Marco Gilli

Dipartimento di Elettronica
Politecnico di Torino

Esercizi svolti di Elettrotecnica

Politecnico di Torino

TORINO

Maggio 2003

Indice

Capitolo 1

Leggi di Kirchhoff

Esercizio 1.1

Si consideri il circuito di Fig. 1.1, ove sono indicati i valori che alcune tensioni e correnti assumono ad un istante t_0. Sfruttando le leggi di Kirchhoff delle tensioni e delle correnti, si determinino i valori delle altre tensioni e correnti al medesimo istante t_0. Siano dati $V_4 = 7\,V$, $V_5 = 9\,V$, $V_6 = 8\,V$, $I_3 = 6\,A$, $I_5 = 8\,A$ ed $I_6 = 7\,A$.

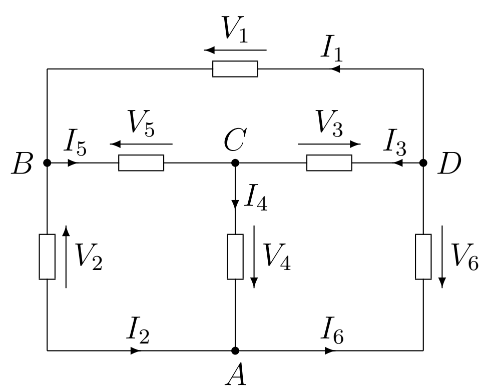


Figura 1.1: Circuito dell'esercizio 1.1

Soluzione

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni rispettivamente alla maglia di sinistra, alla maglia di destra ed alla maglia esterna si ottiene

$$V_2 = V_5 - V_4 = 9\,V - 7\,V = \quad 2\,V$$

$$V_3 = V_4 - V_6 = 7\,V - 8\,V = - \ 1\,V$$

$$V_1 = V_2 + V_6 = 2\,V + 8\,V = \quad 10\,V$$

Applicando la legge Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi B, C e D si ottiene

$$I_4 = I_5 + I_3 = 8\,A + 6\,A = \quad 14\,A$$

$$I_1 = I_6 + I_5 = 7\,A - 6\,A = \quad 1\,A$$

$$I_2 = I_1 - I_5 = 1\,A - 8\,A = - \ 7\,A$$

Esercizio 1.2

Con riferimento al circuito di Fig. 1.2 e facendo uso della legge di Kirchhoff delle correnti, si calcolino le correnti incognite. Siano dati $I_a = 8\,A$, $I_b = -2\,A$, $I_c = 5\,A$, $I_d = -6\,A$, $I_e = 8\,A$, ed $I_f = 10\,A$.

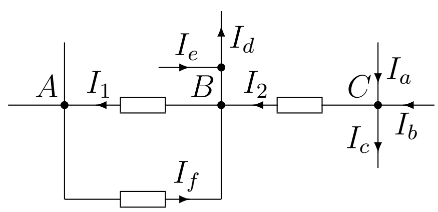


Figura 1.2: Circuito dell'esercizio 1.2

Soluzione

Applicando la legge Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi C e B si ottiene

$$I_2 = I_a + I_b - I_c \quad = 8\,A - 2\,A - 5\,A \quad = \; 1\,A$$

$$I_1 = I_2 - I_d + I_e + I_f = 1\,A - (-6)\,A + 8\,A + 10\,A = 25\,A$$

Esercizio 1.3

Con riferimento al circuito di Fig. 1.3 e facendo uso della legge di Kirchhoff delle correnti, si calcolino le correnti incognite. Siano dati $I_a = 4\,A$, $I_b = -3\,A$, $I_c = 2\,A$, $I_d = 5\,A$ ed $I_e = -6\,A$.

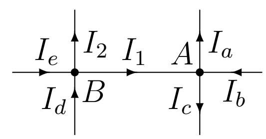


Figura 1.3: Circuito dell'esercizio 1.3

Soluzione

Applicando la legge Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi A e B si ottiene

$$I_1 = I_a - I_b + I_c = 4\,A - (-3)\,A + 2\,A = 9\,A$$

$$I_2 = I_d + I_e - I_1 = 5\,A + (-6)\,A - 9\,A = -10\,A$$

Esercizio 1.4

Con riferimento al circuito di Fig. 1.4 e facendo uso della legge di Kirchhoff delle correnti, si calcolino le correnti incognite. Siano dati $I_a = -3\,A$, $I_b = 5\,A$, $I_c = 1\,A$ ed $I_d = -5\,A$.

