POLITECNICO
MILANO 1863

Politecnico di Milano

Corso di Laurea in Ing. Meccanica

Esame di Misure Meccaniche e Termiche

Prof. Emanuele Zappa

Eserciziario incertezza di misura

Esercizi risolti provenienti da esercitazioni e temi d'esame

Prof. Emanuele Zappa

Manuale d’uso

Questo eserciziario sull’incertezza di misure è da costituito principalmente da una collezione di esercizi provenienti da temi d’esame del corso di Misure Meccaniche e Termiche degli anni precedenti.

Le soluzioni degli esercizi sono più o meno dettagliate, cioè alcune contengono soltanto formule risolutive e risultati numerici, mentre altre contengono una spiegazione dettagliata del procedimento di risoluzione. Tale scelta è necessaria per permettervi di apprendere la materia con il giusto grado di autonomia.

In ogni caso, è bene ricordare che questo eserciziario è un ausilio alla preparazione dell’esame, perciò non sostituisce le lezioni e le esercitazioni, ma le affianca. Si raccomanda perciò di non trascurare lo studio degli aspetti teorici dell’analisi di incertezza.

Le soluzioni degli esercizi sono state scritte da esseri umani, perciò è possibile che qualche errore sia sfuggito al nostro controllo. Perciò si raccomanda di segnalare la presenza di errori o refusi al fine di correggerli e migliorare la qualità del materiale proposto.

Parte 1 – Esercizi svolti da esercitazioni

Esercizio 1
Sono state eseguite n = 12 misurazioni di una resistenza ottenendo i valori riportati nella tabella seguente:

n	**R [Ω]**
1	99.98
2	99.93
3	100.23
4	100.09
5	100.20
6	99.98
7	99.93
8	100.20
9	99.90
10	100.03
11	100.06
12	99.94

Determinare la misura della resistenza.

Soluzione

La miglior stima del misurando è data dal valore medio dei risultati delle misurazioni:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n} = \frac{1200.47}{12} = 100.039\Omega$$

Lo scarto tipo sperimentale si ottiene calcolando la deviazione standard:

$$s(R) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2} = \sqrt{\frac{1}{11}(151.29 \cdot 10^{-3})} = 11.73 \cdot 10^{-2}\,\Omega$$

L'incertezza tipo assoluta (scarto tipo della media) è calcolabile come:

$$u_R = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{11.73 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{12}} = 3.39 \cdot 10^{-2}\,\Omega$$

La misura della resistenza è quindi: 100.04 ± 0.03 Ω (mi adeguo alla risoluzione dello strumento).

Esercizio 2

Si misurano i lati di un blocchetto di alluminio con un calibro ventesimale. Si ottengono i valori 10.35 mm, 2.20 mm, 3.85 mm. Determinare la misura del volume del blocchetto.

Soluzione

Il volume del blocchetto vale: $V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 = 10.35 \cdot 2.20 \cdot 3.85 = 87.66\ mm^3$

Essendo richiesta la misura del volume, è necessario calcolare anche l'incertezza combinata.

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial l_1} \cdot u_{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial l_2} \cdot u_{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial l_3} \cdot u_{l_3}\right)^2} = \sqrt{\left[(l_2 \cdot l_3) \cdot u_{l_1}\right]^2 + \left[(l_1 \cdot l_3) \cdot u_{l_2}\right]^2 + \left[(l_1 \cdot l_2) \cdot u_{l_3}\right]^2}$$

L'incertezza associata alle misure effettuate con il calibro, avendo a disposizione una singola misura, è calcolabile come incertezza di tipo B. La risoluzione del calibro ventesimale è pari a 0.05 mm. Pertanto l'incertezza associata alle singole misure è pari a:

$$u_{l_1} = u_{l_2} = u_{l_3} = \frac{0.05mm}{2\sqrt{3}} = 0.0144mm$$

L'incertezza combinata vale dunque:

$$u_V = \sqrt{(2.20 \cdot 3.85 \cdot 0.014)^2 + (10.35 \cdot 3.85 \cdot 0.014)^2 + (10.35 \cdot 2.20 \cdot 0.014)^2} = 0.67\ mm^3$$

Dunque la misura del volume: $V = 87.7 \pm 0.7\ mm^3$

Esercizio 3

Si riportano in tabella i risultati di una serie di misure effettuate con un dinamometro su uno stesso misurando in condizioni note e ripetibili:

[N]	10.5	10.0	9.7	9.2	10.3	9.5	10.1	10.3	9.7	9.9	9.8	10.2	10.4	9.6	10.1

In seguito si utilizza lo stesso strumento per misurare il medesimo misurando, ma in condizioni differenti; si riportano le misure in tabella:

[N]	10.4	10.3	9.7	9.9	10.1	10.0

Si determini il valore delle due misure secondo la norma UNI 4546. In seguito si esprimano le misure con livelli di confidenza pari al 95% e al 99%.

Soluzione

Per il misurando 1:

$n_1 = 15$

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} x_i = 9.953\,N$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n_1 - 1}} = 0.368\,N$$ (deviazione standard del campione)

$$u_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n_1}} = \frac{0.37}{\sqrt{15}} = 0.095\,N$$ (deviazione standard della media)

misura: 10.0 ± 0.1 N

Per l'incertezza estesa, essendo la cardinalità del campione superiore a 10, possiamo utilizzare l'approssimazione gaussiana.

