1. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$(z^4 - 4i)(z^2 - 2z + 2) = 0,$$

e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss.

2. (a) Determinare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0+} \left(\frac{5x^4 \ \sin(5x)}{[\arctan(x)]^\alpha} + \arctan\left(-\frac{5}{|x|}\right)\right),$$

al variare del parametro reale α.

(b) Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 8 della funzione

$$f(x) = \log(1 + 5x^4) + \cos(4x^2).$$

3. Sia $f = [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4 + e^{x^4}$. Utilizzando il teorema di Lagrange si dimostri che f ammette un punto stazionario in $(-1, 1)$ e lo si calcoli. Fare un disegno che illustri la situazione.

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 3}}{x + 1}.$$

1. Giustificare l'esistenza e poi calcolare il seguente integrale

$$I := \int_2^3 \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx.$$

2. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2+1)x^3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

3. Scrivere l'equazione del piano π passante per il punto $P(2,2,4)$ e ortogonale alla retta L di equazioni $x = y$ e $y = 2z$.

4. Data la linea Γ in forma parametrica $\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + 3\mathrm{e}^{2t}\,\underline{j} + 4\mathrm{e}^{t}\,\underline{k}$, $t \in \mathbb{R}$, determinare la retta tangente L ed il piano normale P nel punto $p_0 := 3\,\underline{j} + 4\,\underline{k}$.

1. Risolvere nel campo complesso la seguente equazione:

$$z - 1 - 6i = z^2 - 2z\mathbf{Re}[z] + |z|^2.$$

2. Al variare di $n \in \mathbb{N}$ studiare la convergenza dell'integrale:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^n}}\, dx.$$

   Calcolarlo per il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui converge.

3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma f ds$ della funzione:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2(1+8y)}{\sqrt{1+y+4x^2y}},$$

   sull'arco di curva γ definito da $(x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, \log(t))$, $t \in [1,2]$.

4. Studiare la funzione

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-|x|} + \frac{x}{\mathrm{e}}.$$

1. Siano assegnati i punti $P(0,0,1)$ e $Q(1,2,4)$. Determinare:

   (a) le equazioni parametriche della retta passante per P e per Q,

   (b) l'equazione del piano passante per Q e ortogonale alla retta QP.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 - 2\arctan x^2.$$

3. Data la linea Γ in forma parametrica $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dove

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^2 + \sin(t^2 - 1), \qquad t \in \mathbb{R},$$

determinare l'equazione del piano osculatore π_{osc} nel punto relativo a $t = 1$.

4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$I = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{x/3}}\, dx.$$

1. Verificare la convergenza del seguente integrale improprio e calcolarne il valore

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-5}}dx.$$

2. Sia data la seguente equazione differenziale

$$y'(t) = y(t)^2 + 1.$$

   (a) Esibire una formula di rappresentazione per la generica soluzione;
   (b) calcolare la soluzione del problema di Cauchy avente come dato iniziale $y(0) = -1$;
   (c) in questo caso, specificare l'intervallo massimale di definizione della soluzione.

3. Si consideri la curva tridimensionale di equazione

$$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 2\sin t\,\mathbf{k}, \quad t \in [0, \pi].$$

   Si calcoli la massa totale del corpo avente come supporto $\mathbf{r}$ e come densità lineare di massa

$$\delta(x, y, z) = \sqrt{x}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[5]{e^{4x} - 1}.$$

   Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

1. Sia

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt[3]{x}) - \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} + 1}{\ln(1 + \sin\sqrt[3]{x})}.$$

   (a) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0} f(x)$.

   (b) Esistono un numero $K \neq 0$ e un numero $\alpha > 0$ per i quali si abbia $f(x) \sim Kx^{\alpha}$, per $x \to 0$? In caso affermativo, determinare una tale funzione Kx^{α}.

   (c) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in un intorno del punto $x_0 = 0$.

   Giustificare le risposte, riportando i calcoli.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

   Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ b - 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali eventuali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x_0 = 0$.

(b) Usando la definizione di derivata, determinare gli eventuali $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$.

Giustificare le risposte, riportando i calcoli.

4. Si consideri l'equazione

$$(z-1)^3 = (1 - i\sqrt{3})^3$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$.

(a) Scrivere tutte le soluzioni, nella forma algebrica $a + ib$;

(b) disegnare tutte le soluzioni sul piano complesso.

Motivare le risposte, riportando i calcoli.

1. (a) Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 (2-2x)\arctan x\,dx.$$

(b) Stabilire se il seguente integrale generalizzato è convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)\sin x}{(1+x)x^{7/2}}\,dx.$$

2. Sia r la retta intersezione dei piani di equazioni $y-x+2z-1=0$ e $2y+x+z=0$.

(a) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r.

(b) Scrivere l'equazione del piano ortogonale a r che passa per il punto $P \equiv (1,0,2)$.

(c) Calcolare la distanza del punto P dalla retta r.

3. Sia γ l'arco di curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{con } 0 \le t \le 2\pi.$$

(a) Calcolare il versore $\mathbf{T}$ tangente a γ nel punto P della curva corrispondente al valore $t=\pi$.

(b) Scrivere l'equazione del piano che passa per P parallelo a $\mathbf{T}$ e al vettore $\mathbf{v} = -2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

(c) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{2}xyz\,ds$.

4. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t-t^2}, \\ y(2) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Si consideri l'equazione

$$z^4 + 2z = 0,$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$.

(a) Scrivere tutte le soluzioni nella forma $a + ib$.

(b) Sia $\widehat{z}$ la soluzione che verifica

$$\mathbf{Re}(\widehat{z}) > 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Im}(\widehat{z}) < 0.$$

Calcolare

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\mathbf{Re}(\widehat{z})}{\mathbf{Im}(\widehat{z})} \right|^n + 1 \right).$$

Motivare le risposte, riportando i calcoli.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x| + 4}{x - 4} \right).$$

3. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$y'(x) = 16e^{1-4x} - 4y(x), \qquad y(0) = 0.$$

   (a) Calcolare la soluzione $y(x)$.

   (b) Calcolare il polinomio di MacLaurin di ordine 3 di $y(x)$.

   Giustificare le risposte, riportando i calcoli.

4. Data la curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = 1 - \cos(t) + (4-t)\sin(t) \\ y(t) = \sin(t) + (4-t)\cos(t) \\ z(t) = \dfrac{1}{2}(4-t)^2 \end{cases} \qquad t \in [-4, 4].$$

   (a) Calcolare la lunghezza di γ.

   (b) Calcolare i vettori tangente, normale e binormale nel punto $P_0 = (0, 4, 8)$.

   (c) Calcolare le equazioni del piano individuato dai vettori tangente e binormale nel punto P_0.

   Motivare le risposte, riportando i calcoli.