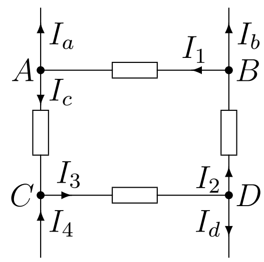


Figura 1.4: Circuito dell'esercizio 1.4

Soluzione

Applicando la legge Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi A, B, D e C si ottiene

$$I_1 = I_a + I_c = -3\,A + 1\,A = -2\,A$$

$$I_2 = I_1 + I_b = -2\,A + 5\,A = \quad 3\,A$$

$$I_3 = I_2 + I_d = \quad 3\,A - 5\,A = -2\,A$$

$$I_4 = I_3 - I_c = -2\,A - 1\,A = -3\,A$$

Esercizio 1.5

Dato il circuito di Figura calcolare le tensioni V_1, V_2 e V_3. Siano dati $V_a = 8\,V$, $V_b = -11\,V$, $V_c = 10\,V$, $V_d = 14\,V$ e $V_e = 15\,V$.

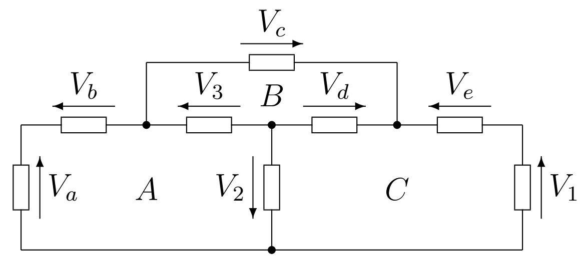


Figura 1.5: Circuito dell'esercizio 1.5

Soluzione

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni rispettivamente alle maglie B, A e C si ottiene:

$$V_3 = V_d - V_c = 14\,V - 10\,V = 4\,V$$

$$V_2 = V_3 + V_b - V_a = 4\,V - 11\,V - 8\,V = -15\,V$$

$$V_1 = V_d - V_e - V_2 = 14\,V - 15\,V + 15\,V = 14\,V$$

Esercizio 1.6

Dato il circuito di Fig. 1.6, calcolare le correnti I_1, I_2 ed I_3. Siano dati $I_a = 12\,mA$, $I_b = 8\,mA$ ed $I_c = 9\,mA$.

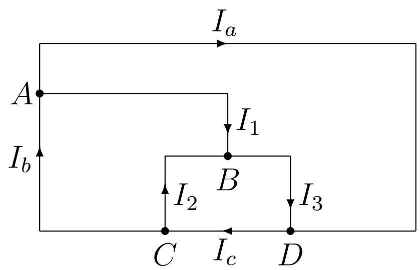


Figura 1.6: Circuito dell'esercizio 1.6

Soluzione

Applicando la legge di Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi A, C e D si ottiene:

$$I_1 = I_b - I_a = 8\,mA - 12\,mA = -4\,mA$$

$$I_2 = I_c - I_b = 9\,mA - 8\,mA = 1\,mA$$

$$I_3 = I_c - I_a = 9\,mA - 12\,mA = -3\,mA$$

Volendo si può scrivere un'ulteriore equazione come verifica dei calcoli appena svolti: la somma delle correnti entranti nel nodo B deve essere uguale a zero

$$I_1 + I_2 - I_3 = -4\,mA + 1\,mA - (-3\,mA) = 0$$

Esercizio 1.7

Dato il circuito di Fig. 1.7, calcolare le correnti I_1, I_2 ed I_3. Siano dati $I_a = 1\,A$, $I_b = 2\,A$, $I_c = 10\,A$ ed $I_d = 3\,A$.

