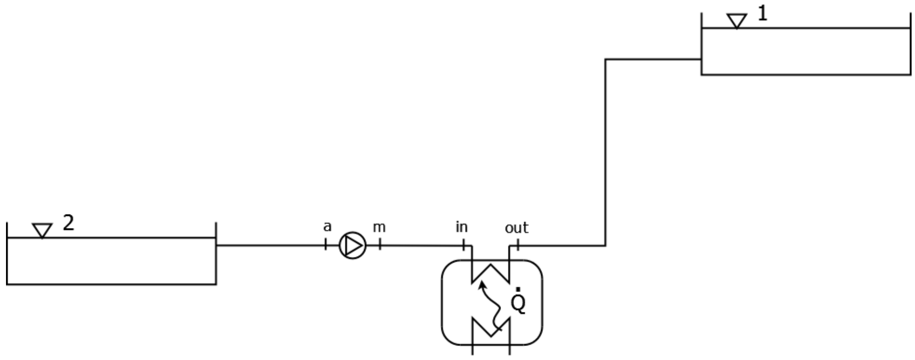
POMPE

Esercizio 1

Una pompa centrifuga è installata nel circuito di raffreddamento di un condensatore; la potenza termica scambiata al condensatore è pari a $15\ MW$. L'acqua prelevata dalla pompa proviene da un bacino (2) atmosferico con pelo libero posto a quota $z_2 = 2m$; dopo aver attraversato lo scambiatore l'acqua viene inviata a un secondo bacino (1), sempre atmosferico, il cui pelo libero si trova a quota $z_1 = 7m$. La curva caratteristica della pompa che aspira acqua fredda dal serbatoio inferiore è data dall'equazione (1) (per la velocità di rotazione operativa della pompa stessa). Il circuito è costituito da tubi di diametro $D = 300\ mm$, all'interno dei quali le perdite ammontano a 2 quote cinetiche nel condotto di aspirazione e a 3 quote cinetiche nel condotto di mandata.

Calcolare:
a) Il punto di funzionamento del sistema (analiticamente).
b) L'incremento di temperatura dell'acqua nel condensatore, trascurando le perdite nei condotti del condensatore.
c) La quota di aspirazione massima z_a della pompa, che ne garantisce un funzionamento esente da cavitazione, noto che NPSH richiesto è pari a $3\ m$ e che, alla temperatura operativa, la pressione di saturazione del fluido di lavoro è $P_v = 0.04\ bar$. Come si modifica il valore massimo di z_a se la tubazione di aspirazione presenta perdite pari a 5 quote cinetiche?

Dati:



$$\dot{Q} = 15\ \ MW \qquad z_1 = 7\ \ m \qquad z_2 = 2\ \ m$$

$$Y_a = 2\ \frac{V_a^2}{2g} \qquad Y_m = 3\ \frac{V_m^2}{2g} \qquad D = 0.3\ \ m$$

$$NPSH_r = 3\ \ m \qquad P_v = 0.04\ \ bar \qquad Y_a' = 5\ \frac{V_a^2}{2g}$$

$$H = 26 + 2\dot{V} - 85\dot{V}^2 \qquad \text{dove} \qquad \dot{V} = [m^3/s], H = [m] \tag{1}$$

Soluzione:

a) Per calcolare il punto di funzionamento della pompa è necessario determinare l'espressione analitica della curva caratteristica dell'impianto (curva caratteristica del circuito), ovvero la funzione $H_c = H_c(\dot{V}_c)$, dove H_c rappresenta la prevalenza richiesta dall'impianto e $\dot{V}_c$ la portata volumetrica circolante nell'impianto. Tale funzione può essere ottenuta scrivendo il bilancio di energia meccanica per il sistema tra le sezioni 2 e 1:

$$\frac{l - l_w}{g} = \left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2\right) + Y_a + Y_m$$

che esprime l'energia meccanica che il circuito richiede (termine a destra) e che sarà evidentemente fornita da una pompa (termine a sinistra); considerando che $P_1 = P_2$ e $V_1 = V_2 = 0$, è possibile esprimere la prevalenza H_c richiesta dal circuito come:

$$H_c = \frac{l - l_w}{g} = (z_1 - z_2) + Y_a + Y_m$$

Poiché le tubazioni di aspirazione e mandata hanno lo stesso diametro, il bilancio di massa (equazione di continuità), nel caso (come questo) di liquido perfetto, implica $V_a = V_m = V$ e possiamo ottenere l'espressione della caratteristica del circuito esprimendo le perdite in funzione della portata volumetrica:

$$H_c = (z_1 - z_2) + 5\frac{V^2}{2g} = (z_1 - z_2) + \frac{5}{2g}\left(\frac{4}{\pi D^2}\right)^2 \dot{V_c}^2$$

ed infine:

$$H_c = 5 + 51\dot{V_c}^2.$$

Il punto di lavoro del sistema può essere calcolato mettendo a sistema le espressioni di H e H_c, ovvero imponendo $H_c = H$ e $\dot{V_c} = \dot{V}$ (condizioni che si realizzano quando la pompa viene inserita nel circuito):

$$\begin{cases} H = 26 + 2\dot{V} - 85\dot{V}^2 \\ H_c = 5 + 51\dot{V}^2 \end{cases}$$

che fornisce il punto di funzionamento seguente:

$$\begin{cases} \dot{V} = 0.4 \ m^3/s \\ H = 13.2 \ m \end{cases}$$

b) Il calcolo dell'incremento di temperatura dell'acqua nel condensatore viene eseguito scrivendo il bilancio di energia tra le sezioni di ingresso (*in*) e di uscita (*out*) del ramo acqua del condensatore:

$$u_{out,c} - u_{out,c} + \frac{P_{out,c} - P_{in,c}}{\rho} + \frac{V_{out,c}^2 - V_{in,c}^2}{2} + g(z_{out,c} - z_{in,c}) = q + l$$

osservando che nel condensatore non c'è scambio di lavoro e che le perdite sono trascurabili, l'equazione dell'energia meccanica fornisce:

$$\frac{P_{out,c} - P_{in,c}}{\rho} + \frac{V_{out,c}^2 - V_{in,c}^2}{2} + g(z_{out,c} - z_{in,c}) = l - l_w = 0$$

e sostituendo il trinomio

$$\frac{P_{out,c} - P_{in,c}}{\rho} + \frac{V_{out,c}^2 - V_{in,c}^2}{2} + g(z_{out,c} - z_{in,c}) = 0$$

nell'equazione dell'energia, si ottiene:

$$u_{out,c} - u_{out,c} = C_L(T_{out,c} - T_{out,c}) = \frac{\dot{Q}}{\rho\dot{V}}$$

$$\Rightarrow \qquad (T_{out,c} - T_{out,c}) = \frac{\dot{Q}}{\rho\dot{V}C_L} = 8.96K$$

con $C_L = 4.186 \; kJ/(kgK)$ calore specifico dell'acqua in fase liquida.