Per un LC pari al 95%, il relativo quantile è $z_{0.975} = 1.96$, quindi:

misura: 10.0 ± 0.2 N (LC 95%, fc 1.96)

Per un LC pari al 99%, il relativo quantile è $z_{0.995} = 2.58$, quindi:

misura: 10.0 ± 0.3 N (LC 99% fc 2.58)

Per il misurando 2:

$n_2 = 6$

$$\bar{x} = \frac{1}{n_2} \cdot \sum_{i=1}^{n_2} x_i = 10.07\, N$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_2} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n_2 - 1}} = 0.258\, N$$ (deviazione standard del campione)

$$u_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n_2}} = \frac{0.26}{\sqrt{6}} = 0.105\, N$$ (deviazione standard della media)

misura: 10.1 ± 0.1 N

Per l'incertezza estesa, essendo la cardinalità del campione inferiore a 10, dobbiamo riferirci alla distribuzione t-Student, con $\nu = n_2 - 1 = 5$.

Per un LC pari al 95%, il relativo quantile è $t_{5;\,0.975} = 2.57$, quindi:

misura: 10.1 ± 0.3 N (LC 95% fc 2.57)

Per un LC pari al 99%, il relativo quantile è $t_{5;\,0.995} = 4.03$, quindi:

misura: 10.1 ± 0.4 N (LC 99% fc 4.03)

Esercizio 4

Si misura la pressione interna di un recipiente mediante un manometro di fondoscala pari a 1 MPa, la cui risoluzione è pari a 1/1000 del fondoscala. Sia la lettura pari a 100 kPa, si esprima la relativa misura. Si esprima quindi la misura con un livello di confidenza del 95% e del 99%.

Soluzione

$$u = \frac{ris}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} = 0.29\, kPa$$

misura: 100.00 ± 0.29 kPa

Il fattore di copertura per la distribuzione rettangolare al 95% è pari a 1.65:

misura: 100.00 ± 0.48 kPa

Il fattore di copertura per la distribuzione rettangolare al 99% è pari a 1.71:

misura: 100.00 ± 0.50 kPa

Nota: A fattori di copertura maggiori di 1.73 sono invece associati livelli di confidenza superiori al 100%.

Esercizio 5

La velocità di un proiettile viene ottenuta da un pendolo balistico tramite la relazione $V = \frac{K \cdot \vartheta}{m}$. Da una prova si è misurato un angolo di θ=5.56° con un misuratore angolare avente uno scarto tipo di ripetibilità di 0.0078°. E’ noto inoltre che i proiettili hanno massa nominale 0.17 kg e uno scarto tipo 1% e K vale 5000 gms^{-1}rad^{-1}. Scrivere la misura della velocità.

Soluzione

La velocità si calcola: $V = \frac{K\vartheta}{m} = \frac{5000 \cdot 10^{-3} kgms^{-1}rad^{-1} 5.56 \frac{\pi}{180} rad}{0.17kg} = 2.854 m/s$

Essendo richiesta la misura della velocità è necessario indicare l’incertezza associata.
L’incertezza è calcolabile come combinata.
Si procede applicando la definizione di incertezza combinata:

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \cdot u_\vartheta\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial m} \cdot u_m\right)^2 +} = \sqrt{\left[\left(\frac{K}{m}\right) \cdot u_\vartheta\right]^2 + \left[\left(\frac{-K\vartheta}{m^2}\right) \cdot u_m\right]^2}$$

Le singole incertezza valgono:

$$\left.\begin{array}{l} u_\vartheta = 0.0078° \\ u_m = 0.17kg \cdot 0.01 = 0.0017kg \end{array}\right\} \Rightarrow u_V = \sqrt{\left(\frac{5000 \cdot 10^{-3} kgms^{-1}rad^{-1} \cdot 0.0078 \frac{\pi}{180} rad}{0.17kg}\right)^2 + \left(\frac{-5000 \cdot 10^{-3} kgms^{-1}rad^{-1} \cdot 5.56 \cdot \frac{\pi}{180} rad \cdot 0.0017kg}{(0.17kg)^2}\right)^2} = 0.029$$

La misura della velocità è: $V = 2.854 \pm 0.029 m/s$

Esercizio 6

Da 100 misurazioni ripetute del tempo di transito tra due sensori si ricava la velocità di un componente di una macchina. Noto che i sensori sono posti a una distanza di 36.6 cm, misurata con nastro metallico di risoluzione 1 mm, e che le misure di tempo hanno fornito un valore medio di 5.86934 s e uno scarto tipo di 0.002579 s, si scriva la misura della velocità quando si desideri un livello di confidenza del 95%.