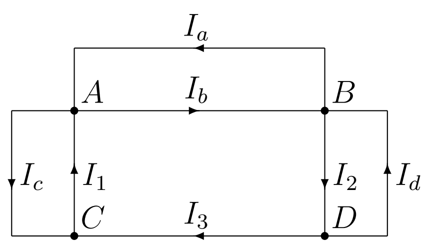


Figura 1.7: Circuito dell'esercizio 1.7

Soluzione

Applicando la legge di Kirchhoff delle correnti rispettivamente ai nodi A, B e C si ottiene:

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_b + I_c - I_a = 2\,A + 10\,A - 1\,A = 11\,A \\
I_2 &= I_b + I_d - I_a = 2\,A + 3\,A - 1\,A = 4\,A \\
I_3 &= I_1 - I_c = 11\,A - 10\,A = 1\,A
\end{aligned}$$

Volendo si può scrivere un'ulteriore equazione come verifica dei calcoli appena svolti: la somma delle correnti entranti nel nodo D deve essere uguale a zero

$$I_2 - I_3 - I_d = 4\,A - 1\,A - 3\,A = 0$$

Esercizio 1.8

Dato il circuito di Fig. 1.8, calcolare le tensioni V_1, V_2 e V_3. Siano dati $V_a = 20\,V$, $V_b = 25\,V$, $V_c = 10\,V$ e $V_d = 15\,V$.

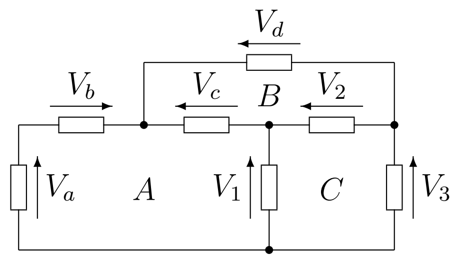


Figura 1.8: Circuito dell'esercizio 1.8

Soluzione

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni rispettivamente alle maglie A, B e C si ottiene:

$$V_1 = V_a + V_b - V_c = 20\,V + 25\,V - 10\,V = 35\,V$$

$$V_2 = V_d - V_c = 15\,V - 10\,V = 5\,V$$

$$V_3 = V_1 - V_2 = 35\,V - 5\,V = 30\,V$$

Esercizio 1.9

Dato il circuito di Fig. 1.9, calcolare le tensioni V_1, V_2 e V_3. Siano dati $E_1 = 10\,V$, $E_2 = 12\,V$ e $E_3 = 10\,V$.

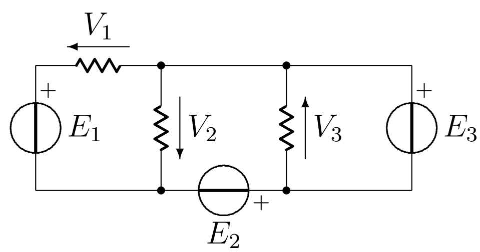


Figura 1.9: Circuito dell'esercizio 1.9

Soluzione

Osservando la maglia di destra si vede subito che

$$V_3 = E_3 = 10\,V$$

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni rispettivamente alla maglia esterna ed alla maglia di sinistra si ottiene

$$\begin{aligned} V_1 = E_1 - E_2 - E_3 &= 24\,V - 12\,V - 10\,V = && 2\,V \\ V_2 = V_1 - E_1 &= 2\,V - 24\,V && = -22\,V \end{aligned}$$

Come verifica dei calcoli appena svolti si può scrivere l'equazione delle tensioni alla maglia centrale

$$V_3 = -E_2 - V_2 = -12\,V - (-22\,V) = 10\,V$$

che è lo stesso valore ottenuto in precedenza.

Capitolo 2

Legge di Ohm e partitori

Esercizio 2.1

Dato il circuito di Fig. 2.1, calcolare la corrente I, la potenza dissipata dal resistore R e le potenze fornite dai singoli generatori. Siano dati $V_a = 10\,V$, $V_b = 12\,V$, $V_c = -8\,V$ ed $R = 3\,\Omega$.