c) La quota di aspirazione massima a cui si può collocare la pompa per evitare cavitazione può essere calcolata imponendo la seguente condizione su NPSH:

$$NPSH_{disp} \geq NPSH_{rich}$$

dalla definizione di $NPSH_{disp}$ per una pompa si ha:

$$NPSH_{disp} = \frac{P_a}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} - \frac{P_v}{\rho g}$$

dove i pedici *a* e *m* si riferiscono alle flange di aspirazione e mandata della pompa. Dall'equazione dell'energia meccanica (teorema di Bernoulli generalizzato) scritta tra le sezioni *2* e *a* si ottiene il seguente risultato per z_a:

$$z_a \leq z_2 + \frac{P_2 - P_v}{\rho g} - \frac{Y_a}{g} - NPSH_{rich} = 5.65 \;\; m$$

mentre nel caso in cui $Y_a = 5\frac{V_a^2}{2g}$, si ottiene:

$$z_a \leq z_2 + \frac{P_2 - P_v}{\rho g} - \frac{Y_a}{g} - NPSH_{rich} = 0.75 \;\; m$$

Esercizio 2

Il funzionamento di una pompa centrifuga alla velocità di rotazione di $1500\ rpm$ è descritto dalle seguenti curve caratteristiche, $H(\dot{V}) = -5000\dot{V}^2 + 30$ e $\eta(\dot{V}) = -250\dot{V}^2 + 17\dot{V} + 0.5$. Il circuito idraulico in cui è inserita la pompa è definito da un dislivello di 22 m tra due serbatoi alla stessa pressione e da un dato sperimentale (punto *exp*) che indica una prevalenza richiesta di $25\ m$ in corrispondenza di una portata circolante nell'impianto pari a $0.05\ m^3/s$ (si assuma una forma parabolica per la caratteristica del circuito).
a) Si richiede di valutare il punto di lavoro della macchina e la corrispondente potenza assorbita.
b) Allo scopo di regolare la portata viene variata la velocità di rotazione. Si richiede di determinare il nuovo punto di funzionamento a $1750\ rpm$ e la potenza assorbita nella nuova condizione operativa.

Dati:

$$\begin{aligned} n_A &= 1500\ rpm & H(\dot{V}) &= -5000 \cdot \dot{V}^2 + 30 \\ \Delta z &= 22m & \eta(\dot{V}) &= -250\dot{V}^2 + 17\dot{V} + 0.5 \\ \dot{V} &= [m^3/s] & H &= [m] \\ H_{exp} &= 25m & \dot{V}_{exp.} &= 0.05 m^3/s \\ n_B &= 1750\ rpm \end{aligned}$$

Soluzione:

a) Per individuare il punto di funzionamento della macchina è necessario determinare la curva caratteristica del circuito. Come indicato, si assume una forma parabolica, la cui forma è la seguente (si scriva esplicitamente la forma di H_c utilizzando l'equazione dell'energia meccanica per il circuito, in modo da evidenziare l'assenza del termine lineare):

$$H_c(\dot{V}) = A \cdot \dot{V}^2 + C$$

in cui è noto che, per portata nulla, $H_c = \Delta z$, essendo nulla la differenza di pressione e di velocità del fluido tra i due serbatoi. Di conseguenza $C = \Delta z = 22$ (si ricordi che per portata nulla anche le perdite nei condotti sono nulle). Dal dato sperimentale è possibile ottenere il valore A, osservando che tale dato appartiene alla curva caratteristica del circuito e dunque ne soddisfa l'equazione:

$$25 = 22 + A(0.05)^2 \quad \Rightarrow A = \frac{25 - 22}{0.05^2} = 1200$$

Il punto operativo della macchina è ottenuto mettendo a sistema le curve caratteristiche della pompa e del circuito:

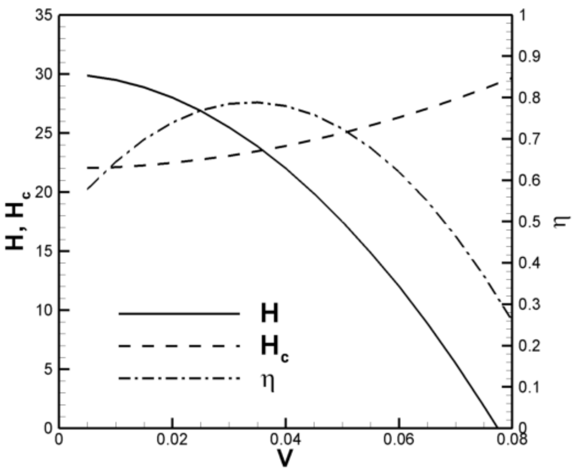
$$\begin{cases} H(\dot{V}) = 30 - 5000\dot{V}^2 \\ H_c(\dot{V}) = 22 + 1200\dot{V}^2 \end{cases}$$

Dall'intersezione delle due curve si trova il punto di funzionamento e, per la portata ottenuta, si calcola il corrispondente rendimento (essendo nota la sua espressione analitica):

$$\begin{cases} \bar{H} = 23.5 \ m \\ \bar{\dot{V}} = 0.036 \ m^3/s \\ \bar{\eta} = 0.788 \end{cases}$$

Dunque, la potenza assorbita dalla pompa è:

$$\dot{W} = \dot{m}\Delta h = \rho\bar{\dot{V}}\frac{g\bar{H}}{\bar{\eta}} = 10.5 \ kW$$



b) Allo scopo di regolare (cambiare) la portata nel sistema è necessario modificarne il punto di funzionamento, ovvero l'intersezione tra caratteriastica della pompa e del circuito. E' dunque possibile intervenire sul circuito, ad esempio agendo su una valvola e modificando le perdite, sulla pompa, variandone la velocità di rotazione, oppure su entrambe. In questo caso non si ha nessuna azione sul circuito (e dunque nessuna modifica della sua curva caratteristica), mentre cambia la curva caratteristica della pompa, della quale si incrementa il numero di giri. Per trovare il nuovo punto di lavoro del sistema è dunque necessario determinare la curva caratteristica della pompa alla nuova velocità di rotazione ed individuarne l'intersezione con la caratteristica del circuito.
Per ottenere la curva di funzionamento della pompa alla nuova velocità di rotazione n_B si utilizza la curva caratteristica (nota) della pompa alla velocità di rotazione n_A e si fa ricorso alla teoria della similitudine.
Si consideri il punto A_1 appartenente alla caratteristica della pompa a n_A, il punto B_1 corrispondente (ovvero in similitudine) ad A_1 per $n = n_B$ è di certo appartenente alla curva di funzionamento della pompa a n_B (in particolare è il punto in cui la pompa presenta, a giri n_B, le stesse prestazioni del punto A_1). I punti