Soluzione

Le velocità si calcola come*:*

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{36.6 \cdot 10^{-2}}{5.86934} = 0.062358\,\frac{m}{s}$$

Essendo richiesta la misura della velocità, è necessario esprimere l'incertezza associata.
Si procede applicando la definizione di incertezza combinata.

$$u_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial d} \cdot u_d\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \Delta t} \cdot u_{\Delta t}\right)^2}$$

Le incertezze sulla distanza e sul tempo sono:

$$u_d = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{2\sqrt{3}} = 0.00029m$$

$$u_{\Delta t} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.002578}{\sqrt{100}} = 0.00026s$$

Le derivate parziali valgono:

$$\frac{\partial v}{\partial d} = \frac{1}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \Delta t} = \frac{-d}{\Delta t^2}$$

L'incertezza combinata vale allora:

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{1}{5.86934} \cdot 0.00029\right)^2 + \left(\frac{-36.6 \cdot 10^{-2}}{5.86934^2} \cdot 0.00026\right)^2} = 0.000049\,\frac{m}{s}$$

L'incertezza estesa con livello di confidenza del 95% risulta:

$$u_{v95} = 2 * u_v = 0.000098m/s$$

La misura della velocità è dunque: $(6.2358 \pm 0.0098) \cdot 10^{-2} m/s$

Esercizio 7

Si ipotizzi che in una particolare misurazione di temperatura mediante termocoppia tutte le incertezze siano trascurabili, tranne quella strumentale. Ne consegue che la varianza della popolazione delle misure è influenzata unicamente dalla qualità dello strumento.
Si ipotizzi quindi che la varianza della popolazione delle misure sia pari a 2 °C^2; si calcoli il numero minimo di misurazioni da effettuare affinché la misura con un livello di confidenza pari al 95% sia caratterizzata da un intervallo massimo pari a 1 °C.

Soluzione

Ipotizzo dapprima che il numero di misure sia sufficiente per l’utilizzo dell’approssimazione gaussiana, quindi k = 1.96.
Deve valere:

$$1 \geq 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

cioè:

$$n \geq 30.7$$

quindi:

$n_{min} = 31$

Siccome 31 > 10, l’approssimazione gaussiana è lecita.

Esercizio 8

Si misura la pressione interna ad un recipiente mediante quattro diversi manometri: si riportano le misure (incertezza fornita come scarto tipo σ):

$$A : 128 \pm 3\, kPa$$
$$B : 134 \pm 1\, kPa$$
$$C : 132 \pm 2\, kPa$$
$$D : 142 \pm 1\, kPa$$

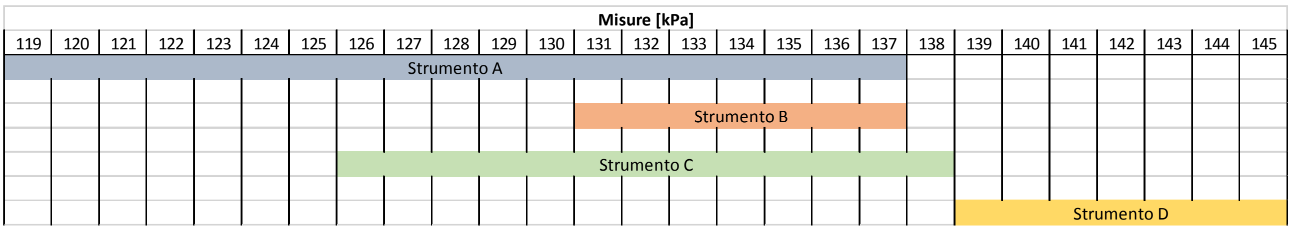
Effettuare la verifica di compatibilità con fattore di copertura pari a 3.

Soluzione

La verifica si effettua con un fattore di copertura pari a 3.

	[kPa]					Fattore di copertura	3
Strumento	Misura	scarto	Semiampiezza	Limite inferiore	Limite superiore		
A	128	3	9	119	137		
B	134	1	3	131	137		
C	132	2	6	126	138		
D	142	1	3	139	145	non compatibile	

Per visualizzare meglio la compatibilità, è utile verificare le intersezioni fra gli strumenti con il diagramma di compatibilità:



Dal grafico di compatibilità si evince che il campo di definizione delle misure dello strumento D non interseca quello degli altri 3 strumenti. Ne consegue che D non è compatibile con A,B,C che sono, invece, tra di loro compatibili.

Esercizio 9

Per la progettazione di un riduttore si vuole garantire che l'accoppiamento albero-ruota dentata avvenga senza forzamento (interferenza nulla) per il 98% dei pezzi prodotti.
L'albero è lavorato di tornitura e la tolleranza di lavorazione (espressa come deviazione standard del diametro) è pari a 0.04mm. La ruota dentata è acquistata a catalogo e il diametro interno è uguale a 49.87mm con una deviazione standard 0.03mm.
Quanto deve valere il diametro nominale dell'albero per garantire l'accoppiamento con la percentuale di successo richiesta?