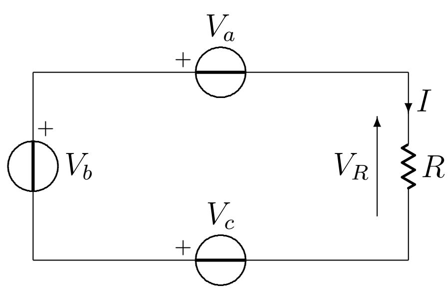


Figura 2.1: Circuito dell'esercizio 2.1

Soluzione

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni all'unica maglia presente nel circuito si ottiene

$$V_a - V_b - V_c + R \cdot I = 0$$

da cui

$$I = \frac{-V_a + V_b + V_c}{R} = \frac{-10\,V + 12\,V - 8\,V}{3\,\Omega} = -2\,A$$

Essendo la potenza dissipata da un resistore pari alla corrente per la tensione ai sui capi (nella convenzione di utilizzatore), si ha che la potenza dissipata da R è pari a

$$P_R = V_R \cdot I = R \cdot I^2 = 3\,\Omega \cdot (2\,A)^2 = 12\,W$$

La potenza fornita dai generatori è ancora pari al prodotto della tensione ai capi del generatore per la corrente che lo attraversa, ma nelle convenzioni di utilizzatore, per cui si ottiene

$$P_a = -V_a \cdot I = -10\,V \cdot (-2\,A) = \quad 20\,W$$

$$P_b = \quad V_b \cdot I = \quad 12\,V \cdot (-2\,A) = -24\,W$$

$$P_c = \quad V_c \cdot I = -\;8\,V \cdot (-2\,A) = \quad 16\,W$$

Si verifica infine che la somma algebrica delle potenze fornite dai generatori al circuito è uguale a alla somma algebrica delle potenze dissipate dai resistori del circuito

$$P_a + P_b + P_c = 20\,W - 24\,W + 16\,W = 12\,W = P_R$$

Esercizio 2.2

Dato il circuito di Fig. 2.2, trovare i valori di i_1, i_2, i_3 e i_4. Siano dati $R_1 = 60\,\Omega$, $R_2 = 40\,\Omega$, $R_3 = 80\,\Omega$, $R_4 = 20\,\Omega$ e $J = 10\,A$.

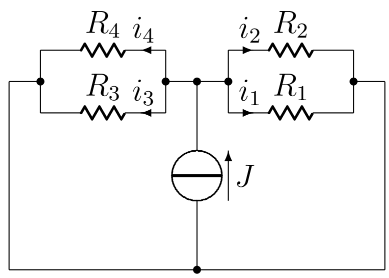


Figura 2.2: Circuito dell'esercizio 2.28

Soluzione

Le quattro resistenze sono in parallelo. Per calcolare le correnti incognite basta applicare la regola del partitore di corrente.

$$\begin{aligned}
i_1 &= J\tfrac{R_2\|R_3\|R_4}{R_1+(R_2\|R_3\|R_4)} &= 10\,A\tfrac{40\,\Omega\|80\,\Omega\|20\,\Omega}{60\,\Omega+(40\,\Omega\|80\,\Omega\|20\,\Omega)} &= 1.6\,A \\
i_2 &= J\tfrac{R_1\|R_3\|R_4}{R_2+(R_1\|R_3\|R_4)} &= 10\,A\tfrac{60\,\Omega\|80\,\Omega\|20\,\Omega}{40\,\Omega+(60\,\Omega\|80\,\Omega\|20\,\Omega)} &= 2.4\,A \\
i_3 &= J\tfrac{R_1\|R_2\|R_4}{R_3+(R_1\|R_2\|R_4)} &= 10\,A\tfrac{60\,\Omega\|40\,\Omega\|20\,\Omega}{80\,\Omega+(60\,\Omega\|40\,\Omega\|20\,\Omega)} &= 1.2\,A \\
i_4 &= J\tfrac{R_1\|R_2\|R_3}{R_4+(R_1\|R_2\|R_3)} &= 10\,A\tfrac{60\,\Omega\|40\,\Omega\|80\,\Omega}{20\,\Omega+(60\,\Omega\|40\,\Omega\|80\,\Omega)} &= 4.8\,A
\end{aligned}$$

Esercizio 2.3

Dato il circuito di Fig. 2.3, trovare i valori di i_0 e V_0. Siano dati $R_1 = 70\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$, $R_3 = 40\,\Omega$, $R_4 = 10\,\Omega$ e $E = 58\,V$.