A_1 e B_1 presentano, ovviamente, gli stessi valori dei parametri adimensionali (ad esempio φ e ψ). Eseguendo tale operazione per tutti i possibili punti A_1 si ottengono tutti i possibili punti B_1, ovvero la curva caratteristica della pompa alla velocità di rotazione n_B.
Tali considerazioni equivalgono a dire, più semplicemente, che le due curve caratteristiche dimensionali, diventano un'unica curva in termini adimensionali (ad es. $\psi = \psi(\varphi)$); questo nel contesto della similitudine geometrica-cinematica. La similitudine geometrica è garantita dal fatto che la macchina non cambia, quella cinematica si ottiene attraverso l'uguaglianza dei parametri adimensionali (che garantisce triangoli di velocità simili). Si noti che la similitudine è qui sfruttata soltanto per ottenere la curva caratteristica della pompa a velocità di rotazione n_B, indipendentemente dal fatto che la macchina (inserita nel circuito) lavori, a giri n_B, in similitudine rispetto al caso a giri n_A (cosa che, infatti, non accade).
Detto quanto sopra, è sufficiente utilizzare l'espressione (dimensionale) della curva caratteristica a giri n_A, adimensionalizzarla e osservare che tale curva adimensionale è la stessa per il caso a giri n_B. Esprimendo i parametri adimensionali in funzione delle variabili e dei parametri relativi al funzionamento a giri n_B, si ottiene la curva caratteristica (dimensionale) a giri n_B:

$$
\begin{aligned}
&H_A = -5000\dot{V}_A^{\,2} + 30 \Rightarrow \psi_A n_A^2 D_A^2 = -5000\varphi_A^2 n_A^2 D_A^6 + 30 \\
&\Rightarrow \psi = -5000\varphi^2 D^4 + \frac{30}{n_A^2 D^2}
\end{aligned}
$$

poiché $\varphi_A = \varphi_B = \varphi$, $\psi_A = \psi_B = \psi$ e $D_A = D_B = D$
L'ultima relazione rappresenta la curva caratteristica della pompa in termini adimensionali. Esprimendo ora i parametri adimensionali φ e ψ in funzione di H_B, $\dot{V}_B$ e n_B si ottiene la curva caratteristica della pompa a velocità di rotazione n_B:

$$
\begin{aligned}
&\frac{H_B}{n_B^2 D^2} = -5000\frac{\dot{V}_B^{\,2} D^4}{n_B^2 D^6} + \frac{30}{n_A^2 D^2} \Rightarrow H_B = -5000\dot{V}_B + 30\left(\frac{n_B}{n_A}\right)^2 \\
&\Rightarrow H_B = -5000\dot{V}_B + 40.8
\end{aligned}
$$

Si noti che nel caso in cui le macchine (geometricamente simili) avessero avuto diametro diverso, l'analisi sarebbe stata la stessa, ma ma sarebbero comparsi anche i rapporti tra i diametri D_A e D_B nell'espressione finale.

Con approccio del tutto simile, si ottiene la curva di rendimento per la pompa operante a velocità di rotazione n_B:

$$
\begin{aligned}
&\eta_A = -250\dot{V}_A^{\,2} + 17\dot{V}_A + 0.5 \Rightarrow \eta_A = -250\varphi_A^2 n_A^2 D^6 + 17\varphi_A n_A D^3 + 0.5 \\
&\Rightarrow \eta = -250\varphi^2 n_A^2 D^6 + 17\varphi n_A D^3 + 0.5
\end{aligned}
$$

L'ultima relazione rappresenta la curva del rendimento della pompa in termini adimensionali. Esprimendo ora il parametro adimensionale φ in funzione di $\dot{V}_B$ e n_B si ottiene la curva caratteristica della pompa a velocità di rotazione n_B:

$$\eta = -250\left(\frac{n_A}{n_B}\right)^2 \dot{V}_B{}^2 + 17\left(\frac{n_A}{n_B}\right)\dot{V}_B + 0.5 \Rightarrow \eta = \eta_B = -183.7\dot{V}_B{}^2 + 14.6\dot{V}_B + 0.5$$

Il nuovo punto di funzionamento si ottiene, al solito, mettendo a sistema la curva caratteristica della pompa in corrispondenza di n_B con quella (invariata) del circuito; per la portata ottenuta, si calcola anche il corrispondente rendimento (essendo nota la sua espressione analitica):

$$\begin{cases} H_B(\dot{V}_B) = 40.8 - 5000\dot{V}_B{}^2 \\ H_c(\dot{V}_B) = 22 + 1200\dot{V}_B{}^2 \end{cases}$$

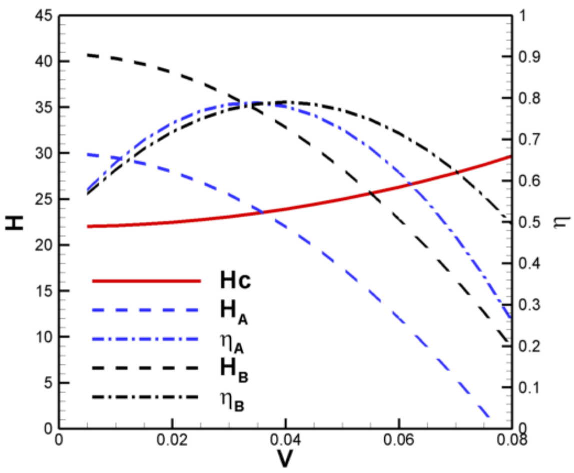
da cui:

$$\begin{cases} \bar{H}_B = 25.63\ m \\ \bar{\dot{V}}_B = 0.055\ m^3/s \\ \bar{\eta}_B = 0.745 \end{cases}$$

Dunque, la potenza assorbita dalla pompa è:

$$\dot{W}_B = \dot{m}_B w_B = \rho \bar{\dot{V}}_B \frac{g\bar{H}_B}{\bar{\eta}_B} = 18.54\ kW$$

Si noti che il nuovo punto di lavoro del sistema **NON** è in similitudine con quello originario. A conferma di ciò, si vedano i rendimenti che differiscono nei due casi (a ulteriore conferma si possono calcolare i parametri adimensionali φ e ψ per i due punti di funzionamento e verificare che anch'essi differiscono).
Si è fatto uso di concetti di similitudine per determinare le curve di funzionamento della pompa a diverse velocità di rotazione, ma, note le curve, i punti di lavoro sono determinati dalla curva caratteristica del circuito. In generale punti differenti della caratteristica del circuito non hanno alcun legame con le condizioni di similitudine della macchina.



