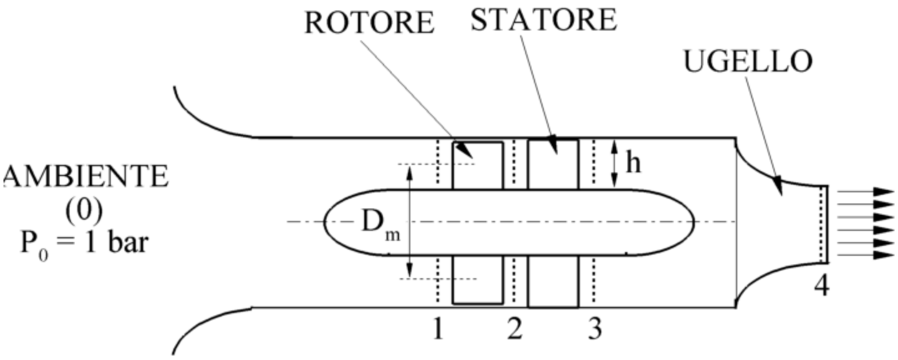
EQUAZIONE DI EULERO

Esercizio 1

Il rotore di un ventilatore assiale intubato, ha diametro un medio pari a 200 mm e un'altezza di pala pari a 50 $mm.$ Il ventilatore opera a velocità di rotazione di 3000 rpm e aspira dall'ambiente ($P = 1\ bar$) una portata volumetrica di 0.5 m^3/s di aria. **Assegnata una componente di velocità meridiana (assiale) costante attraverso il rotore**, una deflessione angolare di 20° (sempre nel rotore) e assumendo la trasformazione ideale (no attrito):
a) calcolare il lavoro specifico scambiato nella macchina;
b) calcolare l'incremento di pressione totale attraverso il rotore corrispondente a questo scambio di lavoro e la pressione totale P_{T2} a valle del rotore. (Considerate le ridotte velocità della corrente essa può essere assunta come incomprimibile con densità dell'aria costante e pari a $\rho = 1.2\ \ kg/m^3$);
c) se si posiziona uno statore a valle del rotore allo scopo di deflettere la corrente fino alla direzione puramente assiale (diffusore), si calcoli la pressione statica P_3 all'uscita dello statore;
d) se la corrente viene espansa fino alla pressione atmosferica, si calcoli la sezione di scarico del canale che realizza l'espansione (ugello).



SEZIONE MERIDIANA DEL VENTILATORE

Dati:

$$D_m = 0.2\ m \qquad n = 3000\ rpm \qquad \rho_{aria} = 1.2\ kg/m^3$$
$$h = 0.05\ m \qquad |\beta_1 - \beta_2| = 20° \qquad R_{aria} = 287\ J/kgK$$
$$P_0 = 1\ bar \qquad \dot{V} = 0.5\ m^3/s \qquad C_{P aria} = 1000\ J/kgK$$

Soluzione:

a)
Nota la velocità di rotazione e le dimensioni della macchina è possibile calcolare la velocità periferica al diametro medio:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = 314\ rad/s$$

$$U = \omega \cdot \frac{D_m}{2} = 31.4\ m/s$$

Si indichino, rispettivamente, con (1) e (2) le sezioni di ingresso e uscita dal rotore. La macchina aspira aria dall'ambiente tramite il canale di ingresso (cilindrico e non palettato), di conseguenza la velocità in ingresso è puramente assiale, perciò:

$$V_1 = V_{1z} = \frac{\dot{V}}{S_1} = \frac{\dot{V}}{\pi \cdot D_m \cdot h} = \ 15.91\ m/s$$

Il triangolo di velocità in ingresso è completamente definito da $\vec{V_1}$ e $\vec{U}$, da cui:

$$W_1 = \sqrt{U_1^2 + V_1^2} = 35.2 \;\; m/s$$

$$W_{1t} = -U = \;\; -31.4 \;\; m/s$$

Le componenti tangenziali di velocità vengono considerate positive se concordi con il verso della velocità periferica U e negative se opposte. L'angolo relativo in ingresso al rotore può essere ora calcolato semplicemente tramite le componenti delle velocità relativa:

$$\beta_1 = atan\frac{W_{1t}}{W_{1z}} = -63°$$

Il calcolo dell'angolo relativo in uscita al rotore è altrettanto semplice se si considera che nel rotore di un ventilatore assiale (macchina operatrice) la corrente, nel moto relativo, viene deflessa verso la direzione assiale; dunque:

$$|\beta_1 - \beta_2| = \beta_2 - \beta_1 = 20° \rightarrow \beta_2 = \beta_1 + 20 = -43°$$

Gli angoli sono misurati rispetto alla direzione meridiana (perciò variano nell'intervallo $\pm 90°$) assumendo il segno della corrispondente componente tangenziale di velocità.
Avendo assegnato V_z = cost., noti β_2 e $\vec{U}$, possiamo definire il triangolo di velocità in uscita al rotore:

$$W_2 = \frac{V_{1z}}{\cos\beta_2} = 21.8 \;\; m/s$$

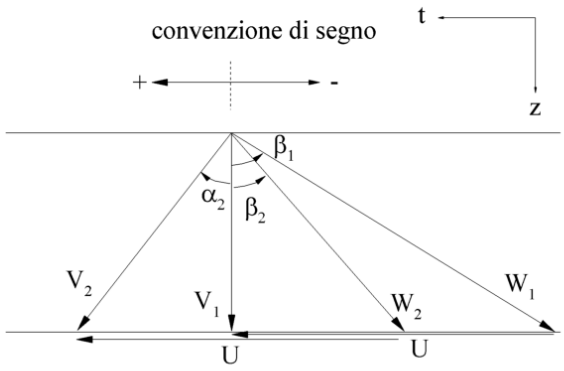
$$W_{2t} = W_2 \cdot \sin\beta_2 = -14.9 \;\; m/s$$