Soluzione

Abbiamo a che fare con due variabili aleatorie (distribuite secondo una PDF normale), la misura dell'albero M_a e quella del foro M_f:

$$M_a = \begin{cases} \sigma_a = 0.04mm \\ \mu_a = ? \end{cases} \qquad M_f = \begin{cases} \sigma_a = 0.03mm \\ \mu_a = 49.87mm \end{cases}$$

La variabile aleatoria che vogliamo misurare è l'interferenza di montaggio definita come:

$$I = M_a - M_f$$

Se l'interferenza è maggiore di zero ho montaggio con forzamento. Se minore di zero ho gioco. Dal punto di vista statistico l'interferenza è caratterizzata da media $\mu_I = \mu_a - \mu_f$ e da deviazione standard σ_I (ricavata con la formula di propagazione dell'incertezza).

$$\sigma_I = \sqrt{(\sigma_a)^2 + \left(\sigma_f\right)^2} = 0.05mm.$$

La richiesta è di garantire che il 98% dei pezzi prodotti si monti senza interferenza, quindi significa assegnare un valore medio del diametro dell'albero che posizioni la campana della PDF di I abbastanza distante dall'asse dello zero. Prendendo le tabelle calcoliamo un adeguato fattore di copertura:

$$\alpha_{98\%} = F_Z^{-1}(0.99) = 2.33$$

Da cui discende che il 98% dei pezzi avrà interferenza inclusa fra:

$$I_{98} = [\mu_I - \alpha_{98\%}\sigma_I; \mu_I + \alpha_{98\%}\sigma_I] = [\mu_I - 0.12; \mu_I + 0.12]$$

Ovviamente vogliamo che il punto superiore dell'intervallo I_{98} sia posizionato sullo zero (ultimo punto di montaggio senza interferenza), quindi:

$$\mu_I + 0.12 = 0 \rightarrow \mu_I = -0.12 \rightarrow \mu_a = \mu_f - 0.12mm = 49.75mm$$

Esercizio 10

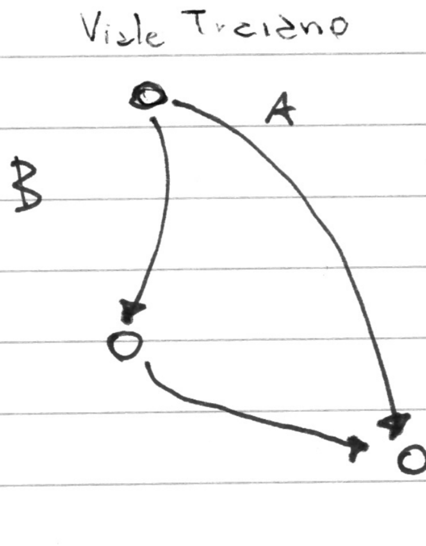
Per andare da Viale Traiano a Parco della Vittoria si hanno a disposizione 2 soluzioni:

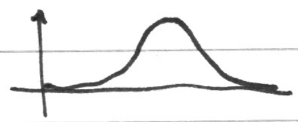
A. Prendere un treno diretto che percorre la distanza fra i due luoghi in 18 min con una deviazione standard di 2 min
B. Prendere la metropolitana rossa fino a Vicolo Corto (percorrenza 6 min con una deviazione standard di 30 s), cambiare linea e prendere la metropolitana gialla fino a Parco della Vittoria (percorrenza 8 min con una deviazione standard di 30 s). Il cambio di linea si effettua sulla stessa banchina e il tempo di attesa massimo per la coincidenza è 5 min.

Si chiede di stimare il tempo di arrivo a destinazione nei due casi con un livello di confidenza del 95%. Inoltre si calcoli la probabilità di arrivare in ritardo per entrambi i casi, sapendo che debbo trovarmi a Parco della Vittoria in 20 minuti.

Suggerimento: qualsiasi tempo di interscambio fra la linea rossa e gialla compreso fra 0 e 5 min è equiprobabile.

Esercizio 10





$\mu_A = 18$ min $\sigma_A = 2$ min

Per il tragitto B ho:

$$t_B = t_{B1} + t_{B2} + t_{B3}$$

$$t_{B1} \begin{cases} \mu_{B1} = 6 \text{ min} \\ \sigma_{B1} = 0{,}5 \text{ min} \end{cases}$$

$$t_{B2} \begin{cases} \mu_{B2} = 2{,}5 \text{ mi} \\ \sigma_{B2} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \end{cases}$$

$$t_{B3} \begin{cases} \mu_{B3} = 8 \text{ min} \end{cases}$$

Per i due tragitti ho medie e dev.
cercare i coefficienti di copertura ipoti

$$q_{95\%} = F_Z^{-1}(0,975) = 1,96$$

Quindi rivedo i tempi

- TRAGITTO A

$$t_A = \mu_A \pm q_{95} \cdot \sigma_A = 18 \pm 4 \text{ min}$$

- TRAGITTO B

$$t_B = \mu_B \pm q_{95} \cdot \sigma_B = 16,5 \pm 3 \text{ min}$$

Esprimiamo ora il ritardo R pe

$$R_A \begin{cases} \mu_{R_A} = \mu_A - 20 = -2 \text{ min} \\ \sigma_{RA} = \sigma_A = 2 \text{ min} \end{cases}$$

Per risolvere gli integrali uso le
Devo trovare il valore di Z per x=

$$z_{0A} = \frac{0 - \mu_{RA}}{\sigma_{RA}} = \frac{0 - (-2)}{2} = 1$$

$$z_{0B} = \frac{0 - \mu_{RB}}{\sigma_{RB}} = \frac{0 - (-3,5)}{1,6} = 2,187$$

$$\int_{-\infty}^{0} f_{RA}(x)\, dx = F_Z(z_{0A}) = 0,84$$

$$\int_{-\infty}^{0} f_{RB}(x)\, dx = F_Z(z_{0B}) = 0,9857$$

Quindi trovo la probabilità di ri

Parte 2 – Esercizi svolti da temi d’esame

Esercizio 11

Si vuole misurare l'accelerazione a_C di un corpo lungo una slitta attuata da un pistone idraulico che imprime una forza costante al corpo stesso (che quindi si muove con moto uniformemente accelerato). La slitta ha una corsa di lunghezza $L = 0.490\ m$, misurata con un metro avente risoluzione $\tilde{r} = 5\ mm$. Vengono eseguite 11 prove e si registrano i seguenti tempi di percorrenza della slitta t_S (cioè i tempi con cui il corpo ha percorso la lunghezza L):

$t_S[s]$	0,222	0,193	0,195	0,193	0,191	0,199	0,197	0,199	0,202	0,198	0,191

Esprimere il valore dell'accelerazione a_C con un livello di confidenza del 95%.

