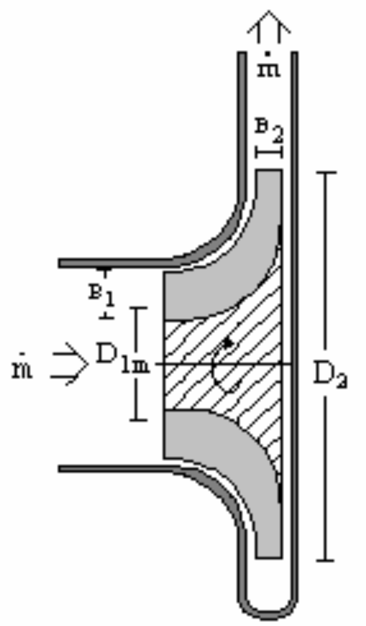
EQUAZIONE DI EULERO

Esercizio 1

Una pompa centrifuga opera in condizioni ideali. Sono assegnati:

n =1500 rpm Portata volumetrica $\dot{V}$=1000 m^3/h
Altezza pala scarico girante b_2 =20 mm Diametro scarico girante $D_2 = 300$ mm
Altezza pala ingresso girante b_1 =50 mm Diametro medio ingresso girante $D_{1m} = 150$ mm
Angolo relativo scarico girante $\beta_2 = 0°$

calcolare il lavoro specifico scambiato, utilizzando entrambe le formulazioni dell'equazione di Eulero.



Svolgimento:

Innanzitutto si converte il valore della portata volumetrica utilizzando unità di misura del S.I. (da m^3/h a m^3/s).

$$\dot{V} = \frac{1000}{3600} = 0.278 \ m^3/s$$

La velocità angolare è:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = 157 \ rad/s$$

In una macchina radiale (centrifuga in questo caso) si ha una variazione significativa della velocità periferica tra ingresso e uscita; in questo caso:

$$U_1 = \omega \cdot \frac{D_{1m}}{2} = 11.8 \ m/s$$

$$U_2 = \omega \cdot \frac{D_2}{2} = 23.5 \ m/s$$

Si noti che, in questo esercizio, non vengono fornite indicazioni sulle componenti meridiane di velocità. Vengono però indicate le altezze di pala in corrispondenza delle sezioni di ingresso e uscita dal rotore. Pertanto, l'area delle due sezioni può essere facilmente calcolata allo scopo di ottenere informazioni sulle componenti meridiane di velocità.

$$S_1 = \pi \cdot D_{1m} \cdot b_1 = 0.0235 \ m^2$$

$$S_2 = \pi \cdot D_2 \cdot b_2 = 0.0188 \ m^2$$

Di regola, una pompa centrifuga aspira il fluido da un condotto assiale, perciò (normalmente) non sono presenti componenti di velocità tangenziali né radiali all'ingresso del rotore; la velocità in questa sezione è dunque data semplicemente dalla componente assiale, che coincide (in questa sezione di ingresso) con la componente meridiana, ottenibile dalla portata volumetrica come segue:

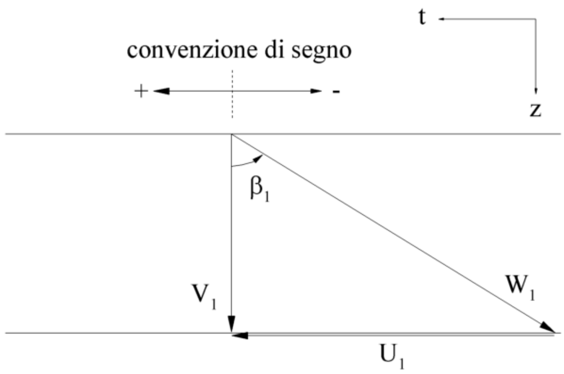
$$V_1 = V_{1z} = \frac{\dot{V}}{S_1} = \frac{\dot{V}}{\pi \cdot D_{1m} \cdot b_1} = 11.8 \ m/s$$

Il triangolo di velocità in ingresso è adesso completamente definito, essendo noto il vettore velocità assoluta in ingresso e la velocità periferica:

$$W_{1z} = V_{1z} = V_1 = 11.8 \ m/s$$

$$W_{1t} = V_{1t} - U_1 = -U_1 = -11.8\ m/s$$
$$W_1 = \sqrt{W_{1z}^2 + W_{1t}^2} = 16.7\ m/s$$
$$\beta_1 = atan(\frac{W_{1t}}{W_{1z}}) = -45°$$

Il triangolo di velocità in ingresso può essere disegnato nel piano blade-to-blade in ingresso come rappresentato in figura.