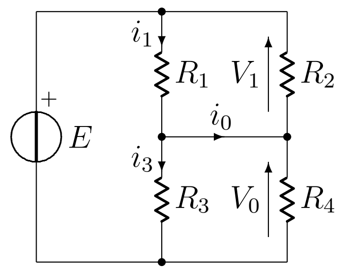


Figura 2.3: Circuito dell'esercizio 2.31

Soluzione

Le resistenze R_1 ed R_2 sono in parallelo, così come R_3 ed R_4. La tensione incognita V_0 si calcola con la regola del partitore di tensione.

$$V_0 = E\frac{R_3\|R_4}{(R_1\|R_2)+(R_3\|R_4)} = 58\,V\frac{40\,\Omega\|10\,\Omega}{(70\,\Omega\|30\,\Omega)+(40\,\Omega\|10\,\Omega)} = 16\,V$$

Per trovare il valore di i_0 bisogna prima calcolare il valore di i_1 ed i_3

$$\begin{aligned} i_1 &= \tfrac{E-V_0}{R_1} = \tfrac{58\,V-16\,V}{70\,\Omega} = 0.6\,A \\ i_3 &= \tfrac{V_0}{R_3} = \tfrac{16\,V}{40\,\Omega} = 0.4\,A \end{aligned}$$

da cui

$$i_0 = i_1 - i_3 = 0.6\,A - 0.4\,A = 0.2\,A$$

Esercizio 2.4

Dato il circuito di Fig. 2.4, trovare i valori di i_0 e V_0. Siano dati $R_1 = 80\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 30\,\Omega$, $R_4 = 60\,\Omega$, $R_5 = 10\,\Omega$ e $E = 20\,V$.

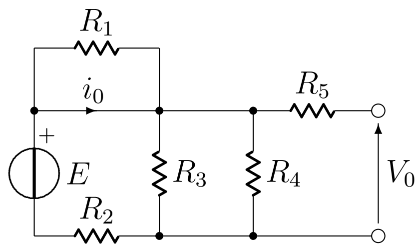


Figura 2.4: Circuito dell'esercizio 2.32

Soluzione

La resistenza R_1 è in corto circuito, quindi la corrente i_0 è uguale alla corrente erogata dal generatore di tensione.

$$i_0 = \frac{E}{R_2 + (R_3 \| R_4)} = \frac{20\,V}{20\,\Omega + (30\,\Omega \| 60\,\Omega)} = 0.5\,A$$

Visto che sulla resistenza R_5 non scorre corrente, la tensione V_0 è uguale alla tensione sul parallelo tra R_3 ed R_4.

$$V_0 = i_0(R_3 \| R_4) = 0.5\,A \cdot (30\,\Omega \| 60\,\Omega) = 10\,V$$

Capitolo 3

Resistenze equivalenti

Esercizio 3.1

Dato il circuito di Fig. 3.1, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b.

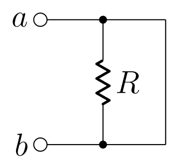


Figura 3.1: Circuito dell'esercizio 3.1

Soluzione

La resistenza R è in parallelo ad un corto circuito, quindi

$$R_{ab} = 0$$

Esercizio 3.2

Dato il circuito di Fig. 3.2, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b.

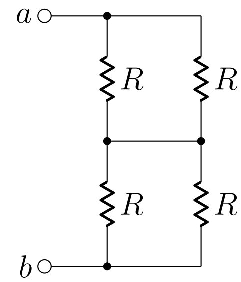


Figura 3.2: Circuito dell'esercizio 3.2

Soluzione

$$R_{ab} = (R \| R) + (R \| R) = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

Esercizio 3.3

Dato il circuito di Fig. 3.3, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b.

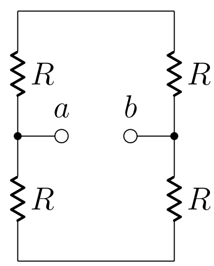


Figura 3.3: Circuito dell'esercizio 3.3

Soluzione

$$R_{ab} = (R + R) \parallel (R + R) = (2R) \parallel (2R) = R$$

Esercizio 3.4

Dato il circuito di Fig. 3.4, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b.

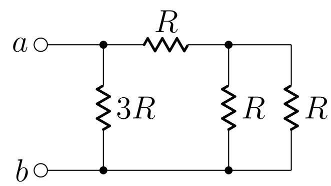


Figura 3.4: Circuito dell'esercizio 3.4

Soluzione

$$R_{ab} = [(R \| R) + R] \parallel (3R) = \left(\frac{R}{2} + R\right) \parallel (3R) = R$$

Esercizio 3.5

Dato il circuito di Fig. 3.5, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b.