N.B. La legge di moto di un corpo uniformemente accelerato è $x(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2$

Soluzione

L'espressione dell'accelerazione è:

$$a_c(L, t_S) = \frac{2L}{{t_S}^2}$$

Per propagare l'incertezza derivo:

$$\frac{\partial a_c}{\partial L} = \frac{2}{{t_S}^2}; \quad \frac{\partial a_c}{\partial t_S} = 2L \cdot -\frac{2}{{t_S}^3} = -\frac{4L}{{t_s}^3}$$

Da cui si ricava l'espressione dell'incertezza sull'accelerazione:

$$u_a = \sqrt{\left(\frac{2}{{t_S}^2} \cdot u_L\right)^2 + \left(\frac{4L}{{t_S}^3} \cdot u_{t_S}\right)^2}$$

Non resta che ricavare valore medio e incertezza per tempo di percorrenza e lunghezza. Per la lunghezza:

$$u_L = \frac{5}{2\sqrt{3}} = 1.443\ mm$$

Per il tempo di percorrenza utilizziamo gli 11 dati a disposizione:

$$\bar{X}_{t_s} = 0{,}19818\ s; \qquad S(t_s) = 0{,}00867\ s$$

Calcoliamo l'incertezza come la deviazione standard della media:

$$u_{t_s} = \frac{S(t_s)}{\sqrt{11}} = 0.00261\ s$$

A questo punto abbiamo tutto per calcolare u_a:

$$u_a = \sqrt{\left(\frac{2}{0{,}19818^2} \cdot 1{,}443{\times}10^{-3}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 0{,}490}{0{,}19818^3} \cdot 0.00261\right)^2} = 0.6613\ \frac{m}{s^2}$$

Quindi il valore atteso di accelerazione:

$$\bar{X}_a = 24.952\ \frac{m}{s^2}$$

Va calcolato il fattore di copertura per l'incertezza estesa:

$$\alpha_{95\%} = F_Z^{-1}(0.975) = 1{,}96$$

Da cui

$$u_e^{95} = 1{,}96 \cdot u_a = 1.2961\ \frac{m}{s^2}$$

E' quindi possibile scrivere il risultato:

$$a_c = 24.95 \pm 1.30\ \frac{m}{s^2}$$

Esercizio 12

Per calcolare l'altezza di un ponte si lancia un sasso e ne si registra il tempo impiegato per arrivare a terra. Vengono raccolti i seguenti rilievi cronometrici del tempo di caduta t_f:

$t_f\ [s]$	2,102	1,943	1,952	1,999	2,183	1,912	2,135	2,045	1,967	1,942	2,080

Esprimere l'altezza del ponte *h* con un livello di confidenza del 96% sapendo che la costante di accelerazione gravitazionale vale $g = 9.806 \pm 0.015\ m/s^2$ (nota con un incertezza tipo A).

N.B. La legge di moto di un corpo uniformemente accelerato è $x(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2$.

Soluzione

L'espressione dell'altezza è:

$$h(g, t_f) = \frac{g}{2} \cdot t_f{}^2$$

Per propagare l'incertezza derivo:

$$\frac{\partial h}{\partial g} = \frac{t_f{}^2}{2}; \quad \frac{\partial h}{\partial t_f} = \frac{g}{2} \cdot 2t_f = gt_f$$

Da cui si ricava l'espressione dell'incertezza sull'altezza dell'edificio:

$$u_h = \sqrt{\left(\frac{t_f{}^2}{2} \cdot u_g\right)^2 + \left(gt_f \cdot u_{t_f}\right)^2}$$

Non resta che ricavare valore medio e incertezza per tempo dicaduta e accelerazione di gravità. Per g è presto fatto perché già nota come incertezza di tipo A:

$$u_g = 0.015\frac{m}{s^2}$$

Per il tempo di caduta utilizziamo gli 11 dati a disposizione:

$$\bar{X}_{t_f} = 2{,}0236\ s; \quad S(t_f) = 0{,}0906\ s$$

Calcoliamo l'incertezza come la deviazione standard della media:

$$u_{t_f} = \frac{S(t_f)}{\sqrt{11}} = 0.0273\ s$$

A questo punto abbiamo tutto per calcolare u_h:

$$u_h = \sqrt{\left(\frac{2{,}0236^2}{2} \cdot 0.015\right)^2 + (9.806 \cdot 2{,}0236 \cdot 0.0273)^2} = 0{,}5426\ m$$

Quindi il valore atteso di altezza h:

$$\bar{X}_h = 20.078\ m$$

Va calcolato il fattore di copertura per l'incertezza estesa:

$$\alpha_{96\%} = F_z^{-1}(0.98) = 2{,}05$$

Da cui

$$u_e^{96} = 2{,}05 \cdot u_h = 1.1123\ m$$

E' quindi possibile scrivere il risultato:

$$h = 20.08 \pm 1.11\ m$$

Esercizio 13

Per fini di controllo qualità, è necessario verificare sperimentalmente la costante eleastica k di una molla. Per fare ciò si decide di imporre una contrazione $\Delta x = 15\ mm$ nota (distanza misurata con calibro avente risoluzione di 0,1 mm) e di misurare con un dinamometro la forza F necessaria ad imporre lo spostamento.