TRIANGOLI DI VELOCITA' INGRESSO

Lo scarico dalla girante avviene, nel sistema di riferimento relativo, in direzione puramente meridiana, poiché l'angolo relativo allo scarico è nullo $\beta_2 = 0°$. Nella macchina, centrifuga, la direzione meridiana evolve tra quella assiale in ingresso e quella radiale in uscita; perciò la direzione relativa della corrente allo scarico è puramente radiale uscente (macchina con pale radiali).

$$W_{2r} = |\vec{W}_2| = \frac{\dot{V}}{S_2} = 14.7\ m/s$$

si noti che il legame tra velocità meridiane in ingresso e in uscita è ottenuto applicando l'equazione di continuità (conservazione della portata massica) per un fluido incomprimibile. Questo è possibile, in questo problema, perché sono state assegnate le altezze di pala in ingresso e in uscita.
Il passaggio dal sistema di riferimento relativo a quello assoluto garantisce che le componenti meridiane di velocità relativa e assoluta sono uguali (essendo sempre nulla la componente meridiana della velocità periferica). Inoltre, $\beta_2 = 0°$ implica una componente tangenziale della velocità relativa nulla ($W_{2t} = 0\ m/s$); perciò,

nella sezione di uscita, la componente tangenziale della velocità assoluta è pari alla velocità periferica

$$V_{2r} = W_{2r} = 14.7 \ m/s$$

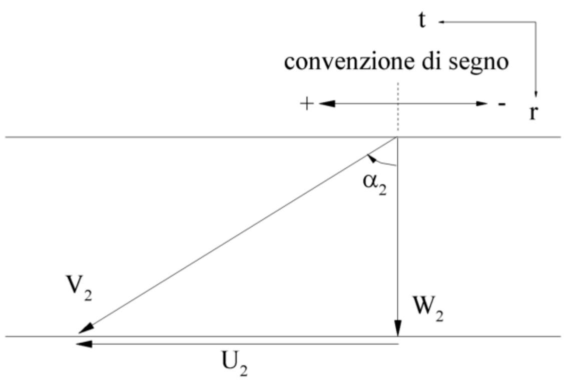
$$V_{2t} = W_{2t} + U_2 = U_2 = 23.5 \ m/s$$

Allo scarico della girante, l'angolo assoluto e il modulo della velocità assoluta sono:

$$\alpha_2 = atan(\frac{V_{2t}}{V_{2r}}) = 58°$$

$$V_2 = \sqrt{V_{2t}^2 + V_{2r}^2} = 27.8 \ m/s$$

Il triangolo di velocità all'uscita del rotore può essere disegnato come in figura.



TRIANGOLI DI VELOCITA' USCITA

Per la macchina in oggetto, la prima formulazione dell'equazione di Eulero risulta molto semplificata (nonostante la variazione della velocità periferica tra ingresso e uscita) dal fatto che la velocità assoluta in ingresso non ha componenti tangenziali. Conseguenza di ciò è che il momento della quantità di moto in ingresso è nullo e la sua variazione (e dunque lo scambio di energia meccanica) è semplicemente data dal momento della quantità di moto allo scarico. Infine, considerando che la componente tangenziale della velocità assoluta allo scarico è pari alla velocità periferica (pale radiali, ovvero$\beta_2 = 0°$), si ottiene:

$$l = U_2 V_{2t} - U_1 V_{1t} =$$
$$= U_2^2 = 554.5 \ J/kg$$

La seconda formulazione dell'equazione di Eulero fornisce invece:

$$l = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = 554.5 \;\; J/kg$$

nella quale possiamo distinguere il contributo dei diversi termini:

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = 316.8 \;\; J/kg$$

$$\frac{U_2^2 - U_1^2}{2} = 206.5 \;\; J/kg$$

$$-\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = 31.23 \;\; J/kg$$

Esercizio 2
Uno stadio di turbina assiale (costituito da uno statore seguito da un rotore) è caratterizzato dai seguenti triangoli di velocità:

$$V_1 = 150 \ m/s \quad U_1 = 100 \ m/s \quad V_z = cost, \alpha_1 = 74°, \beta_2 = -\beta_1$$

a) Dopo aver disegnato i triangoli di velocità in ingresso e uscita (al rotore), si calcoli il lavoro specifico scambiato usando le due formulazioni dell'equazione di Eulero.
b) Si consideri poi una schiera rotorica con differente geometria, che realizzi una accelerazione nel moto relativo tale che $|W_2| = 2|W_1|$ (e, conseguentemente $\beta_2 \neq -\beta_1$), mantenendo costante la componente meridiana di velocità. Si disegnino i nuovi triangoli di velocità, si calcoli il lavoro specifico scambiato (usando le due diverse formulazioni) e si confrontino i risultati (da un punto di vista energetico) con quelli del precedente punto a).