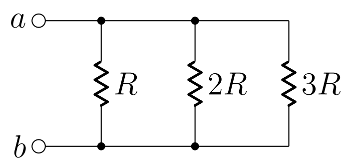


Figura 3.5: Circuito dell'esercizio 3.5

Soluzione

$$R_{ab} = (3R)\|(2R)\|(R) = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{6}{11}R$$

Esercizio 3.6

Dato il circuito di Fig. 3.6, calcolare la corrente I e la resistenza R_{eq} vista ai capi del generatore di tensione E. Siano dati $E = 10\,V$, $R_1 = 3\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_4 = 6\,\Omega$, $R_5 = 1\,\Omega$ ed $R_6 = 2\,\Omega$.

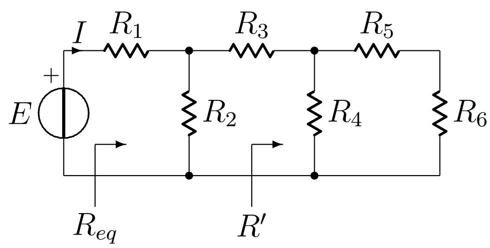


Figura 3.6: Circuito dell'esercizio 3.6

Soluzione

Per il calcolo della resistenza equivalente vista dal generatore di tensione conviene prima calcolare la resistenza R'

$$R' = (R_6 + R_5) \| R_4 = (2\,\Omega + 1\,\Omega) \| (6\,\Omega) = 2\,\Omega$$

La R_{eq} è ora data da

$$R_{eq} = \left[(R' + R_3) \| R_2\right] + R_1 = [(2\,\Omega + 2\,\Omega) \| (4\,\Omega)] + 3\,\Omega = 5\,\Omega$$

La corrente I è la corrente erogata dal generatore di tensione e vale

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{10\,V}{5\,\Omega} = 2\,A$$

Esercizio 3.7

Dato il circuito di Fig. 3.7, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b. Siano dati $R_1 = 60\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = 30\,\Omega$ ed $R_4 = 60\,\Omega$.

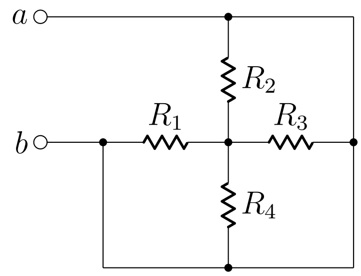


Figura 3.7: Circuito dell'esercizio 3.7

Soluzione

I terminali a e b appartengono allo stesso nodo, quindi

$$R_{ab} = 0$$

Esercizio 3.8

Dato il circuito di Fig. 3.8, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b. Siano dati $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$, $R_3 = 15\,\Omega$, $R_4 = 6\,\Omega$, $R_5 = 20\,\Omega$, $R_6 = 10\,\Omega$, $R_7 = 8\,\Omega$, $R_8 = 4\,\Omega$, $R_9 = 5\,\Omega$, $R_{10} = 9\,\Omega$ ed $R_{11} = 11\,\Omega$.

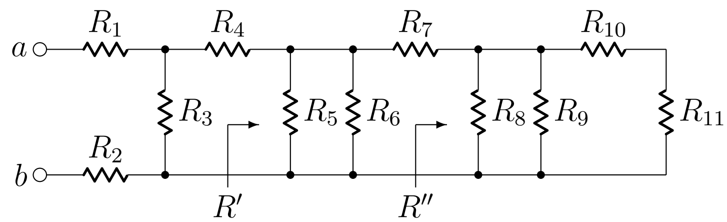


Figura 3.8: Circuito dell'esercizio 3.8

Soluzione

Per semplicità conviene calcolare R' ed R''

$$R'' = (R_{11} + R_{10}) \| R_9 \| R_8 = (11\,\Omega + 9\,\Omega)\|(5\,\Omega)\|(4\,\Omega) = 2\,\Omega$$

$$R' \;= (R'' + R_7) \| R_6 \| R_5 = (2\,\Omega + 8\,\Omega)\|(10\,\Omega)\|(20\,\Omega) = 4\,\Omega$$

La resistenza vista tra i due morsetti vale

$$R_{ab} = \left[(R' + R_4)\|R_3\right] + R_2 + R_1 = [(4\,\Omega + 6\,\Omega)\|(15\,\Omega)] + 4\,\Omega + 5\,\Omega = 15\,\Omega$$

Esercizio 3.9

Dato il circuito di Fig. 3.9, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b. Siano dati $R_1 = 70\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$, $R_3 = 60\,\Omega$ $R_4 = 20\,\Omega$ ed $R_5 = 40\,\Omega$.