H
V
η
Hc
H_A
η_A
H_B
η_B
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

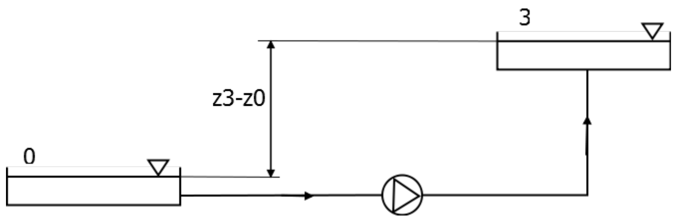
POMPE

Esercizio 3

La curva caratteristica di una pompa centrifuga può essere valutata sulla base delle seguenti caratteristiche geometriche e condizioni operative:

- diametro allo scarico della girante $D_2 = 0.75\ m$;
- altezza di pala allo scarico della girante $b_2 = 0.1\ m$;
- angolo relativo allo scarico della girante $\beta_2 = 30°$ (pale in avanti);
- velocità di rotazione $n = 650\ rpm$;
- curva del rendimento idraulico $\eta = 0.98 - 0.02\dot{V}$ ($\dot{V} = [m^3/s]$).

La macchina è installata in un circuito idraulico, in cui circola acqua, caratterizzato da un dislivello geodetico di 19 m tra i peli liberi di due bacini (atmosferici). Il diametro dei condotti di aspirazione e mandata è pari a 0.8 m e le perdite complessive sono pari a 5 quote cinetiche.
Si richiede di:
a) valutare il punto operativo del sistema e la potenza assorbita dalla pompa in questa condizione.
b) Considerando pompa e circuito adiabatici, calcolare l'incremento della temperatura dell'acqua tra il bacino di aspirazione e quello di mandata e il lavoro specifico l_w dissipato dalla sola pompa (si assuma, al solito per l'acqua, $\rho = 1000\ kg/m^3$, $C_L = 4186\ J/(kgK)$.
c) La pompa viene sostituita da una nuova pompa, geometricamente simile alla precedente. Calcolare la nuova velocità di rotazione e il nuovo diametro della girante tali da garantire (nello stesso circuito idraulico) una portata volumetrica pari a 15 m^3/s con la nuova pompa operante in similitudine rispetto alla precedente.



Dati:

$$n = 650\ rpm \qquad \eta = 0.98 - 0.02\dot{V} \qquad \dot{V} = [m^3/s]$$
$$D_2 = 0.75\ m \qquad b_2 = 0.1\ m \qquad \beta_2 = 30°$$
$$z_3 - z_0 = 19\ m \qquad D = 0.8\ m \qquad Y = 5\frac{V^2}{2}$$

Soluzione:

a) Per calcolare il punto di funzionamento del sistema è necessario valutare l'espressione analitica delle curve caratteristiche dell'impianto e della pompa. La curva caratteristica del circuito $H_c = H_c(\dot{V})$ può essere determinata scrivendo il bilancio di energia meccanica tra i due peli liberi (sezioni 0 e 3):

$$l - l_w - Y = \left(\frac{V_3^2}{2} + \frac{P_3}{\rho} + gz_3\right) - \left(\frac{V_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} + gz_0\right)$$

poiché $P_3 = P_0 = P_{atm}$ e $V_3 = V_0 = 0$ e, scrivendo le perdite come funzione della portata volumentrica $\dot{V}$, si ottiene:

$$H_c = \frac{5}{2g}\frac{16\dot{V}^2}{\pi^2 D^4} + (z_3 - z_0) = 1.01\dot{V}^2 + 19$$

La curva caratteristica della pompa $H = H(\dot{V})$ può essere ottenuta dalla sua curva di rendimento e dalla definizione di rendimento idraulico di una pompa $\eta = gH/l$, a condizione che il lavoro specifico scambiato tra pompa e fluido sia noto in funzione della portata, ovvero che la funzione $l = l(\dot{V})$ sia nota. Per calcolare il lavoro specifico è possibile sfruttare la relazione di Eulero, noti che siano i triangoi di velocità. Poiché la pompa (centrifuga) aspira assialmente il fluido di lavoro dal tubo di aspirazione, il lavoro euleriano è $l = U_2V_{2t}$ e soltanto il triangolo di velocità all'uscita della girante è necessario per effettuarne il calcolo.

$$U_2 = 2\pi\frac{n}{60}\frac{D_2}{2} = 25.5\ m/s$$

$$V_{2r} = W_{2r} = \frac{\dot{V}}{\pi D_2 b_2} = 4.25\dot{V}$$
$$W_{2t} = W_{2r} tan\beta_2 = 2.45\dot{V}$$
$$V_{2t} = U_2 + W_{2t} = 25.5 + 2.45\dot{V}$$

e, in conclusione:

$$l = U_2 V_{2t} = U_2^2 + U_2 W_{2t} = 650.25 + 62.48\dot{V}$$

Dalla definizione di rendimento idraulico di una pompa si ha:

$$H = \frac{\eta l}{g} = \frac{(0.98 - 0.02\dot{V})(650.25 + 62.48\dot{V})}{9.81} = -0.13\dot{V}^2 + 4.92\dot{V} + 64.96$$

ovvero, la curva caratteristica della pompa. Il punto operativo si calcola imponendo $H = H_c$, ovvero mettendo a sistema le espressioni di H eH_c:

$$\begin{cases} H = -0.13\dot{V}^2 + 4.92\dot{V} + 64.96 \\ H_c = 1.01\dot{V}^2 + 19 \end{cases}$$

che fornisce il seguente punto operativo:

$$\begin{cases} \bar{\dot{V}} = 8.9 \ \ m^3/s \\ \bar{H} = 98.4 \ \ m \end{cases}$$

