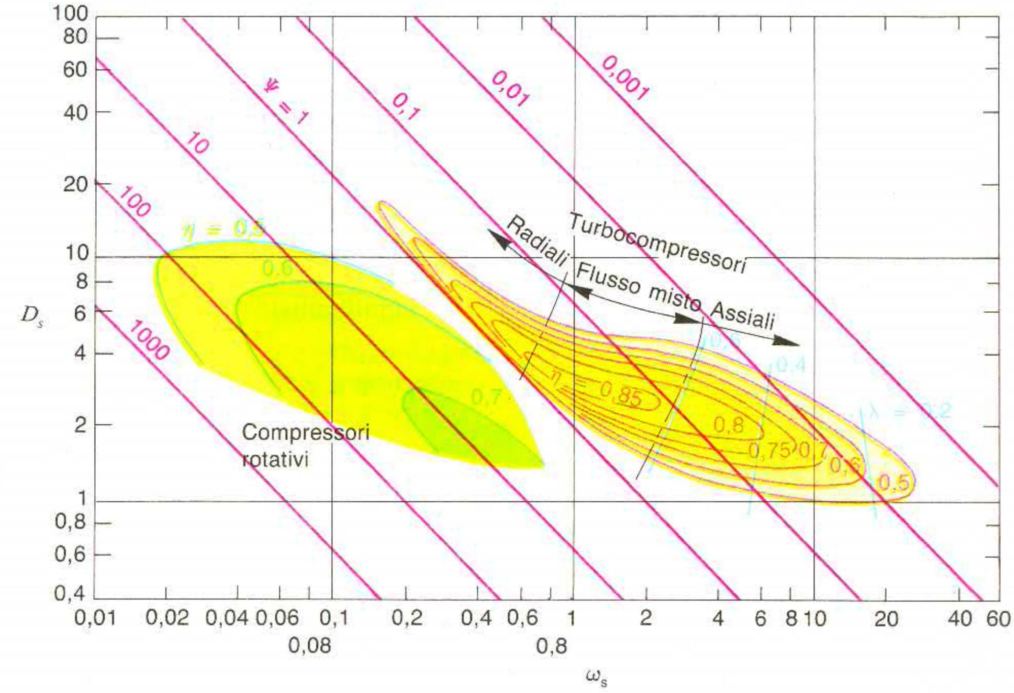
# Compressori

## Esercizio 1

Un compressore centrifugo elabora una portata massica di $3\ kg/s$ di aria ($R = 287$ J/(kgK)). Le condizioni di aspirazione sono atmosferiche ($T_1 = 20$ °C e $P_1 = 1$ bar) e la pressione di mandata è pari a $P_2 = 5$ bar.

**a)** Si valuti il lavoro scambiato nel caso di una macchina monostadio, caratterizzata da un rendimento isoentropico di $0.8$. Si stimi il diametro della girante e la velocità di rotazione sulla base di diagrammi statistici (Baljé). Si valuti il ruolo della comprimibilità all'interno dello stadio. Infine, si calcoli l'indice della trasformazione politropica di compressione e il rendimento politropico dello stadio.
**b)** Si valuti il lavoro scambiato nel caso di una macchina costituita da due stadi, con uguale rapporto di compressione e uguale rendimento isoentropico, pari a $0.8$. Si calcolino gli indici delle trasformazioni politropiche e i rendimenti politropici dei due stadi. Mantenendo costante il rendimento isoentropico del primo stadio al valore di $0.8$, quale rendimento isoentropico dovrebbe avere il secondo stadio affinché la macchina assorba la stessa potenza del caso a)? Si richiede inoltre di stimare diametro girante e velocità di rotazione dei due stadi sulla base dei diagrammi statistici e di commentare i risultati dal punto di vista della similitudine.
**c)** Si valuti il lavoro scambiato, il diametro e la velocità di rotazione della girante e la potenza risparmiata nel caso venga interposto un interrefrigeratore tra i due stadi (aventi ancora rendimento isoentropico pari a 0.8). Si calcolino gli indici delle trasformazioni politropiche di compressione nei due stadi e se il rendimento politropico. L'interrefrigeratore porta la temperatura all'ingresso del secondo stadio pari a quella all'ingresso del primo stadio.
Come fluido refrigerante del gas nell'interrefrigeratore si utilizza acqua, con temperatura di ingresso pari a 18 °C, la quale subisce un riscaldamento pari a 4 °C. Nell'ipotesi che le perdite per attrito siano trascurabili nello scambiatore di calore, si calcolino la portata massica d'acqua necessaria al raffreddamento e la potenza termica scambiata.




***Dati:***

$$
\begin{array}{lll}
T_1 = 293\ K & P_1 = 10^5 Pa & P_2 = 5 \cdot 10^5\ Pa \\
\dot{m} = 3\ kg/s & & \eta_{is} = 0.8 \\
c_P = 1004.5\ J/kgK & & \gamma = 1.4 \\
T_{in,cool} = 291\ K & & \Delta T_{cool} = 4^\circ
\end{array}
$$

***Soluzione:***

**a)** La compressione viene realizzata con un singolo stadio:

$$\beta_{stage} = \frac{P_2}{P_1} = 5$$

Utilizzando la definizione di rendimento isoentropico per uno stadio di macchina operatrice (compressore):

$$\eta_{is,C} = \frac{l_{is,C}}{l_{reale,C}} = \frac{h_{2is} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{c_P \cdot (T_{2is} - T_1)}{c_P \cdot (T_2 - T_1)}$$

Il lavoro isoentropico (ovvero incremento di entalpia totale nella trasformazione isoentropica di riferimento) é dato da:

$$l_{is,C} = c_P \cdot (T_{2is} - T_1) = c_P \cdot T_1 \left( \frac{T_{2is}}{T_1} - 1 \right) = c_P \cdot T_1 \left( \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = 171.7 \, kJ/kg$$

perciò il lavoro effettivo e la potenza assorbita sono pari a:

$$l = \frac{l_{is,C}}{\eta} = 214.6 \, kJ/kg \quad W = \dot{m} \cdot l = 643.8 \, kW$$

La temperatura all'uscita della macchina può essere calcolata a partire dal salto entalpico:

$$l = c_P \cdot (T_2 - T_1) \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 + \frac{l}{c_P} = 506.7 \, K$$