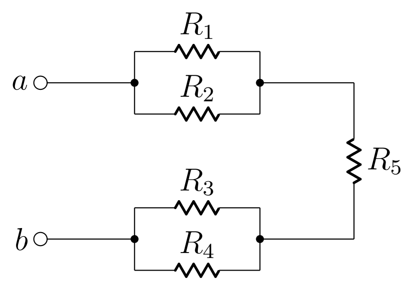


Figura 3.9: Circuito dell'esercizio 3.9

Soluzione

$$R_{ab} = (R_1 \| R_2) + (R_3 \| R_4) + R_5 = (70\,\Omega \| 30\,\Omega) + (60\,\Omega \| 20\,\Omega) + 40\,\Omega = 76\,\Omega$$

Esercizio 3.10

Dato il circuito di Fig. 3.10, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b. Siano dati $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$, $R_3 = 20\,\Omega$, $R_4 = 40\,\Omega$, $R_5 = 60\,\Omega$, $R_6 = 4\,\Omega$, $R_7 = 10\,\Omega$, $R_8 = 50\,\Omega$, $R_9 = 70\,\Omega$, $R_{10} = 80\,\Omega$ ed $R_{11} = 6\,\Omega$.

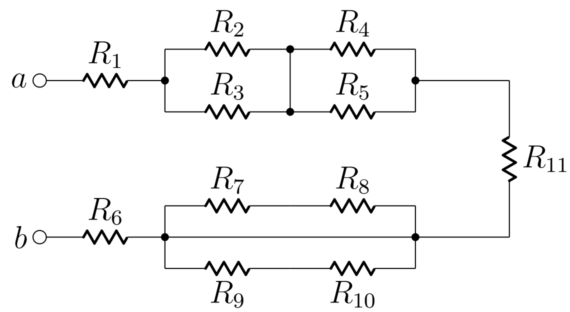


Figura 3.10: Circuito dell'esercizio 3.10

Soluzione

Le resistenze R_7, R_8, R_9 ed R_{10} non intervengono nel calcolo della R_{ab} perché sono in parallelo ad un corto circuito. La resistenza vista tra i due morsetti vale quindi

$$R_{ab} = R_1 + (R_2 \| R_3) + (R_4 \| R_5) + R_6 + R_{11} =$$

$$= 8\,\Omega + (30\,\Omega \| 20\,\Omega) + (40\,\Omega \| 60\,\Omega) + 4\,\Omega + 6\,\Omega = 54\,\Omega$$

Esercizio 3.11

Dato il circuito di Fig. 3.11, determinare la resistenza equivalente R_{ab} tra i morsetti a e b. Siano dati $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$ $R_4 = 8\,\Omega$, $R_5 = 20\,\Omega$ ed $R_6 = 3\,\Omega$.

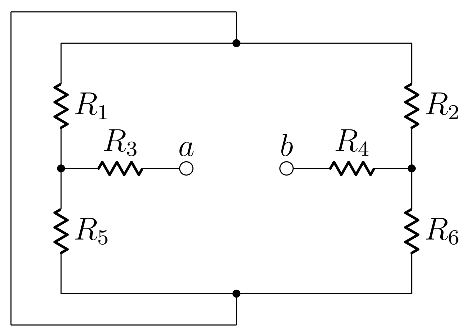


Figura 3.11: Circuito dell'esercizio 3.11

Soluzione

$$R_{ab} = (R_1 \| R_5) + (R_2 \| R_6) + R_3 + R_4 =$$

$$= (5\,\Omega \| 20\,\Omega) + (6\,\Omega \| 3\,\Omega) + 10\,\Omega + 8\,\Omega = 24\,\Omega$$

Capitolo 4

Metodo dei nodi

Esercizio 4.1

Dato il circuito di Fig. 4.1, trovare i valori di V_1 e V_2 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 50\,\Omega$, $R_3 = 20\,\Omega$, $R_4 = 40\,\Omega$, $J_1 = 6\,A$ e $J_2 = 3\,A$.