$$V_{2t} = U + W_{2t} = 31.4 - 14.9 = 16.5 \;\; m/s$$

$$V_{2z} = V_{1z} = V_1 = 15.91 \;\; m/s$$

$$V_2 = \sqrt{V_{2z}^2 + V_{2t}^2} = 23 \;\; m/s$$

$$\alpha_2 = atan\frac{V_{2t}}{V_{2z}} = 46°$$



RAPPRESENTAZIONE TRIANGOLI DI VELOCITA'

Infine applicando la relazione di Eulero per il lavoro specifico scambiato, ricordando che in una macchina assiale U è costante e che per il ventilatore in oggetto V_1 è puramente assiale, si ha:

$$\begin{aligned} w &= U_2 V_{2t} - U_1 V_{1t} = \\ &= U \cdot V_{2t} = 518.1 \ \ J/kg \end{aligned}$$

b)
Per calcolare l'incremento di pressione totale corrispondente al lavoro scambiato e la pressione totale P_{T2} allo scarico del rotore, è necessario calcolare la pressione totale P_{T1} in ingresso al rotore. Scrivendo il bilancio di energia meccanica tra le sezioni 0 (ambiente) e 1 (ingresso rotore) e considerando che la trasformazione è senza scambio di lavoro e senza perdite (no attrito), si deduce che la pressione totale si conserva nel canale di ingresso $0 - 1$.

$$\frac{P_0}{\rho} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_{T1}}{\rho}$$

In tal modo anche la pressione statica P_1 in ingresso al rotore può essere calcolata:

$$P_1 = P_0 - \frac{V_1^2}{2}\rho = 99848 \ \ Pa$$

Applicando ora il bilancio di energia meccanica tra ingresso 1 e uscita 2 rotore (dove si ha lavoro scambiato), si ottiene:

$$l - l_w = (\frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}) - (\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P_0}{\rho} + l - l_w = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} = \frac{P_{T2}}{\rho}$$

Nell'ipotesi di trasformazione ideale ($l_w = 0$), si trova che l'incremento di pressione totale è semplicemente proporzionale al lavoro scambiato, ovvero $P_{T2} - P_{T1} = P_{T2} - P_0 = \rho l$; la pressione totale all'uscita del rotore è dunque:

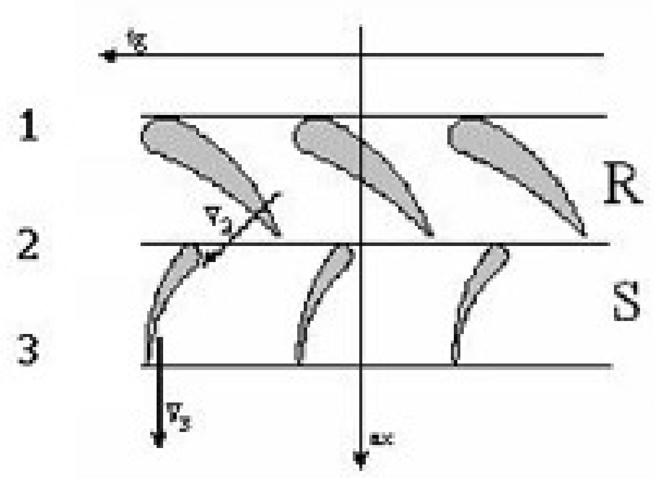
$$P_{T2} = P_0 + l \cdot \rho = 100621 \ \ Pa$$

c)
Lo statore a valle deflette la corrente in modo da renderla puramente assiale all'uscita dello stadio (sezione 3):

$$V_3 = V_{1z} = V_1 = 15.9 \ \ m/s$$

Scrivendo il bilancio di energia meccanica tra le sezioni 2 e 3 dove non si ha né lavoro scambiato ($l = 0$), né perdite per attrito ($l_w = 0$), si ha:

$$\frac{P_{T2}}{\rho} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} = \frac{P_3}{\rho} + \frac{V_3^2}{2} = \frac{P_{T3}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad P_3 = 100470 \ \ Pa$$



d)
Espandendo dalla sezione 3 fino a pressione atmosferica ($P_4 = P_0$) la corrente accelera (ugello). L'incremento di energia cinetica può essere ottenuto dal bilancio di energia meccanica tra le sezionoi 3 e 4, dove ancora si assume non esservi lavoro scambiato, né perdite; perciò:

$$\frac{P_{T3}}{\rho} = \frac{P_3}{\rho} + \frac{V_3^2}{2} = \frac{P_4}{\rho} + \frac{V_4^2}{2} = \frac{P_{T4}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_4^2}{2} = \frac{P_{T3}}{\rho} - \frac{P_0}{\rho}$$

L'area della sezione di uscita dell'ugello può essere calcolata dall'equazione di continuità per correnti incomprimibili (per cui si traduce nella conservazione della portata volumetrica):

$$\dot{V} = V_4 \cdot S \quad \Rightarrow \quad S = 0.0155 \ m^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot S}{\pi}} = 0.14 \ m$$