Per stimare, nella fase preliminare di progetto, le dimensioni e la velocità di rotazione della macchina, è possibile utilizzare diagrammi statistici analoghi a quelli utilizzati per le macchine idrauliche, ma realizzati per macchine a fluido comprimibile (diagrammi di Baljé). Tali diagrammi sono meno rigorosi nel caso di macchine termiche, perché sono basati sugli stessi due parametri introdotti nell'idraulica ($\omega_s$ e $D_s$), mentre un terzo parametro deve essere introdotto per le macchine termiche allo scopo di 'scalare' in similitudine anche gli effetti di comprimibilità (assenti nel caso di macchine idrauliche); si continua ad assumere che i problemi di cui ci si occupa siano in auto-similitudine relativamente al numero di Reynolds.
É comunque sempre possibile utilizzare i diagrammi statistici, accettando un certo grado di approssimazione rispetto al caso delle macchine idrauliche. Inoltre, tali diagrammi sono validi per il singolo stadio di una macchina all'interno del quale, in genere, gli effetti di comprimibilità sono meno rilevanti rispetto al caso di grandi macchine multistadio complete.
Diagramma di Baljé sono disponibili anche per stadi di compressore (vedi figura) e tramite essi è possibile individuare un punto operativo che permetta di ottenere il rendimento stimato. Ad esempio un rendimento isoentropico di 0.8 può essere ottenuto nel seguente punto operativo :

$$\begin{cases} \omega_s = 0.45 \\ D_s = 5 \end{cases}$$

(è evidente che sono ammessi anche altri punti sulla linea a rendimento 0.8 per i compressori centrifughi). Dalla definizione dei parametri di similitudine si ottengono le dimensioni e la velocità di rotazione della girante:

$$\omega_s = \omega \frac{\sqrt{\dot{V}}}{(\Delta h_{is})^{\frac{3}{4}}}$$

$$\omega = \omega_s \frac{(\Delta h_{is})^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\dot{m}\frac{R\cdot T_1}{P_1}}} = 2390\, rad/s \approx 22840\, rpm$$

$$D_s = D \frac{(\Delta h_{is})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\dot{m}\cdot v}}$$

$$D = D_s \frac{\sqrt{\dot{m}\frac{R\cdot T_1}{P_1}}}{(\Delta h_{is})^{\frac{1}{4}}} = 0.390\, m$$

Noti questi parametri, è possibile valutare il ruolo della comprimibilità all'interno dello stadio. Un parametro tipico è il numero di Mach periferico, che risulta significativo in quanto connesso al numero di Mach del moto assoluto e può essere calcolato molto semplicemente note che siano la velocità di rotazione, le dimensioni e le condizioni di ingresso allo stadio (senza necessità di conoscere il dettaglio dei triangoli di velocità):

$$M_u = \frac{U}{a_1} = \frac{\omega D/2}{\sqrt{\gamma R T_1}} = 1.36$$

Tale valore evidenzia come la corrente sia supersonica e come, di conseguenza, lo stadio risulti piuttosto complesso da progettare e sia soggetto a perdite superiori a quelle che caratterizzano stadi subsonici, a causa della presenza di urti.

L'indice $m$ della trasformazione politropica di compressione può essere calcolato ricordando che, per una trasformazione politropica di un gas ideale, vale la seguente relazione:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{P_2}{P1}\right)^{\frac{m-1}{m}}$$

di conseguenza:

$$m = \left(1 - \frac{ln(T_2/T_1)}{ln(\beta)}\right)^{-1} = 1.52$$

il rendimento politropico risulta dunque essere pari a:

$$\eta_y = \frac{m}{m-1}\frac{\gamma-1}{\gamma} = 0.839$$

**b)** Se la compressione è suddivisa in due stadi con identico rapporto di compressione, il rapporto di compressione de singolo stadio è:

$$\beta_I \cdot \beta_{II} = \beta \quad \Rightarrow \quad \beta_I = \beta_{II} = \sqrt{\beta} = 2.236$$

Il lavoro scambiato nel primo stadio e la temperatura all'uscita (denominata $T_i$) sono ottenuti come segue:

$$l_{is,I} = c_P \cdot T_1 \left( \beta_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = 76.1\ kJ/kg$$

$$l_I = \frac{w_{is,I}}{\eta} = 95.1\ kJ/kg$$

$$l_I = c_P \cdot (T_i - T_1) \quad \Rightarrow \quad T_i = T_1 + \frac{l_I}{c_p P} = 387.9\ K$$

Nel secondo stadio il rapporto di compressione e il rendimento isoentropico sono identici a quelli del primo stadio, mentre la temperatura in ingresso è maggiore; di conseguenza il lavoro scambiato aumenta rispetto a quello del primo stadio:

$$l_{is,II} = c_P \cdot T_2 \left( \beta_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = 100.6\ kJ/kg$$

$$l_{II} = \frac{l_{is,II}}{\eta} = 125.8\ kJ/kg$$

$$l_{II} = c_P \cdot (T_2 - T_i) \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_i + \frac{w_{II}}{c_P} = 513.2\ K$$

si noti come la corrente allo sia scaricata dalla macchina (bi-stadio) a una temperatura più alta e come la potenza assorbita sia maggiore rispetto al caso della macchina mono-stadio (caso a)).