Noto il punto di funzionamento è possibile calcolare il lavoro specifico e la potenza assorbita:

$$l = U_2 V_{2t} = 650.25 + 62.48\bar{\dot{V}} = 1206.5 \ \ J/kg$$
$$\dot{L} = \rho \bar{\dot{V}} l = 10.74 \ \ MW$$

b) L'incremento di temperatura tra i due bacini può essere calcolato scrivendo l'equazione dell'energia tra le sezioni 0 e 3:

$$l + q = C_L(T_3 - T_0) + \frac{P_3 - P_0}{\rho} + \frac{V_3^2 - V_0^2}{2} + g(z_3 - z_0)$$

e, essendo circuito e pompa adiabatici ($q = 0$):

$$T_3 - T_0 = \frac{l}{C_L} - \frac{g(z_3 - z_0)}{C_L} = 0.245 \ \ °C$$

Il lavoro specifico l_w dissipato dalla pompa può essere calcolato utilizzando la definizione di prevalenza, quella di rendimento oppure sottraendo l'equazione di bilancio dell'energia meccanica dall'equazione dell'energia. A meno delle approssimazioni, il risultato è il medesimo; rispettivamente:

$$l_w = l - g\bar{H} = 241\ J/kg$$

$$l_w = (1-\eta)l = (1 - 0.98 + 0.02\bar{\dot{V}})l = 239\ J/kg$$

$$l_w = C_L(T_3 - T_0) - Y = C_L(T_3 - T_0) - \frac{5}{2}\frac{16\bar{\dot{V}}^2}{\pi^2 D^4} = 241\ \ J/kg$$

c) Poiché il cambio della pompa lascia il circuito inalterato, il nuovo punto di funzionamento é:

$$\begin{cases} \dot{V}_{c)} = 15.0\ \ m^3/s \\ H_{c)} = 19 + 1.01\dot{V}_{c)}^{\ 2} = 246.5\ \ m \end{cases}$$

Le due pompe operano in similitudine, perciò:

$$\begin{cases} \varphi_{c)} = \varphi \\ \psi_{c)} = \psi \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{V}_{c)}}{n_{c)} D_{2,c)}^3} = \dfrac{\bar{\dot{V}}}{n D_2^3} \\ \dfrac{g H_{c)}}{n_{c)}^2 D_{2,c)}^2} = \dfrac{g\bar{H}}{n^2 D_2^2} \end{cases}$$

conseguentemente:

$$n_{c)} = n\left(\frac{\bar{\dot{V}}}{\dot{V}_{c)}}\right)^{1/2}\left(\frac{H_{c)}}{\bar{H}}\right)^{3/4} = 996.5\ \ rpm$$

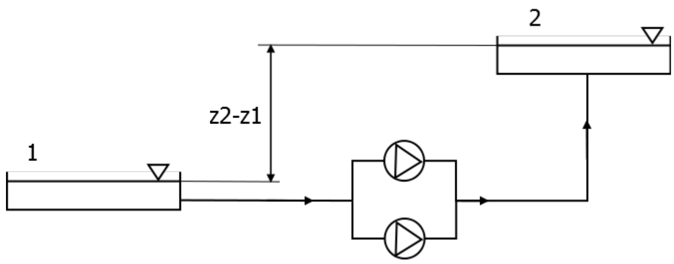
$$D_{2,c)} = D_2\left(\frac{H_{c)}}{\bar{H}}\right)^{1/2}\frac{n}{n_{c)}} = 0.774\ \ m$$

Esercizio 4

Nel circuito idraulico rappresentato in figura la potenza richiesta dal fluido viene fornita da due pompe **identiche** (uguali e operanti alla stessa velocità di rotazione) poste in parallelo. Ogni pompa opera a $n = 1500\ rpm$. A questa velocità di rotazione le curve caratteristiche di prevalenza e rendimento della singola pompa (pedice P) sono espresse come:

$$H_P = -100\dot{V}_P^2 - 20\dot{V}_P + 12.5 \qquad \dot{V}_P = [m^3/s] \quad H_P = [m]$$
$$\eta = -0.2\dot{V}_P^2 - \dot{V}_P + 1$$

I condotti primari di aspirazione e mandata hanno diametro $D = 0.4\ m$ e includono diversi componenti che determinano una perdita complessiva $Y = 25V^2/2$, riferita alla velocità V nel tubo primario. La differenza di quota tra i peli liberi dei due bacini (atmosferici) è $(z_2 - z_1) = 4\ m$. I rami secondari delle tubazioni di aspirazione e mandata possono essere considerati identici e con perdite trascurabili.
Si richiede di:
a) calcolare il punto operativo del sistema e la potenza assorbita dalle pompe.
b) Nel caso in cui una pompa vada fuori servizio, a che velocità di rotazione si deve portare pompa che resta in servizio allo scopo di garantire che la stessa portata volumetrica del caso a) circoli nel sistema? Qual è la potenza assorbita in questo caso?



Dati:

$$n = 1500\ \ rpm \qquad D = 0.4\ \ m \qquad Y = 25\frac{V^2}{2}$$
$$z_2 - z_1 = 4\ \ m$$

Soluzione:

a) Il calcolo del punto operativo richiede la valutazione dell'espressione analitica delle curve caratteristiche di circuito e macchina. La macchina è ora costituita dal sistema delle due pompe in parallelo, che forniscono la potenza meccanica richiesta dal circuito. E' dunque necessario costruire la curva caratteristica del sistema di pompe ($H = H(\dot{V})$) a partire dalla conoscenza della curva della singola pompa ($H_P = H_P(\dot{V}_P)$).
Essendo le pompe in parallelo e trascurabili le perdite nei rami secondari, le due pompe hanno la stessa prevalenza H_P, che è anche uguale a quella del sistema di pompe H, cioè $H = H_P$. Inoltre, la configurazione in parallelo è tale per cui la portata del sistema è pari alla somma delle portate elaborate dalla singola macchina (in generale, per un numero arbitrario i di pompe $\dot{V} = \sum_{k=1}^{i} \dot{V}_k$); perciò $\dot{V} = \dot{V}_P + \dot{V}_P = 2\dot{V}_P$.
Si ha dunque:

$$\begin{cases} H = H_P \\ \dot{V} = 2V_P \end{cases}$$

Sostituendo le relazioni appena scritte nell'equazione della curva caratteristica della singola pompa, si ottiene una relazione tra la prevalenza H e la portata volumetrica $\dot{V}$ del sistema di pompe; chiaramente questa relazione esprime la curva caratteristica del sistema di pompe in parallelo:

$$H = H_P = -100\dot{V}_P^2 - 20\dot{V}_P + 12.5 = -100\left(\frac{\dot{V}}{2}\right)^2 - 20\frac{\dot{V}_P}{2} + 12.5$$

ovvero

$$H = -25\dot{V}^2 - 10\dot{V} + 12.5$$

Al solito, la curva caratteristica del circuito $H_c = H_c(\dot{V})$ si ottiene scrivendo il bilancio di energia meccanica tra le sezioni 1 e 2:

$$l - l_w - Y = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

essendo $P_2 = P_1 = P_{atm}$ e $V_2 = V_1 = 0$ e scrivendo le perdite del circuito in funzione della portata volumetrica $\dot{V}$ si ha:

$$H_c = \frac{25}{2g}\frac{16\dot{V}^2}{\pi^2 D^4} + (z_2 - z_1) = 80.77\dot{V}^2 + 4$$