Svolgimento:

Nel caso di stadi di turbina è in genere impiegata la seguente nomenclatura:
• (0) sezione di ingresso statore;
• (1) uscita statore / ingresso rotore;
• (2) uscita rotore.

a)
A ingresso rotore il vettore velocità assoluta è noto, così come lo è la velocità periferica, perciò il triangolo di velocità è completamente definito:

$$V_{1z} = V_1 \cos\alpha_1 = 41.3 \ m/s$$

$$V_{1t} = V_1 \sin\alpha_1 = 144.2 \ m/s$$

$$W_{1z} = V_{1z} = 41.3 \ m/s$$

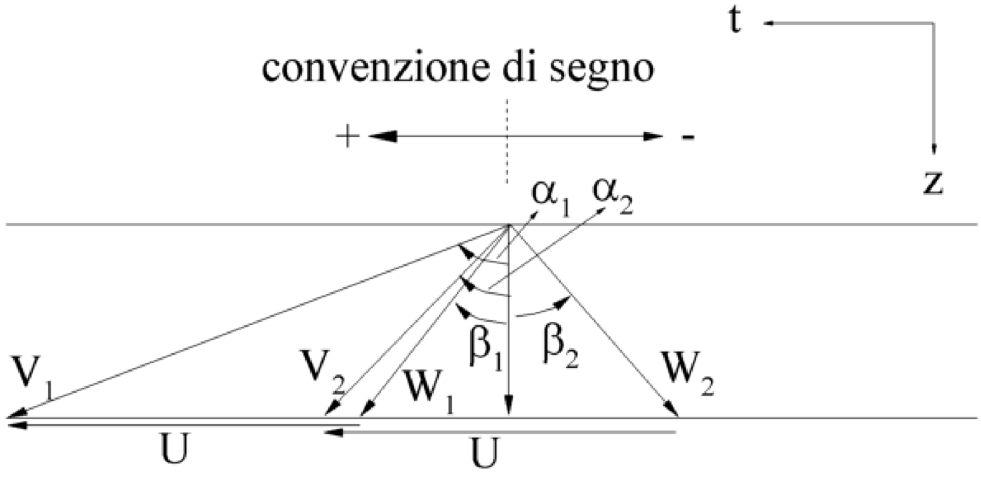
$$W_{1t} = V_{1t} - U = 44.2 \ m/s$$

$$W_1 = \sqrt{W_{1t}^2 + W_{1z}^2} = 60.5 \ m/s$$

$$\beta_1 = atan(\frac{W_{1t}}{W_{1z}}) = 46.9°$$

Allo scarico del rotore l'angolo relativo della corrente, la componente meridiana (costante) di velocità e la velocità periferica sono note; pertanto, anche qui il triangolo di velocità è definito:

$$\beta_2 = -\beta_1 = -46.9°$$



TRIANGOLI DI VELOCITA', CASO (a)

$$W_{2t} = -W_{1t} = -44.2\ m/s$$

$$W_{2z} = W_{1z} = 41.3\ m/s$$

$$V_{2t} = W_{2t} + U = 55.8\ m/s$$

$$V_{2z} = V_{1z} = 41.3\ m/s$$

$$V_2 = \sqrt{V_{2t}^2 + V_{2z}^2} = 69.5\ m/s$$

$$\alpha_2 = atan(\frac{V_{2t}}{V_{2z}}) = 53.5^\circ$$

$$W_2 = W_1 = 60.5\ m/s$$

Il lavoro specifico scambiato (lavoro euleriano) è perciò:

$$l = U_2 V_{2t} - U_1 V_{1t} = \\ = U \cdot (V_{2t} - V_{1t}) = -8840 \;\; J/kg$$

Applicando la seconda forma dell'equazione di Eulero (che indica separatamente i contributi delle diverse variazioni di energia cinetica) si ha:

$$l = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2}$$

In questo caso in ingresso e uscita dal rotore sono uguali tra loro sia le velocità periferiche ($U_1 = U_2$ poiché lo stadio è assiale) sia le velocità relative ($W_1 = W_2$, conseguenza del fatto che sono $\beta_2 = -\beta_1$ e $V_m = V_z = costante$); pertanto, per uno stadio con questa particolare configurazione, il lavoro specifico scambiato è pari soltanto alla variazione di energia cinetica assoluta tra ingresso e uscita rotore.

$$l = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = -8840 \;\; J/kg$$

b)