$$W_C = \dot{m} \cdot (l_I + l_{II}) = 662.7\ kW$$

La differenza tra le due configurazioni è legata all'assunzione di rendimento isoentropico identico per lo stadio della macchina mono-stadio e per quelli della macchina bi-stadio. Infatti, in un compressore multi-stadio, un rendimento isoentropico di stadio costante implica una riduzione del rendimento isoentropico dell'intera macchina all'aumentare del numero di stadi.
Il rendimento isoentropico della macchina completa è infatti:

$$T_{2'} = T_1 (\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}) = 464.3\ K$$

$$\eta_{2-S,is} = \frac{T_{2'} - T_1}{T_2 - T_1} = 0.778$$

É possibile stimare velocità periferica e diametro di entrambi gli stadi seguendo la medesima procedura utilizzata per lo stadio della macchina mono-stadio (caso a)). Si assume che i due stadi, caratterizzati dallo stesso rendimento, siano geometricamente simili e operino in similitudine <u>idraulica</u>, perciò devono essere usati gli stessi valori di velocità e diametro specifici. In particolare, essi sono gli stessi del caso a), ovvero $\omega_s = 0.45$ e $D_s = 5$.
Si ottiene:

$$\begin{cases} \omega_I = \omega_s \dfrac{(\Delta h_{is,I})^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\dot{m}\frac{R\cdot T_1}{P_1}}} = 1298\, rad/s \approx 12400\, rpm \\ D_I = D_s \dfrac{\sqrt{\dot{m}\frac{R\cdot T_1}{P_1}}}{(\Delta h_{is,I})^{\frac{1}{4}}} = 0.478\, m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{II} = \omega_s \dfrac{(\Delta h_{is,II})^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\dot{m}\frac{R\cdot T_i}{P_i}}} = 2081\, rad/s \approx 19880\, rpm \\ D_{II} = D_s \dfrac{\sqrt{\dot{m}\frac{R\cdot T_i}{P_i}}}{(\Delta h_{is,II})^{\frac{1}{4}}} = 0.343\, m \end{cases}$$

Tali valori permettono la stima del Mach periferico, e dunque la valutazione del ruolo della comprimibilità nei due stadi. Si ha:

$$M_{u,I} = \frac{U_I}{c_1} = \frac{\omega D_I/2}{\sqrt{\gamma R T_1}} = 0.904$$

$$M_{u,II} = \frac{U_{II}}{c_i} = \frac{\omega D_{II}/2}{\sqrt{\gamma R T_i}} = 0.904$$

Sorprendentemente, i due stadi sono in similitudine completa, pur essendo stata imposta la sola similitudine idraulica. In effetti, questo non è un risultato generale, ma dipende dal fatto che è stato anche imposto, come scelta progettuale, lo stesso rapporto di compressione per i due stadi (oltre che lo stesso gas): ciò rappresenta la terza uguaglianza di parametri adimensionali che rende gli stadi in completa similitudine.

E' interessante valutare l'impatto delle perdite nel primo stadio sul lavoro del secondo stadio, in modo da mettere in evidenza l'effetto del contro-recupero 'indiretto'. Per farlo, è sufficiente valutare quanto sarebbe stato il lavoro isentropico (ovvero il entalpico isentropico) richiesto dal secondo stadio se il primo stadio fosse stato isentropico $l'_{is,II}$:

$$l'_{is,II} = c_P \cdot T_{2,is} \left( \beta_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = 95.7\ kJ/kg$$

$$l'_{II} = \frac{l'_{is,II}}{\eta} = 119.7\ kJ/kg$$

Appare evidente come il 'costo' della compressione sia significativamente più alto (di circa il 5%) indipendentemente dalla qualità termodinamica del secondo stadio, esclusivamente a causa delle perdite nel primo.
Gli indici delle trasformazioni politropiche $m_I, m_{II}$ possono essere calcolati come:

$$m_I = \left( 1 - \frac{ln(T_i/T_1)}{ln(\beta_I)} \right)^{-1} = 1.534$$

e

$$m_{II} = \left( 1 - \frac{ln(T_2/T_i)}{ln(\beta_{II})} \right)^{-1} = 1.534$$

i valori sono identici perché le due trasformazioni hanno lo stesso rendimento isoentropico e lo stesso rapporto di compressione.
I rendimenti politropici $\eta_{y,I}, \eta_{y,II}$ sono, di conseguenza:

$$\eta_{y,I} = \eta_{y,II} = \frac{m_I}{m_I - 1} \frac{\gamma - 1}{\gamma} = 0.82$$

Pertanto, il rendimento politropico dell'intera macchina, combinazione di due stadi identici, resterà invariato 'lungo' la macchina e pari a quello dei singoli stadi, a differenza di quello isentropico che progressivamente diminuisce per effetto del contro-recupero multi-stadio.

Di conseguenza, allo scopo di ottenere lo stesso rendimento isentropico complessivo della macchina monostadio, il rendimento dei singoli stadi deve essere diverso. Assumendo un rendimento isoentropico del primo stadio pari a 0.8, le condizioni in ingresso al secondo stadio sono fissate ($T_i = 387.9\ K$). La temperatura in uscita dalla macchina che assicura un rendimento complessivo pari a 0.8, deve essere $T_2 = 506.7$ K (come nel caso a)). La temperatura allo scarico del secondo stadio per un processo isoentropico (che inizia al punto intermedio $i$) è:

$$T_{2,is} = T_i * beta_{II}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 488.1K$$

Perciò, per garantire un rendimento isoentropico complessivo della macchina pari a 0.8, il secondo stadio deve avere un rendimento isoentropico uguale a:

$$\eta_{II} = \frac{T_{2,is} - T_i}{T_2 - T_i} = 0.84$$

**c)** Se un interrefigeratore viene interposto tra i due stadi in modo tale che la temperatura in ingresso ai due stadi risulti la stessa, il lavoro scambiato nel secondo stadio è identico a quello del primo, già calcolato al punto b).

$$l_{is,II} = l_{is,I} = c_P \cdot T_1 \left( \beta_I^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = 76.1 \; kJ/kg$$

$$l_{II} = l_I = \frac{l_{is,II}}{\eta} = 95.1 \; kJ/kg$$

La potenza totale assorbita è:

$$\dot{W}_C = \dot{m} \cdot (l_I + l_{II}) = 570.7 \; kW$$

corrispondente a un risparmio del 15% circa rispetto al caso senza interrefrigeratore. Il consumo di acqua dello scambiatore necessario all'interrefrigerazione può essere determinato applicando il bilancio di energia e entrambi i rami dello scambiatore ricordando l'ipotesi di attrito trascurabile al loro interno. Le temperature di aria e acqua in ingresso e uscita dai rispettivi rami sono pari a:

$$T_{in,H_2O} = 18\,^{\circ}C, \quad T_{out,H_2O} = 22\,^{\circ}C, \quad T_{in,air} = 387.9\,K, \quad T_{out,air} = 293.15\,K$$