L'operazione viene ripetuta 9 volte e vengono registrati i seguenti valori di forza F:

611,12	609,08	609,38	609,91	609,48	610,31	610,01	610,13	610,48

Utilizzando i dati forniti si richiede di:

- Calcolare l'incertezza nella misura di Δx e F
- Fornire la costante elastica della molla con un livello di confidenza del 95%.

Soluzione

La risoluzione del calibro vale 0.1mm. Ne consegue che l'incertezza di misura (tipo B) vale:

$$u_{\Delta x} = \frac{0.1}{2\sqrt{3}} = 0.029\ mm$$

Utilizzando i dati, si calcola:

$$\begin{cases} \bar{X}_F = 601\ N \\ S(F) = 0.623\ N \end{cases}$$

Da cui:

$$u_F = \frac{S(F)}{\sqrt{N}} = 0.207\ N$$

L'espressione della costante elastica è:

$$k(F, \Delta x) = \frac{F}{\Delta x}$$

Propagando l'incertezza ottengo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial k}{\partial F} = \dfrac{1}{\Delta x} \\ \dfrac{\partial k}{\partial \Delta x} = -\dfrac{F}{\Delta x^2} \end{cases}$$

Da cui:

$$u_k = \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x} \cdot u_F\right)^2 + \left(\frac{F}{\Delta x^2} \cdot u_{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{(0.067 \cdot 0.207)^2 + \left(\frac{601}{15^2} \cdot 0.029\right)^2} = 0.081\frac{N}{mm}$$

Mentre:

$$\bar{X}_k = \frac{601}{15} = 40.07\frac{N}{mm}$$

Essendoci solo 9 misure, è opportuno selezionare un fattore di copertura dalla distribuzione Student's T:

$$\alpha_{95\%} = F_z^{-1}(0.975,8) = 2.306 \rightarrow u_e = u_k \cdot 2.306 = 0.187\frac{N}{mm}$$

Per cui la misura di rigidezza vale:

$$k = 40.1 \pm 0.2\frac{N}{mm}$$

Esercizio 14

Un serbatoio in pressione di altezza h, è riempito di olio minerale avente densità $\rho = 780\,\frac{kg}{m^3}$. Il fluido è mantenuto alla pressione P_1. In fondo al serbatoio c'è un ugello che scarica a pressione ambiente P_0. In questo caso la velocità di uscita U del liquido all'apertura dell'ugello vale:

$$U = \sqrt{2\left(\frac{P_1 - P_0}{\rho} + gh\right)}$$

Per stimare la velocità di uscita vengono misurate le seguenti quantità:

- $P_1 = 200\ kPa$ con un trasduttore di pressione affetto da incertezza di tipo A pari a $3{,}16\ kPa$
- $P_0 = 103\ kPa$ con un barometro avente risoluzione pari a $2{,}5\ kPa$
- $h = 15\ m$ con un decametro avente risoluzione pari a $0{,}1\ m$

Si richiede di esprimere la misura della velocità di uscita U, nell'ipotesi di considerare ρ e g (accelerazione di gravità) come costanti prive di incertezza.

Soluzione

Per prima cosa calcoliamo l'incertezza relativa agli strumenti con risoluzione finita:

$$u_{P_0} = \frac{2{,}5}{2\sqrt{3}} = 0{,}722\ kPa; \qquad u_h = \frac{0{,}1}{2\sqrt{3}} = 0{,}029\ m$$

A questo punto posso propagare l'incertezza:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial P_0} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2P_1}{\rho} - \dfrac{2P_0}{\rho} + 2gh\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{2}{\rho} = -Q \cdot \dfrac{1}{\rho} \\ \dfrac{\partial U}{\partial P_1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2P_1}{\rho} - \dfrac{2P_0}{\rho} + 2gh\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{2}{\rho} = -Q \cdot \dfrac{1}{\rho} \\ \dfrac{\partial U}{\partial h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2P_1}{\rho} - \dfrac{2P_0}{\rho} + 2gh\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2g = Q \cdot g \end{cases}$$

È quindi possibile stimare l'incertezza sulla misura della velocità:

$$u_U = \sqrt{\left(\frac{Q}{\rho} u_{P_0}\right)^2 + \left(\frac{Q}{\rho} u_{P_1}\right)^2 + (Qg \cdot u_h)^2} = Q\sqrt{\frac{1}{\rho^2}\left({u_{P_0}}^2 + {u_{P_1}}^2\right) + (g \cdot u_h)^2}$$

$$Q = \left(\frac{2P_1}{\rho} - \frac{2P_0}{\rho} + 2gh\right)^{-\frac{1}{2}} = (512.8 - 264.1 + 294)^{-\frac{1}{2}} = 0.0429$$