La geometria delle pale rotoriche viene modificata in modo tale da garantire $|W_2| = 2|W_1|$ (anziché $\beta_2 = -\beta_1$). Le componenti meridiane di velocità (assoluta e relativa) restano invece sempre costanti nello stadio. Il triangolo di velocità in ingresso resta ovviamente immutato, mentre quello all'uscita è determinato se viene calcolato l'angolo relativo allo scarico β_2:

$$|W_2| = 2|W_1| = 121 \;\; m/s$$

$$W_{2z} = V_{1z} = 41.3 \;\; m/s$$

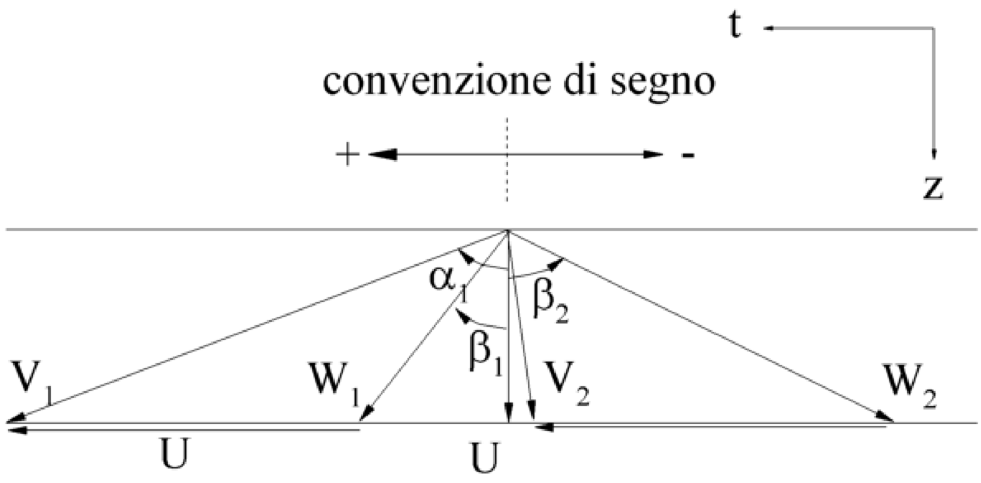
$$W_{2t} = -\sqrt{W_2^2 - W_{2z}^2} = -113.7 \;\; m/s$$

$$\beta_2 = atan(\frac{W_{2t}}{W_{2z}}) = -70.0°$$

$$V_{2t} = W_{2t} + U = -13.7 \;\; m/s$$

$$V_{2z} = V_{1z} = 41.3 \;\; m/s$$

$$\alpha_2 = atan(\frac{V_{2t}}{V_{2z}}) = -18.3°$$



TRIANGOLI DI VELOCITA', CASO (b)

$$V_2 = \sqrt{V_{2z}^2 + V_{2t}^2} = 43.5 \ m/s$$

Il lavoro specifico scambiato è dunque:

$$\begin{aligned} l &= U_2 V_{2t} - U_1 V_{1t} = \\ &= U \cdot (V_{2t} - V_{1t}) = -15790 \ J/kg \end{aligned}$$

Seconda formulazione:

$$l = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2}$$

tenuto conto del fatto che la velocità periferica è costante ($U_1 = U_2$), si ha:

$$l = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = -15790 \ J/kg$$

Questo è un risultato generale per una macchina puramente assiale. Il contributo dei due termini è il seguente:

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = -10303 \ \ J/kg$$

$$-\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = -5490 \ \ J/kg$$

Si noti infine, la differenza tra il lavoro specifico scambiato nei due casi: nel caso a), infatti, si ha una componente tangenziale residua della velocità assoluta all'uscita del rotore; essa è nello stesso verso della componente tangenziale di velocità in ingresso al rotore. Tale componente residua riduce la variazione del momento della quantità di moto attraverso il rotore e, dunque, il lavoro scambiato. Nel caso b) tale problema è risolto rendendo la corrente relativa allo scarico più tangenziale, in modo da rendere la velocità assoluta allo scarico quasi meridiana (assiale).

Con questa seconda geometria delle pale rotoriche si ottengono due vantaggi: (I) un elevato lavoro specifico scambiato e (II) una componente tangenziale della velocità assoluta allo scarico molto bassa, riducendo ulteriori perdite che si potrebbero avere nel canale a valle dello stadio. Tali perdite sono infatti legate all'energia cinetica assoluta della corrente scaricata dallo stadio che (a pari componente meridiana) è minima nel caso di scarico in direzione meridiana (qui assiale). Questo concetto, cui si fa comunemente riferimento come **perdite di energia cinetica allo scarico** è un aspetto cruciale per l'ottimizzazione degli stadi e l'energia cinetica allo scarico è un parametro di progetto molto importante per le turbine.