E dai bilanci di energia:

$$\dot{m}_{air} \cdot c_{P,air} \cdot (T_{in,air} - T_{out,air}) = \dot{m}_{H_2O} \cdot c_{L,H_2O} \cdot (T_{out,H_2O} - T_{in,H_2O})$$

da cui si calcola la portata massica di acqua necessaria:

$$\dot{m}_{H_2O} = \dot{m}_{air} \frac{c_{P,air} \cdot (T_{in,air} - T_{out,air})}{c_{L,H_2O} \cdot (T_{out,H_2O} - T_{in,H_2O})} = 17.04 \; kg/s$$

## Esercizio 2

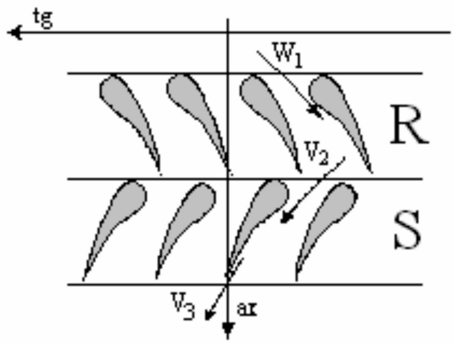
Un compressore assiale elabora una portata massica di $\dot{m} = 50$ kg/s di aria e opera alla velocità di rotazione $n = 5000$ rpm. Uno stadio intermedio della macchina è caratterizzato da un angolo relativo in uscita al rotore opposto all'angolo assoluto in ingresso al rotore, ovvero $\beta_2 = -\alpha_1$, è progettato adottando la strategia degli stadi ripetuti e la corrente al suo interno può essere considerata isoentropica. Il diametro medio è costante e pari a $D_m = 0.765$ m. Inoltre la componente meridiana di velocità è imposta al valore costante di $V_m = 130$ m/s tramite un progetto appropriato dell'altezza di pala. Le principali caratteristiche dello stadio sono riassunte nel seguito:

• condizioni totali in ingresso allo stadio: $T_{T1} = 293\ K$, $P_{T1} = 10^5\ Pa$;
• $\beta_2 = -\alpha_1$;
• velocità meridiana costante e stadio ripetuto;
• angolo assoluto della corrente in ingresso al rotore $\alpha_1 = 30$ °C;
• diametro medio $D_m = 0.765$ m, costante attraverso lo stadio.

Si richiede:

- il calcolo l'altezza di pala $b_1$ in ingresso al rotore;
- il calcolo e lo schizzo dei triangoli di velocità e lo schizzo della palettatura nel piano blade-to-blade;
- il calcolo del il grado di reazione $\chi$ dello stadio;
- il calcolo del lavoro scambiato;
- il calcolo il rapporto di compressione dello stadio e di quello delle singole schiere (sempre nell'ipotesi di trasformazioni isoentropiche);
- la valutazione della velocità specifica allo scopo di confermare la correttezza dello stadio scelto.

***Dati:***




$$\dot{m} = 50\ kg/s \qquad n = 5000\ rpm$$
$$P_{T1} = 1\ bar \qquad T_{T1} = 293\ K$$
$$V_1 = V_3 \qquad V_m = V_{ax} = cost = 130\ m/s$$
$$\alpha_1 = 30° \qquad \beta_2 = -\alpha_1$$
$$D_m = 0.765\ m$$

***Soluzione:***

Per calcolare l'altezza di pala a ingresso rotore è necessario conoscere la densità (statica) $\rho_1$ nella stessa sezione. Ciò richiede, preventivamente, il calcolo della temperatura (statica) $T_1$:

$$T_1 = T_{T1} - \frac{V_1^2}{2 * c_P} = T_{T1} - \frac{(V_m/cos(\alpha_1))^2}{2 * c_P} = 281.8\ K$$

e, applicando le relazioni total-to-static per gas ideali:

$$\rho_1 = \rho_{T1} \left(\frac{T_1}{T_{T1}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{P_{T1}}{RT_{T1}} \left(\frac{T_1}{T_{T1}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1.08\ Kg/m^3$$

L'altezza di pala in ingresso al rotore è dunque:

$$b_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 \pi D_m V_{ax}} = 0.148\ m$$

Poiché sono noti la componente meridiana (ovvero assiale, trattandosi di uno stadio assiale) di velocità (che si mantiene costante) e gli angoli $\alpha_1$ e $\beta_2$, i triangoli di velocità possono essere determinati nota che sia la velocità periferica $U = U_1 = U_2$ (trattandosi di macchina assiale a $D_m$ costante). $U$ viene calcolata immediatamente utilizzando velocità di rotazione e diametro:

$$U = 2\pi \frac{n}{60} \frac{D_m}{2} = 200\ m/s$$

Conseguentemente, tutte le componenti dei triangoli di velocità possono essere calcolate:

$$V_1 = \frac{V_{ax}}{\cos \alpha_1} = 150\ m/s \quad V_{1t} = V_1 \cdot \sin \alpha_1 = \ 75 m/s$$

$$W_{1t} = V_{1t} - U = -125\ m/s \quad W_1 = \sqrt{W_{1t}^2 + V_{1ax}^2} = 180.3\ m/s$$

l'angolo relativo in ingresso al rotore è perciò:

$$\beta_1 = \arctan \frac{W_{1t}}{W_{1m}} = -43.8°$$

La simmetria delle direzioni $V_1$ e $W_1$ ovvero il fatto che $\beta_2 = -\alpha_1 = -30°$ può essere introdotta per determinare il triangolo di velocità all'uscita del rotore:

$$\beta_2 = -\alpha_1 = -30°$$

ed essendo la velocità meridiana costante si può dedurre anche l'uguaglianza dei moduli di $V_1$ e $W_2$:

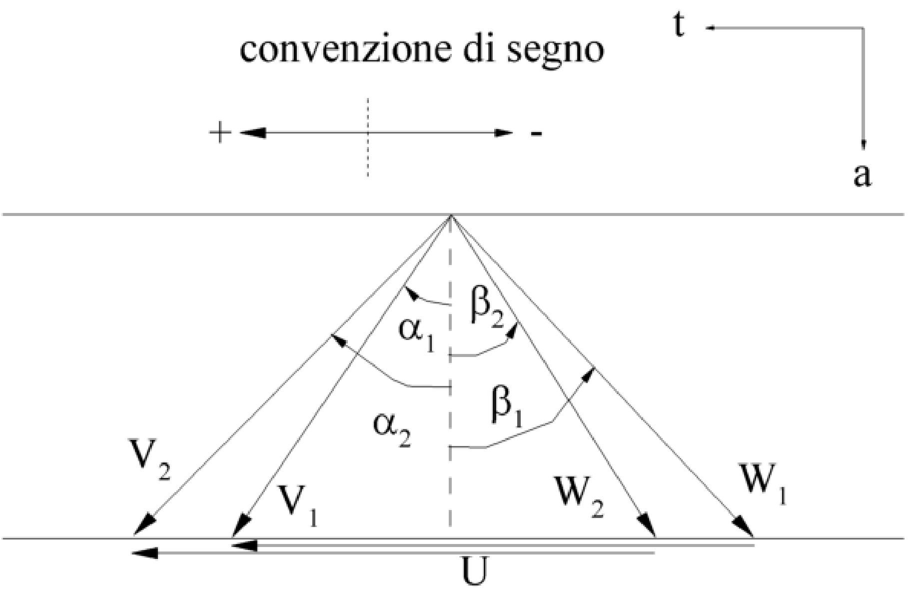
$$W_2 = V_1 = 150\, m/s$$

inoltre, essendo la macchina assiale a $D_m$ costante, $U$ è costante attraverso lo stadio; ciò implica la simmetria anche nelle direzioni di $W_1$ e $V_2$ e dunque l'uguaglianza dei loro moduli (poiché $V_m = cost$):

$$\alpha_2 = -\beta_1 = 43.8\, deg \quad V_2 = W_1 = 180.3\, m/s$$

$$V_{2t} = V_2 sin\alpha_2 = 125\, m/s$$

i triangoli di velocità risultanti hanno la simmetria appena descritta: la deflessione verso la direzione assiale nel moto relativo è uguale (in modulo) a quella (sempre verso la direzione assiale) nel moto assoluto (si ricordi che $V_3 = V_1$ poiché lo stadio è ripetuto), ovvero le palettature di rotore e diffusore sono simmetriche rispetto alla direzione meridiana (assiale). Si veda a questo proposito la figura (sopra) che mostra lo schizzo delle palettature. Questo tipo di simmetria nei triangoli di velocità è tipico degli stadi di compressore assiale (ripetuti e con velocità meridiana costante) che hanno grado di reazione $\chi = 0.5$.




TRIANGOLI DI VELOCITA' PER
STADIO DI COMPRESSORE ASSIALE
GRADO DI REAZIONE = 0.5

Calcolando infatti il grado di reazione si ottiene:

$$\chi = \frac{h_2 - h_1}{h_{T3} - h_{T1}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{T2} - h_{T1}}$$

poiché l'entalpia totale si conserva nelle schiere fisse ($h_{T3} = h_{T2}$ per il diffusore); inoltre, applicando (per lo stadio assiale) i bilanci di energia nel moto relativo e assoluto è possibile esprimere il grado di reazione come segue:

$$\chi = \frac{\frac{W_1^2 - W_2^2}{2}}{\frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}}$$

che, sfruttando la simmetria osservata $W_2 = V_1$ e $W_1 = V_2$, dà:

$$\chi = \frac{V_2^2 - V_1^2}{V_2^2 - V_1^2 + V_2^2 - V_1^2} = 0.5$$

Il lavoro scambiato è:

$$l = U \cdot (V_{2tg} - V_{1tg}) = 10\ kJ/kg$$

Gli effetti termodinamici del lavoro scambiato sono valutabili immediatamente grazie all'ipotesi di corrente isoentropica .
Il lavoro scambiato corrisponde infatti all'incremento di entalpia totale del fluido, che può essere semplicemente messo in relazione con il rapporto di compressione total-total, grazie all'ipotesi di corrente isoentropica.
(Si noti che, in caso di compressione non isoentropica sarebbe necessario conoscere il rendimento dello stadio (o delle palettature) oppure l'indice della trasformazione politropica). In definitiva si ha:

$$l = h_{T3} - h_{T1} = c_P(T_{T3} - T_{T1}) = c_P T_{1T} \left( \frac{T_{T3}}{T_{T1}} - 1 \right) = c_P T_{1T} \left( \frac{P_{T3}}{P_{T1}}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

perciò il rapporto di pressioni totali sullo stadio è:

$$\frac{P_{T3}}{P_{T1}} = \left( \frac{l}{c_P T_{T1}} + 1 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.129$$

Attraverso il diffusore, l'entalpia totale, e perciò la temperatura totale (trattandosi di un gas ideale), si conserva (nessuno scambio di lavoro né scambio termico). Note (dai triangoli di velocità) le velocità assolute in uscita da rotore e diffusore, si possono calcolare le temperature statiche a valle delle schiere:

$$T_{T2} = T_{T3} = T_{T1} + \frac{l}{c_P} = 303.02\ K$$

$$T_2 = T_{T2} - \frac{V_2^2}{2c_P} = 286.86\ K \quad T_3 = T_{T3} - \frac{V_3^2}{2c_P} = T_{T3} - \frac{V_1^2}{2c_P} = 291.80\ K$$

Essendo le trasformazioni isoentropiche, dai rapporti di temperatura statica attraverso le schiere si deducono (come segue) i rapporti di pressione stati; in modo da valutare la frazione di compressione realizzata nella girante e nel diffusore:

$$\frac{P_2}{P_1} = (\frac{T_2}{T_1})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.063$$

