ah}{1-a^2}\right)$$

- Soluzione forzante armonica transitorio: $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0\cos(\Omega t)$

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + |X_o|\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$|X_o| = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-a^2)^2 + (2ah)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{2ah}{1-a^2}\right)$$

A e B vanno ricavati dalle condizioni inziali

- Forza trasmessa a terra da uno smorzatore r: $F_R = r * \Delta l$
- Classificazione sistema:

$h < 1$	sistema subcritico o sottosmorzato
$h = 1$	sistema non oscillante
$h > 1$	sistema ipercritico o sovrasmorzato

- Classificazione delle zone: $a < 1$ zona rigida o quasistatica
  $a = 1$ zona di risonanza
  $a > 1$ zona sospesa o sismografica

Risolvere esercizi sulla meccanica delle vibrazioni:
1. Scrivere l'equazione di Lagrange
2. Calcolare l'energia cinetica E_c: contribuiscono le masse $\frac{1}{2}Mv^2$ e il momento d'inerzia $\frac{1}{2}J\omega^2$
3. Calcolare l'energia dissipativa D: contribuiscono solo gli smorzatori $\frac{1}{2}r\dot{\Delta l}^2 = \frac{1}{2}rv^2$
4. Calcolare l'energia potenziale V: contribuiscono le molle $\frac{1}{2}k\Delta l^2$
5. Con il principio dei lavori virtuali si ricava Q_x
6. Legami cinematici
7. Si riscrivono E_c, D, V in funzione dei legami cinematici così da ricavare J^*, r^*, k^*
8. Scrivere equazione di moto: $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = Q_x$