Da cui:

$$u_U = 0.0429\sqrt{\frac{1}{780^2}(722^2 + 3160^2) + (9{,}81 \cdot 0{,}1)^2} = 0.0429\sqrt{17.27 + 0.962} = 0{,}183\,\frac{m}{s}$$

Per cui la misura della velocità diventa:

$$U = 23{,}30 \pm 0{,}18\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 15

Un tubo di Pitot permette di calcolare la velocità di un fluido secondo la seguente formula (dove P_t è la pressione totale, P_0 la pressione statica e ρ la densità del fluido)

$$v = \sqrt{2\frac{P_t - P_0}{\rho}}$$

Per stimare la velocità del fluido vengono misurate le seguenti quantità:

- $P_t = 115\ kPa$ con un trasduttore di pressione avente risoluzione pari a $0{,}25\ kPa$
- $P_0 = 101\ kPa$ con un barometro avente risoluzione pari a $0{,}5\ kPa$
- $\rho = 1{,}22\,\frac{kg}{m^3}$ nota con incertezza di tipo A pari a $0{,}06\,\frac{kg}{m^3}$

Si richiede di esprimere la misura della velocità del fluido v, utilizzando i dati a disposizione.

Soluzione

Per prima cosa calcoliamo l'incertezza relativa agli strumenti con risoluzione finita:

$$u_{P_t} = \frac{0{,}25}{2\sqrt{3}} = 0{,}072\ kPa; \qquad u_{P_0} = \frac{0{,}5}{2\sqrt{3}} = 0{,}144\ kPa$$

A questo punto posso propagare l'incertezza:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial P_t} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2P_t}{\rho} - \dfrac{2P_0}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{2}{\rho} = -Q \cdot \dfrac{1}{\rho} \\ \dfrac{\partial v}{\partial P_0} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2P_t}{\rho} - \dfrac{2P_0}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{2}{\rho} = -Q \cdot \dfrac{1}{\rho} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \rho} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2P_1}{\rho} - \dfrac{2P_0}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\dfrac{P_t - P_0}{\rho^2} = -Q \cdot \dfrac{P_t - P_0}{\rho^2} \end{cases}$$

È quindi possibile stimare l'incertezza sulla misura della velocità:

$$u_U = \sqrt{\left(\frac{Q}{\rho}u_{P_0}\right)^2 + \left(\frac{Q}{\rho}u_{P_t}\right)^2 + \left(Q \cdot \frac{P_t - P_0}{\rho^2} \cdot u_\rho\right)^2} = Q\sqrt{\frac{1}{\rho^2}\left({u_{P_0}}^2 + {u_{P_t}}^2\right) + \left(\frac{P_t - P_0}{\rho^2} \cdot u_\rho\right)^2}$$

$$Q = \left(2\frac{P_t - P_0}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(2\frac{14000}{1.22}\right)^{-\frac{1}{2}} = 6.6\times10^{-3}$$

Da cui

$$u_v = 6.6\times10^{-3}\sqrt{\frac{1}{1{,}22^2}(144^2 + 72^2) + \left(\frac{14000}{1{,}22^2} \cdot 0.06\right)^2} = 6.6\times10^{-3}\sqrt{31346 + 318510} = 3{,}904\,\frac{m}{s}$$

Per cui la misura della velocità diventa:

$$v = 151{,}5 \pm 3{,}9\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 16

Un produttore di motociclette vi ha incaricato ad effettuare delle analisi di qualità su di un motore a due tempi di loro produzione.

Il cliente vuole verificare che l'altezza media del pistone sia inferiore a 55,26 mm e che l'incertezza sull'altezza sia inferiore ai 2 decimi di millimetro con un livello di confidenza del 98%. Tastando con un comparatore centesimale in vari punti del componente, ottenete le misure di altezza del pistone riportate in tabella sottostante (misure in millimetri). Il componente riesce a soddisfare le richieste del cliente? *(Per la soluzione si ipotizzi una distribuzione gaussiana)*

55,13	55,23	55,19	55,22
55,19	55,25	55,18	55,30

SOLUZIONE

Chiamiamo h, l'altezza del pistone. Tramite i dati forniti si calcola:

$$\bar{X}_h = 55.21 \;\; S(h) = 0.051 \;\; u_h = \frac{S(h)}{\sqrt{8}} = 0.018$$

La richiesta è per un livello di confidenza del 98%, sicché è necessario calcolare il fattore di copertura adeguato:

$$\alpha_{98\%} = F_z^{-1}(0.99) = 2.326$$

Perciò la misura dell'altezza del pistone è pari a:

$$h = 55.22 \pm 0.04\; mm$$

I valori rientrano in quelli prescritti dal cliente.

Esercizio 17

Dovete determinare la densità di una lega di titanio innovativa. Per fare ciò la fonderia vi ha consegnato un campione sferico della lega. Il diametro della sfera risulta pari a 11,35 mm (misurato con un calibro ventesimale). La massa della sfera risulta pari a 3,22 grammi, misurata con una bilancia avente incertezza di tipo A pari a 0,04 grammi.

Si esprima la misura di densità per la lega di titanio esaminata in unità del sistema internazionale.