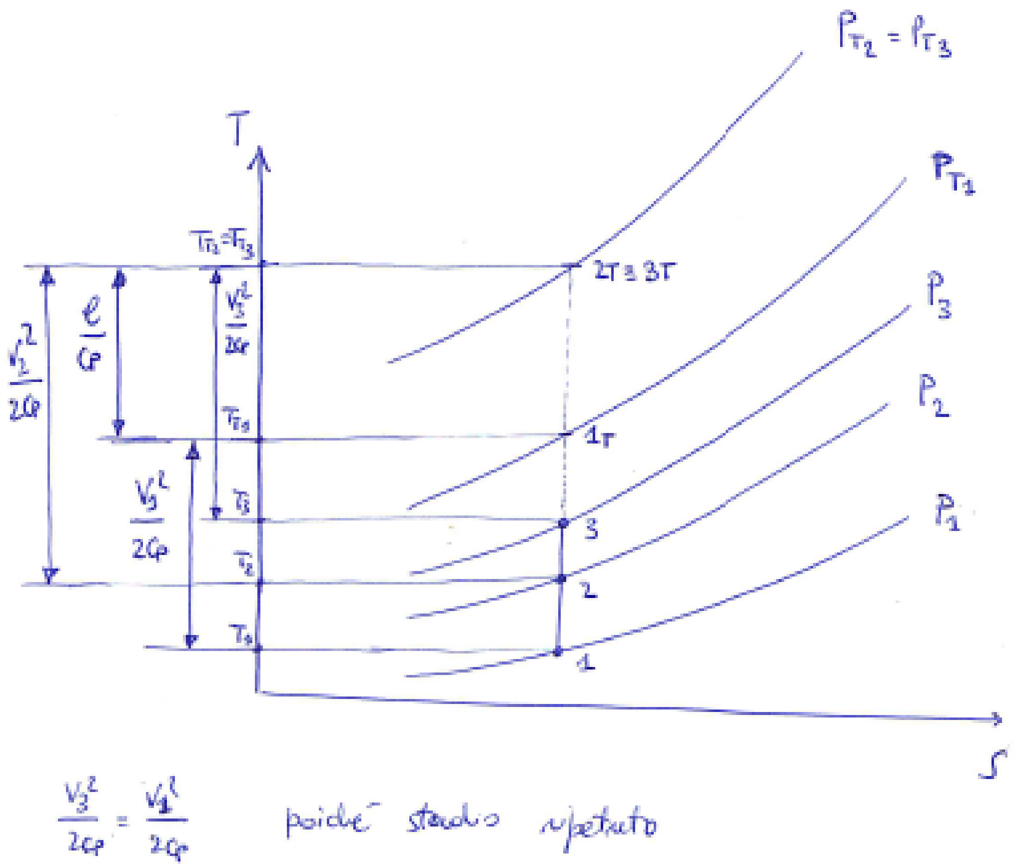
$$\frac{P_3}{P_2} = (\frac{T_3}{T_2})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.062$$

Si noti che, nonostante il grado di reazione sia 0.5, il rapporto di compressione non è suddiviso in modo perfettamente uguale tra rotore e diffusore, anche se la differenza è molto piccola.
Le proprietà termodinamiche calcolate permettono il calcolo del grado di reazione in modo differente (e, ovviamente, equivalente al precedente):

$$\chi = \frac{h_2 - h_1}{h_{T3} - h_{T1}} = \frac{c_P(T_2 - T_1)}{c_P(T_{T3} - T_{T1})} = 0.5$$

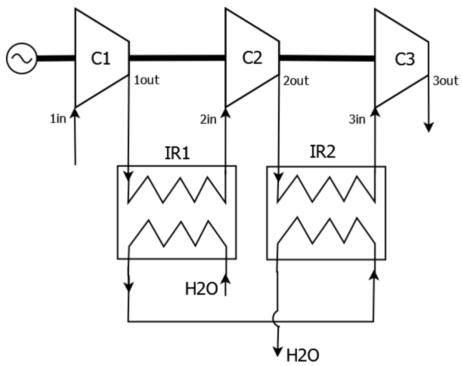
a conferma di quanto visto in precedenza.

Per effettuare la verifica del tipo di stadio utilizzato, si calcoli la velocità specifica (definita riferendosi alla portata volumetrica in ingresso allo stadio). Si ottiene in tal modo $\omega_s \simeq 3.5$, valore elevato che, in accordo con il diagramma di Baljé per gli stadi di compressore, può essere ottenuto soltanto impiegando uno stadio assiale, confermando dunque la scelta iniziale.
Una rappresentazione (qualitativa) delle trasformazioni termodinamiche sul piano $T - s$ è illustrata nella figura seguente