Il punto operativo OP del sistema è infine ottenuto mettendo a sistema le espressioni di H e H_c, ovvero imponendo $H = H_c$:

$$\begin{cases} H = -25\dot{V}^2 - 10\dot{V} + 12.5 \\ H_c = 80.77\dot{V}^2 + 4 \end{cases}$$

che dà il seguente punto di funzionamento (punto OP nel diagramma riportato nel seguito):

$$\begin{cases} \bar{\dot{V}} = 0.24 \ \ m^3/s \\ \bar{H} = 8.65 \ \ m \end{cases}$$

Di conseguenza il punto operativo della singola pompa (punto OP$_P$) è:

$$\begin{cases} \bar{\dot{V}}_P = \dfrac{\dot{V}}{2} = 0.12 \ \ m^3/s \\ \bar{H_P} = H = 8.65 \ \ m \end{cases}$$

Allo scopo di valutare la potenza assorbita è necessario il calcolo del rendimento di ciascuna pompa; si noti che la curva di rendimento assegnata è relativa alla singola pompa (cosa ovvia poiché il rendimento idraulico è un parametro di prestazione che caratterizza la specifica macchina). Perciò, al punto operativo di ciascuna singola pompa, il rendimento e il lavoro specifico sono:

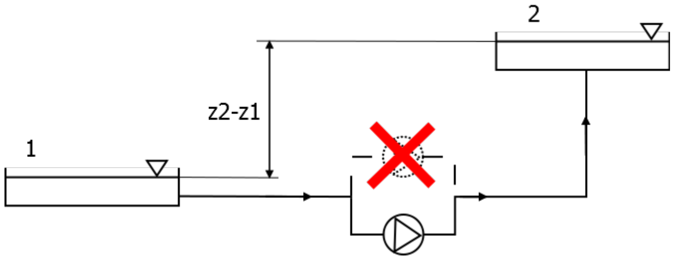
$$\bar{\eta_P} = -0.2\bar{\dot{V}}_P^2 - \bar{\dot{V}}_P + 1 = \ \ 0.877$$

$$l_P = \frac{g\bar{H_P}}{\bar{\eta_P}} = 96.76 \ \ J/kg$$

Infine la potenza assorbita dal sistema di pompe è:

$$\dot{L} = 2\dot{L_P} = 2\rho\bar{\dot{V}}_P l_P = 23.22 \ \ kW$$

b) In caso di rottura di una pompa (schema di impianto rappresentato sotto) una variazione (incremento) della velocità di rotazione della pompa restante è necessaria a garantire al sistema la stessa portata volumentrica del caso a).



La curva caratteristica dell'impianto resta invariata, mentre la curva della (singola) pompa ancora funzionante si sposta allo scopo di fornire la stessa portata del caso a). Poiché circuito e portata restano invariati, anche il punto operativo (OP) è lo stesso del caso a): la curva della pompa funzionante si deve spostare fino a passare per il punto OP.
La nuova velocità di rotazione può essere determinata calcolando la curva caratteristica della pompa rimanente a una generica velocità di rotazione n_b (ovvero $H_{P,b} = H_{P,b}(\dot{V}_{P,b})$) che verrà fissata imponendo che il punto operativo (OP) giaccia su tale curva. La procedura usata per calcolare la curva $H_{P,b} = H_{P,b}(\dot{V}_{P,b})$ sfrutta concetti di similitudine.
Un punto Q_P appartenente alla curva della pompa con velocità di rotazione n possiede un punto di funzionamento corrispondente $Q_{P,b}$ per la stessa pompa (dunque una pompa geometricamente simile) rotante a n_b. $Q_{P,b}$ rappresenta uno dei possibili punti di funzionamento della pompa operante a n_b; di conseguenza **deve** appartenere alla curva caratteristica della pompa a n_b. Q_P e $Q_{P,b}$ essendo punti corrispondenti (ovvero in similitudine) hanno gli stessi parametri adimensionali (ad esempio φ e ψ).
Ripetendo il ragionamento per tutti i possibili punti Q_P, si ottengono tutti i possibili punti $Q_{P,b}$, cioè tutti possibili punti di funzionamento della pompa a n_b, ovvero la curva caratteristica della pompa a n_b. Essa è costruita partendo dalla curva caratteristica della pompa a n, **indipendentemente dal fatto che il funzionamento reale della pompa (a n e n_b) avvenga in condizioni di similitudine una volta che la pompa viene installata in un circuito idraulico.**
In altre parole, viene calcolata la curva caratteristica adimensionale della pompa (usando i parametri dimensionali della pompa rotante a n) che viene poi espressa in funzione dei parametri dimensionali della pompa rotante a n_b (poiché $\varphi_P = \varphi_{P,b}$ e $\psi_P = \psi_{P,b}$). Partendo da tale espressione è possibile scrivere la forma dimensionale della curva caratteristica della pompa rotante a n_b.

$$\begin{aligned} H_P &= -100\dot{V}_P^2 - 20\dot{V}_P + 12.5 \\ \psi_P \frac{n^2 D^2}{g} &= -100 n^2 D^6 \varphi_P^2 - 20 n D^3 \varphi + 12.5 \\ \psi_P &= (-100 D^4 \varphi_P^2 - 20\frac{D}{n}\varphi_P + \frac{12.5}{n^2 D^2})g \end{aligned}$$

Essendo $\varphi_P = \varphi_{P,b}$ e $\psi_P = \psi_{P,b}$

$$\psi_{P,b} = (-100D^4\varphi_{P,b}^2 - 20\frac{D}{n}\varphi_{P,b} + \frac{12.5}{n^2D^2})g$$
$$\frac{H_{P,b}}{n_b^2D^2} = -100\frac{\dot{V}_{P,b}^2}{n^2D^2} - 20\frac{\dot{V}_{P,b}}{nn_bD^2} + 12.5\frac{1}{n^2D^2}$$
$$H_{P,b} = -100\dot{V}_{P,b}^2 - 20\left(\frac{n_b}{n}\right)\dot{V}_{P,b} + 12.5\left(\frac{n_b}{n}\right)^2$$