NB Si ricorda che il volume di una sfera di raggio R è pari a $\frac{4}{3}\pi R^3$

Soluzione

Per prima cosa si esplicita la funzione di misura, essendo la densità ρ funzione della massa m e del diametro D della sfera:

$$\rho(m, D) = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi \frac{D^3}{8}} = \frac{m}{\frac{\pi}{6} D^3} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{m}{D^3}$$

A questo punto è possibile calcolare le derivate:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial m} = \dfrac{6}{\pi} \cdot \dfrac{1}{D^3} = \dfrac{6}{\pi} \cdot \dfrac{1}{(11.35 \times 10^{-3})^3} = 1.306 \times 10^6 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial D} = \dfrac{6}{\pi} \cdot m \cdot -\dfrac{3}{D^4} = -\dfrac{18}{\pi} \cdot \dfrac{m}{D^4} = 1.112 \times 10^6 \end{cases}$$

Calcoliamo ora l'incertezza sui dati in ingresso:

$$u_m = 0.04\ g = 4 \times 10^{-5}\ kg \quad u_D = \frac{0.05}{2\sqrt{3}} = 0.0144\ mm = 1.44 \times 10^{-5}\ m$$

Calcoliamo il valore atteso di densità:

$$\bar{X}_\rho = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{3.22 \times 10^{-3}}{(11.35 \times 10^{-3})^3} = 4206 \frac{kg}{m^3}$$

Ora calcoliamo l'incertezza di misura:

$$u_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot u_m\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial D} \cdot u_d\right)^2} = \sqrt{(1.306 \times 10^6 \cdot 4 \times 10^{-5})^2 + (1.112 \times 10^6 \cdot 1.44 \times 10^{-5})^2}$$

$$= \sqrt{(52.24)^2 + (16.01)^2} = 54.64 \frac{kg}{m^3}$$

Di conseguenza la misura di densità della lega è:

$$\rho = 4206 \pm 55 \frac{kg}{m^3}$$

Esercizio 18

Si vuole determinare la frequenza naturale di un sistema massa-molla. Vengono effettuate 16 misure della massa e altrettante della rigidezza della molla. I valori sono riportati in tabella sottostante. Si richiede di esprimere la misura della frequenza naturale con un livello di confidenza del 98%.

Rigidezza	**[N/m]**	1484	1476	1524	1444	1479	1496	1504	1526
		1497	1528	1467	1521	1547	1512	1512	1506
Massa	**[kg]**	3,016	3,016	3,016	3,041	2,955	3,102	2,942	3,019
		3,143	3,095	2,929	2,954	3,043	2,951	2,934	3,077

Soluzione

Per prima cosa calcolo le incertezze sulle misure di massa m e rigidezza k, considerando la presenza di $N = 16$ campioni.

$$\bar{X}_k = 1501{,}4\frac{N}{m}; \quad S(k) = 26{,}5; \quad u_k = \frac{S(k)}{\sqrt{N}} = 6{,}6\frac{N}{m}$$

$$\bar{X}_m = 3{,}015\ kg; \quad S(m) = 0{,}067; \quad u_m = \frac{S(m)}{\sqrt{N}} = 0{,}017\frac{N}{m}$$

La frequenza naturale di un sistema massa-molla è espressa secondo:

$$f(k,m) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Il valore medio di frequenza naturale vale:

$$\bar{X}_f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\bar{X}_k}{\bar{X}_m}} = 3.55\ Hz$$

Faccio le derivate per propagare l'incertezza:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial k} = \dfrac{1}{4\pi}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{km}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial m} = -\dfrac{1}{4\pi}\cdot\sqrt{\dfrac{k}{m^3}} \end{cases}$$

Che, valutate in corrispondenza dei valori medi valgono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial k_{\bar{X}}} = \dfrac{1}{4\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{\bar{X}_k \bar{X}_m}} = \dfrac{1}{4\pi} \cdot 14{,}86\times10^{-3} = 1{,}183\times10^{-3} \\ \dfrac{\partial f}{\partial m_{\bar{X}}} = -\dfrac{1}{4\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{\bar{X}_k}{\bar{X}_m{}^3}} = -\dfrac{1}{4\pi} \cdot 7{,}401 = 0{,}589 \end{cases}$$

È quindi possibile calcolare l'incertezza combinata:

$$u_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial k_{\bar{X}}} \cdot u_k\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial m_{\bar{X}}} \cdot u_m\right)^2} = \sqrt{(7{,}808\times10^{-3})^2 + (10.01\times10^{-3})^2} = 12.7\times10^{-3}\ Hz$$

Non rimane che suggerire un adeguato fattore di copertura. Nell'ipotesi di distribuzione gaussiana:

$$\alpha_{98\%} = F_z^{-1}(0.99) = 2{,}33$$

Per cui l'incertezza estesa vale:

$$u_f^e = \alpha_{98\%} \cdot u_f = 0{,}03\ Hz$$

Quindi la misura di frequenza vale:

$$f = 3{,}55 \pm 0{,}03\ Hz$$

Se l'esercizio è stato svolto considerando la pulsazione naturale ω anziché la frequenza:

$$\omega = 22{,}3 \pm 0{,}2\,\frac{rad}{s}$$