# Esercizio 3

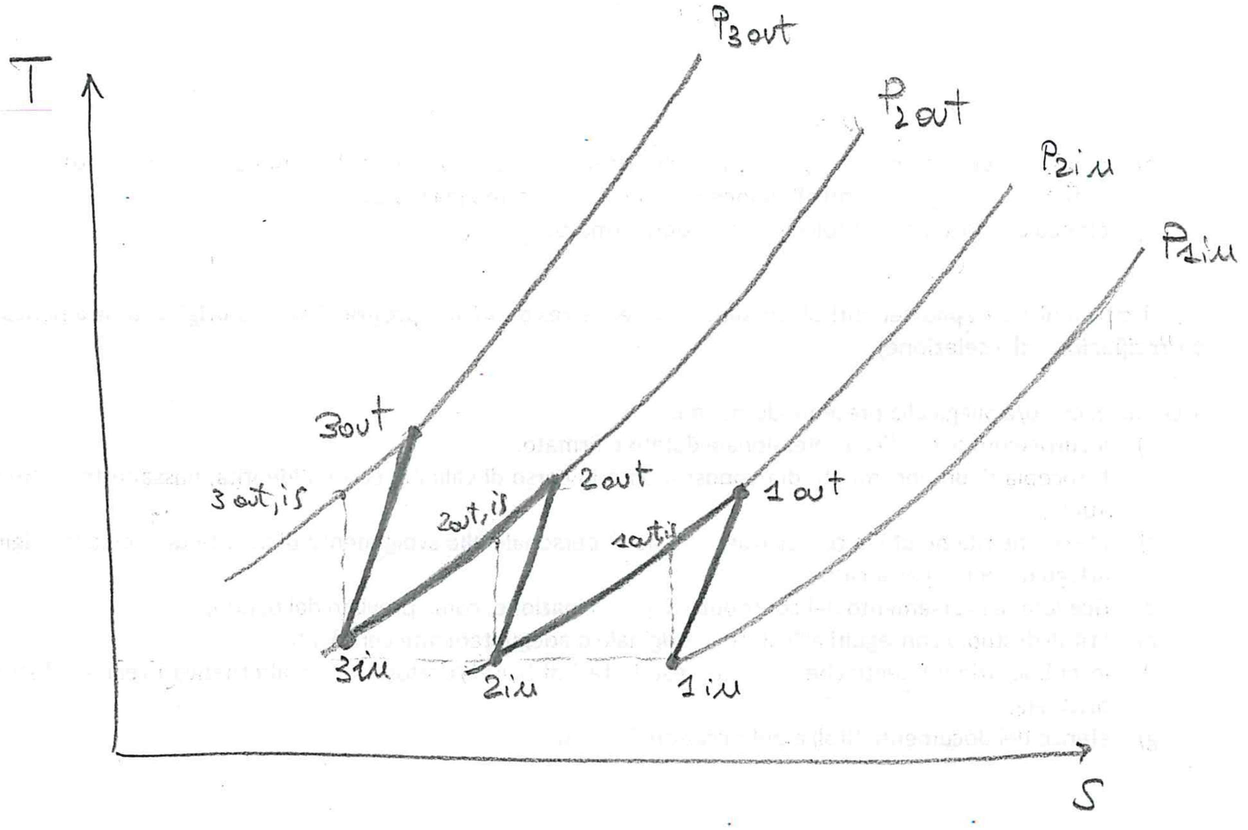
Un compressore è costituito da 3 stadi in serie, ciascuno caratterizzato da rendimento adiabatico pari 0.75. Due interrefrigeratori riducono la temperatura all'ingresso del secondo e terzo stadio. In ciascun ramo (gas e acqua) di ogni interrefrigeratore le perdite per attrito possono essere trascurate. La portata di aria elaborata è $\dot{m} = 15.91$ kg/s con un assorbimento di potenza pari a $\dot{L} = 5250$ kW. Le condizioni dell'aria all'ingresso sono $T_{1in} = 300$ K e $P_{1in} = 1$ bar. I primi due stadi forniscono lo stesso rapporto di compressione $\beta_I = \beta_{II} = 2.5$. Il primo interrefrigeratore riduce la temperatura al valore di $T_{1in}$, usando acqua a 20 °C in ingresso che aumenta la propria temperatura di 10 °C nell'attraversamento dello scambiatore. La stessa acqua viene poi inviata la secondo scambiatore, il quale ne incrementa di ulteriori 7° C la temperatura.
Si richiede:
**a)** La rappresentazione qualitativa delle trasformazioni del gas in un diagramma $T-s$ e il calcolo delle condizioni termodinamiche ($T$ e $P$) all'ingresso e all'uscita dei tre stadi.
**b)** Il calcolo del rendimento politropico $\eta_y$ di ciascuno stadio.




***Dati:***

$$\dot{m} = 15.91\ kg/s \qquad \eta_{is,I} = \eta_{is,II} = \eta_{is,III} = 0.75$$
$$P_{1in} = 1\ bar \qquad T_{1in} = 300\ K$$
$$\dot{L} = 5250\ kW \qquad \beta_I = \beta_{II} = 2.5$$
$$T_{IR1,in,H_2O} = 20\ °C \qquad \Delta T_{IR1,H_2O} = 10\ °C$$
$$\Delta T_{IR2,H_2O} = 7\ °C$$

a)




NON SIAMO IN PROSSIMITÀ PALETTATURE $\Rightarrow$ NO DISTINZIONE TRA CONDIZ. STATICHE E TOTALI

ad es. $P_1 \equiv P_{T1}$

$T_1 \equiv T_{T1}$ ecc.

$\boxed{1\ in}$ noto dai dati $P_{1in} = 1$ bar $\quad T_{1in} = 300$ K

$\boxed{1\ out}$ $P_{1out} = \beta_I \, P_{1in} = 2.5$ bar ; $T_{1out,is} = T_{1in} \, \beta_I^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 389.78$ K

poiché $$\eta_{is_I} = \frac{T_{1out,is} - T_{1in}}{T_{1out} - T_{1in}} = 0.75$$ (dai dati)

$$\Rightarrow \quad T_{1out} = T_{1in} + \frac{T_{1out,is} - T_{1in}}{\eta_{is_I}} = 419.71 \text{ K}$$

$\boxed{2\ in}$ $T_{2in} = T_{1in} = 300$ K (dai dati)

$P_{2in} = P_{1out}$

poiché si trascurano dissipazioni per attrito lato gas scambiatore; ciò implica trasf isobara lato gas scambiatore (per dimostrarlo scrivere eq en. mecc. tra 1out e 2in).

Si può anche calcolare la portata massica d'acqua ($\dot{m}_{H_2O}$) necessaria a raffreddare il gas da $T_{1out}$ a $T_{2in}$:

bilancio energia lato gas ($\dot{m}$ = portata gas); aria nelle condizioni in oggetto modellabile come gas perfetto:

$$\dot{L} + \dot{Q} = \dot{m}\, c_p \left( T_{2in} - T_{1out} \right)$$

bilancio energia lato acqua ($\dot{m}_{H_2O}$ = portata acqua); acqua modellata come liq. perfetto:

$$\dot{L}_{H_2O} + \dot{Q}_{H_2O} = \dot{m}_{H_2O}\, c_{L_{H_2O}}\, \Delta T_{IR1,H_2O} + \dot{m}_{H_2O} \left\{ \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{\Delta V^2}{2} + g \Delta z \right\}_{IR1,H_2O}$$

$\Delta T_{IR1,H_2O}$ è la variazione di temperatura dell'acqua nell'interrefrigeratore 1; poiché l'acqua, raffreddando il gas, si scalda è $\Delta T_{IR1,H_2O} > 0$

$\left\{ \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{\Delta V^2}{2} + g \Delta z \right\}_{IR1,H_2O}$ è la variaz di en. mecc. lato acqua nello scambiatore 1.

Poiché non c'è lavoro scambiato né diss. per attrito

$$\left\{ \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{\Delta V^2}{2} + g \Delta z \right\}_{IR1,H_2O} = 0$$

per dimostrarlo scrivere eq en. mecc. lato acqua.