Quest'ultima espressione rappresenta la curva caratteristica della (singola) pompa funzionante alla velocità di rotazione n_b. Imponendo che il punto operativo (OP) del caso a) giaccia su questa curva, si determina l'unica incognita n_b/n:

$$8.65 = -100\cdot 0.24^2 - 20\cdot 0.24\left(\frac{n_b}{n}\right) + 12.5\left(\frac{n_b}{n}\right)^2$$

da cui

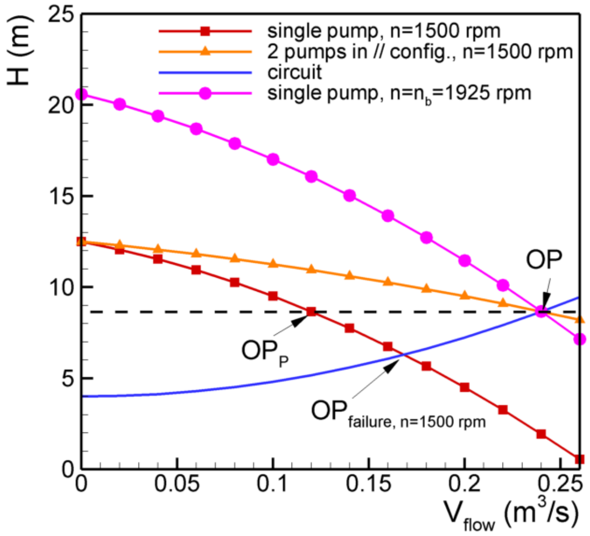
$$\left(\frac{n_b}{n}\right) = 1.283$$
$$n_b = 1924\ \ rpm$$

Allo scopo di calcolare il lavoro specifico l_b e la potenza assorbita $\dot{L}_b$, è necessario determinare la nuova curva di rendimento $\eta_{P,b} = \eta_b(\dot{V}_{P,b})$ per la pompa operante a n_b. In modo del tutto simile alla procedura usata per il calcolo della curva caratteristica della prevalenza, cioè sfruttando la similitudine, si ottiene:

$$\eta_{P,b} = -0.2\left(\frac{n}{n_b}\right)^2\dot{V}_{P,b}^2 - \left(\frac{n}{n_b}\right)\dot{V}_{P,b} + 1 = -0.121\dot{V}_{P,b}^2 - 0.78\dot{V}_{P,b} + 1$$

e, infine, per il punto di funzionamento OP=($\bar{\dot{V}}$, $\bar{H}$):

$$\eta_{\bar{P},b} = 0.806$$
$$l_b = \frac{g\bar{H}}{\eta_{\bar{P},b}} = 105.28\ \ kJ/kg$$
$$\dot{L}_b = \rho\bar{\dot{V}}l_b = 25.27\ \ kW$$



H (m)
25
20
15
10
5
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
V flow (m3/s)
single pump, n=1500 rpm
2 pumps in // config., n=1500 rpm
circuit
single pump, n=nb=1925 rpm
OP
OPP
OPfailure, n=1500 rpm

Esercizio 5

Una pompa centrifuga, la cui curva caratteristica è esprimibile mediante la relazione:

$$H = 85 - 2.2 \cdot 10^{-6}\dot{V}^2 \qquad H = [m] \quad \dot{V} = [m^3/h]$$

è inserita in un impianto di pompaggio acqua con le seguenti caratteristiche:

- un serbatoio di aspirazione a cielo aperto il cui pelo libero (a pressione atmosferica pari a $1\ bar$) è alla quota di $5\ m$ sul livello del suolo;
- un serbatoio di mandata, alla pressione di $2.5\ bar$, il cui pelo libero è posto ad una quota di $15\ m$ sul livello del suolo;
- una tubazione del diametro di $350\ mm$ che dà luogo ad una perdita di carico pari a 5 quote cinetiche sul ramo di aspirazione e 15 quote cinetiche sul lato di mandata del circuito.

Si richiede di valutare:
a) il punto di funzionamento e la massima altezza d'installazione $z_{a,max}$ della pompa rispetto al livello del suolo, supponendo una tensione di vapore del fluido pari a $0.7\ m$ e un $NPSH_r = 5.5\ m$.

Si valutino inoltre le condizioni operative della pompa per:
b) una riduzione della velocità di rotazione di un quarto, supponendo invariato il circuito in cui la pompa è inserita;
c) un accoppiamento in parallelo di due pompe uguali alla precedente e rotanti alla velocità di rotazione del punto a);
d) un accoppiamento in serie di due pompe uguali alla precedente e rotanti alla velocità di rotazione del punto a).

Dati:

$$\begin{array}{lll}
H = 85 - 2.2 \cdot 10^{-6}\dot{V}^2 & H = [m] & \dot{V} = [m^3/h] \\
P_1 = 1\ bar & P_2 = 2.5\ bar & \\
z_1 = 5\ m & z_2 = 15\ m & \\
Y_a = 5\dfrac{V_a^2}{2g} & Y_m = 15\dfrac{V_m^2}{2g} & \\
D = 350\ mm & NPSH_r = 5.5\ m & \\
\dfrac{P_v}{\rho g} = 0.7\ m & &
\end{array}$$

Soluzione:

a) É innanzitutto necessario determinare la curva caratteristica del circuito $H_c = H(\dot{V})$. Le tubazioni di aspirazione e mandata hanno lo stesso diametro e il fluido di lavoro è acqua (considerata un liquido perfetto); l'equazione di continuità implica dunque $V_a = V_m = V$. Inoltre la velocità è nulla nei serbatoi 1 e 2, perciò:

$$\begin{aligned}
H_c &= \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + (z_2 - z_1) + 5\frac{V^2}{2g} + 15\frac{V^2}{2g} \\
H_c &= \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + (z_2 - z_1) + \frac{20}{2g}\left(\frac{4\dot{V}}{\pi D^2}\right)^2 \\
H_c &= 110.23\dot{V}^2 + 25.29
\end{aligned}$$

In questa espressione la portata volumetrica $\dot{V}$ è espressa in m^3/s, mentre l'espressione analitica della curva caratteristica della pompa prevede $\dot{V} = [m^3/h]$. Il punto di funzionamento del sistema si ottiene dall'intersezione delle due caratteristiche (pompa e circuito) rese dimensionalmente omogenee. Si ha dunque, esprimendo $\dot{V} = [m^3/s]$ nella caratteristica della pompa:

$$\begin{cases} H(\dot{V}) = -2.2 \cdot 10^{-6} \cdot 3600^2 \dot{V}^2 + 85 = -28.51\dot{V}^2 + 85 \\ H_c(\dot{V}) = 110.23\dot{V}^2 + 25.29 \end{cases}$$

da cui il punto di funzionamento:

$$\begin{cases} \bar{\dot{V}} = 0.656 \ \ m^3/s \\ \bar{H} = 72.73 \ \ m \end{cases}$$