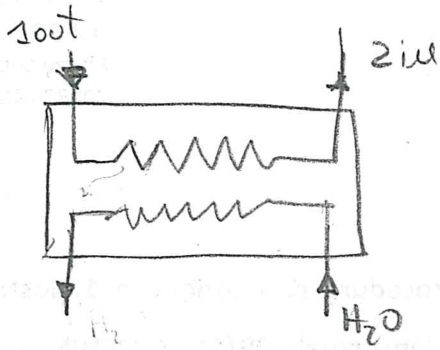
$\dot{L}_{H_2O} = 0$
$\dot{L} = 0$ no scambio di lavoro nei due rami dello scambiatore

Pertanto:

$$\dot{Q} = \dot{m}\, c_p \left( T_{2in} - T_{1out} \right)$$

$$\dot{Q}_{H_2O} = \dot{m}_{H_2O}\, c_{L_{H_2O}}\, \Delta T_{IR1,H_2O}$$

poiché lo scambio termico avviene soltanto tra i due rami dello scambiatore (e non verso l'ambiente esterno)




deve essere

$$\dot{Q} + \dot{Q}_{H_2O} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_{H_2O} = -\dot{Q}$$

ovvero la potenza termica ceduta dall'aria è acquisita dall'acqua:

$$\dot{Q}_{H_2O} = -\dot{Q} \quad \Rightarrow \quad \dot{m}\, c_p\, (T_{2in} - T_{1out}) = \dot{m}_{H_2O}\, c_{H_2O}\, \Delta T_{IR1,H_2O}$$

$$\Rightarrow \dot{m}_{H_2O} = \frac{\dot{m}\, c_p\, (T_{2in} - T_{1out})}{c_{H_2O}\, \Delta T_{IR1,H_2O}} = 45.7\ \frac{kg}{s}$$

$$\left( c_{H_2O} = 4186\ \frac{J}{kg\,K} \right)$$

---

$\boxed{2out}$ $P_{2out} = P_{2in}\, \beta_{II} = 6.25$ bar

inoltre poiché $T_{2in} = T_{1in}$, $\beta_{II} = \beta_I$ e $\eta_{is\,II} = \eta_{is\,I}$ certamente sarà $T_{2out} = T_{1out}$. Infatti

$$T_{2out,is} = T_{2in}\, \beta_{II}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 389.78\,K$$

se si nota che $T_{2in} = T_{1in}$ e $\beta_{II} = \beta_I$

$$T_{2out,is} = T_{2in}\, \beta_{II}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_{1in}\, \beta_I^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_{1out,is} = 389.78\,K$$

(non c'era bisogno di fare il conto)

inoltre

$$T_{2out} = T_{2in} + \frac{T_{2out,is} - T_{2in}}{\eta_{is\,II}} = 419.71\ K$$

se si nota che $T_{2in} = T_{1in}$, $T_{2out,is} = T_{1out,is}$ e $\eta_{is\,II} = \eta_{is\,I}$

non c'era bisogno di fare il conto:

$$T_{2out} = T_{2in} + \frac{T_{2out,is} - T_{2in}}{\eta_{is\,II}} = T_{1in} + \frac{T_{1out\,is} - T_{1in}}{\eta_{is\,I}} = T_{1out}$$

$$= 419.71\ K$$

$\boxed{3in}$

$P_{3in} = P_{2out} = 6.25\ bar$ (trascurato lato gas interrefrigeratore 2)

Per il calcolo di $T_{3in}$ scrivo i bilanci di energia ai due rami dell'interrefrigeratore 2, in cui conosco $\dot{m}_{H_2O}$ che fluisce essendo i due interrefrigeratori in serie.

Si ottiene:

$$T_{3in} = T_{2out} - \frac{\dot{m}_{H_2O}\ c_{L\,H_2O}\ \Delta T_{H_2O,\,IR2}}{\dot{m}\ c_p} = 335.91\ K$$

$\boxed{3out}$ non è noto $\beta_{III}$, pertanto calcolo $T_{3out}$ dalla potenza assorbita dal compressore complessivamente:

$$\dot{W} = \dot{m}\ (\ell_I + \ell_{II} + \ell_{III})$$

$\ell_i \quad i = I, II, III$

$\hookrightarrow$ lavoro specifico scambiato dall'i-esimo stadio

e dall'eq dell'energia applicata allo stadio III (adiabatico, come gli altri)

$$T_{3out} = T_{3in} + \frac{\ell_{III}}{c_p}$$

$$l_{III} = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} - (l_I + l_{II}) = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} - c_p \left\{ (T_{1out} - T_{1in}) - (T_{2out} - T_{2in}) \right.$$

$$= \frac{\dot{W}}{\dot{m}} - 2c_p (T_{1out} - T_{1in}) = 89.5 \ \frac{kJ}{kg}$$

$$T_{3out} = T_{3in} + \frac{l_{III}}{c_p} = 425.0 \ K$$

per calcolare $P_{3out}$, mi serve $T_{3out,is}$ per poter poi usare la relazione isentropica tra $p$ e $T$; Poiché è noto $\eta_{is,III}$

$$T_{3out,is} = T_{3in} + \eta_{is,III} (T_{3out} - T_{3in}) = 402.73 \ K$$

$$P_{3out} = P_{3in} \left( \frac{T_{3out,is}}{T_{3in}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 11.80 \ bar$$

$$\beta_{III} = \frac{P_{3out}}{P_{3in}} = 1.887$$

---

b) detti $\theta_I = \frac{T_{1out}}{T_{1in}}$ ; $\theta_{II} = \frac{T_{2out}}{T_{2in}}$ ; $\theta_{III} = \frac{T_{3out}}{T_{3in}}$

$\beta_I = \frac{P_{1out}}{P_{1in}}$ ; $\beta_{II} = \frac{P_{2out}}{P_{2in}}$ ; $\beta_{III} = \frac{P_{3out}}{P_{3in}}$

$$m_I = \frac{1}{1 - \frac{\log \theta_I}{\log \beta_I}} = 1.578 = m_{II} = \frac{1}{1 - \frac{\log \theta_{II}}{\log \beta_{II}}}$$

ovviamente

$$m_{III} = \frac{1}{1 - \frac{\log \theta_{III}}{\log \beta_{III}}} = 1.588$$

infine

$$\eta_{y_{I}} = \eta_{y_{II}} = \frac{m_{I}}{m_{I}-1} \quad \frac{\gamma-1}{\gamma} = 0.780 = \frac{m_{II}}{m_{II}-1} \quad \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

$$\eta_{y_{III}} = \frac{m_{III}}{m_{III}-1} \quad \frac{\gamma-1}{\gamma} = 0.771$$