La quota di aspirazione massima a cui si può collocare la pompa per evitare cavitazione può essere calcolata imponendo la seguente condizione su NPSH:

$$NPSH_d \geq NPSH_r$$

dalla definizione di $NPSH_d$ per una pompa si ha:

$$NPSH_d = \frac{P_a}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} - \frac{P_v}{\rho g}$$

dove i pedici *a* e *m* si riferiscono alle flange di aspirazione e mandata della pompa. Dal bilancio di dell'energia meccanica scritta tra le sezioni *1* e *a* si ottiene il seguente risultato per z_a:

$$z_a \leq z_1 + \frac{P_1 - P_v}{\rho g} - \frac{Y_a}{g} - NPSH_r = -2.86 \ m$$

che mostra coma le pompa debba essere installata ad una quota inferiore rispetto al livello del suolo.

b) Seguendo la procedura descritta nell'esercizio 2, si determina innanzitutto la curva caratteristica della pompa in termini adimensionali, partendo dalla conoscenza della curva caratteristica dimensionale a velocità di rotazione n_a. Si determina poi la curva caratteristica dimensionale della pompa per $n_b = \frac{3}{4}n_a$ ed infine il punto di funzionamento dall'intersezione con la caratteristica del circuito che resta invariata.

$$\begin{aligned} H_a &= -28.51\dot{V_a}^2 + 85 \\ \Rightarrow \psi &= -28.51D^4\varphi^2 + \frac{85}{n_a^2 D^2} \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} H_b &= -28.51\dot{V_b}^2 + 85\left(\frac{n_b}{n_a}\right)^2 \\ \Rightarrow H_b &= -28.51\dot{V_b}^2 + 47.81 \end{aligned}$$

e il punto di funzionamento:

$$\begin{cases} H_b = & -28.51\dot{V_b}^2 + 47.81 \\ H_c = & 110.23\dot{V_b}^2 + 25.29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\dot{V_b}} = 0.403 \ m^3/s \\ \bar{H_b} = 43.18 \ m \end{cases}$$

c) Per il funzionamento delle pompe in parallelo è sufficiente osservare che le due pompe hanno la stessa prevalenza, che corrisponde anche alla prevalenza del sistema di pompe in parallelo, cioè $H_1 = H_2 = H_{parallelo}$; inoltre le due pompe sono identiche e operano alla stessa velocità di rotazione, perciò possiedono la medesima curva caratteristica. Di conseguenza $H_1 = H_2$ implica $\dot{V_1} = \dot{V_2}$ e, per l'equazione di continuità, $\dot{V}_{parallelo} = \dot{V_1} + \dot{V_2} = 2\dot{V_1}$.
Scrivendo dunque la curva caratteristica (invariata) di una delle due pompe in

parallelo (ad es la pompa 1) ed esprimendo H_1 e $\dot{V}_1$ in funzione di $H_{parallelo}$ e $\dot{V}_{parallelo}$ si ottiene:

$$H_1 = -25.81\dot{V}_1^{\,2} + 85 = -25.81\left(\frac{\dot{V}_{parallelo}}{2}\right)^2 + 85 = H_{parallelo}$$

l'ultima uguaglianza stabilisce una relazione funzionale tra $H_{parallelo}$ e $\dot{V}_{parallelo}$ e rappresenta dunque la curva caratteristica del sistema delle due pompe in parallelo. Si ha dunque per il sistema di pompe in parallelo:

$$H_{parallelo} = -7.13\dot{V}^2_{parallelo} + 85$$

Il punto di funzionamento del sistema è dato dall'intersezione tra la curva caratteristica del sistema di pompe in parallelo e quella del circuito:

$$\begin{cases} H_{parallelo} = -7.13\dot{V}^2_{parallelo} + 85 \\ H_c = 110.23\dot{V}^2_{parallelo} + 25.29 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \bar{H}_{parallelo} = 81.37\ m \\ \bar{\dot{V}}_{parallelo} = 0.713\ m^3/s \end{cases}$$

e il punto di funzionamento della singola pompa:

$$\begin{cases} \bar{H}_1 = \bar{H}_2 = \bar{H}_{parallelo} = 81.37\ m \\ \bar{\dot{V}}_1 = \bar{\dot{V}}_2 = \frac{1}{2}\bar{\dot{V}}_{parallelo} = 0.357\ m^3/s \end{cases}$$

d) Per il funzionamento delle pompe in serie è sufficiente osservare che le due pompe hanno la stessa portata, che corrisponde anche alla portata del sistema di pompe in serie, cioè $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}_{serie}$; inoltre le due pompe sono identiche e operano alla stessa velocità di rotazione, perciò possiedono la medesima curva caratteristica. Di conseguenza $\dot{V}_1 = \dot{V}_2$ implica $H_1 = H_2$ e dunque $H_{serie} = H_1 + H_2 = 2H_1$. Scrivendo dunque la curva caratteristica (invariata) di una delle due pompe in serie (ad es la pompa 1) ed esprimendo H_1 e $\dot{V}_1$ in funzione di H_{serie} e $\dot{V}_{serie}$ si ottiene:

$$H_1 = -25.81\dot{V}_1^{\,2} + 85 = -25.81\dot{V}^2_{serie} + 85 = \frac{H_{serie}}{2}$$

l'ultima uguaglianza stabilisce una relazione funzionale tra H_{serie} e $\dot{V}_{serie}$ e rappresenta dunque la curva caratteristica del sistema delle due pompe in serie. Si ha dunque per il sistema di pompe in serie:

$$H_{serie} = -57.02\dot{V}_{serie}^2 + 170$$

Il punto di funzionamento del sistema è dato dall'intersezione tra la curva caratteristica del sistema di pompe in serie e quella del circuito:

$$\begin{cases} H_{serie} = -57.02\dot{V}_{serie}^2 + 170 \\ H_c = 110.23\dot{V}_{serie}^2 + 25.29 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \bar{\dot{V}}_{serie} = 0.93\ m^3/s \\ \bar{H}_{serie} = 120.70\ m \end{cases}$$

e il punto di funzionamento della singola pompa:

$$\begin{cases} \bar{H}_1 = \bar{H}_2 = \frac{1}{2}\bar{H}_{serie} = 60.35\ m \\ \bar{\dot{V}}_1 = \bar{\dot{V}}_2 = \bar{\dot{V}}_{serie} = 0.93\ m^3/s \end{cases}$$