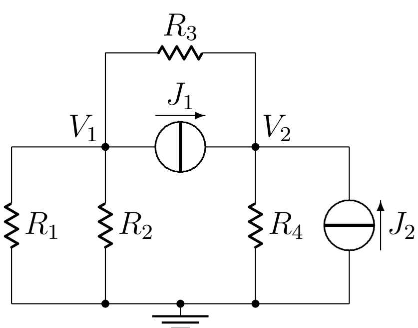


Figura 4.1: Circuito dell'esercizio 4.1

Soluzione

Scriviamo le equazioni delle correnti uscenti dai nodi di V_1 e V_2:

$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{R_1} + \dfrac{V_1}{R_2} + \dfrac{V_1 - V_2}{R_3} + J_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{V_2}{R_4} + \dfrac{V_2 - V_1}{R_3} - J_1 - J_2 = 0 \end{cases}$$

Le uniche due incognite sono V_1 e V_2. Riordinando il sistema e ponendolo in forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 \\ J_1+J_2 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{100\,\Omega}+\frac{1}{50\,\Omega}+\frac{1}{20\,\Omega} & -\frac{1}{20\,\Omega} \\ -\frac{1}{20\,\Omega} & \frac{1}{20\,\Omega}+\frac{1}{40\,\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\,A \\ 6\,A+3\,A \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad V_2 = 120\,V$$

Esercizio 4.2

Dato il circuito di Fig. 4.2, trovare il valore di V_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 40\,\Omega$, $R_2 = 60\,\Omega$, $R_3 = 20\,\Omega$, $E_1 = 12\,V$ ed $E_2 = 10\,V$.

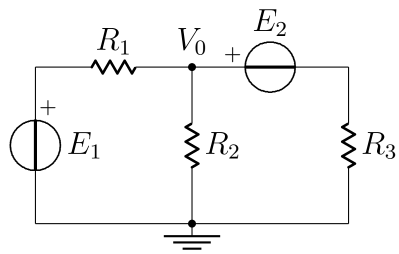
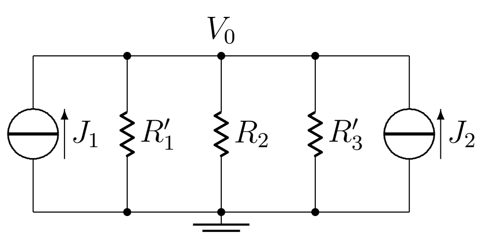


Figura 4.2: Circuito dell'esercizio 4.2

Soluzione

Prima di procedere con i calcoli si trasformano i rami contenenti generatori di tensione in serie a resistenze nei loro equivalenti Norton:



con $J_1 = \dfrac{E_1}{R_1} = 300\,mA$, $J_2 = \dfrac{E_2}{R_3} = 500\,mA$, $R'_1 = R_1 = 40\,\Omega$ e $R'_3 = R_3 = 20\,\Omega$.

Scrivendo l'equazione delle correnti uscenti dal nodo di V_0 si ha:

$$\frac{V_0}{R'_1} + \frac{V_0}{R_2} + \frac{V_0}{R'_3} - J_1 - J_2 = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene

$$V_0 \simeq 8.73\,V$$

Esercizio 4.3

Dato il circuito di Fig. 4.3, trovare i valori di V_1 e V_2 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 40\,\Omega$, $R_4 = 80\,\Omega$, $E_1 = 40\,V$, $E_2 = 20\,V$ e $J = 5\,A$.

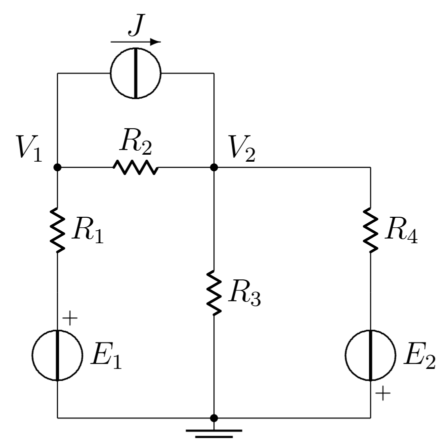
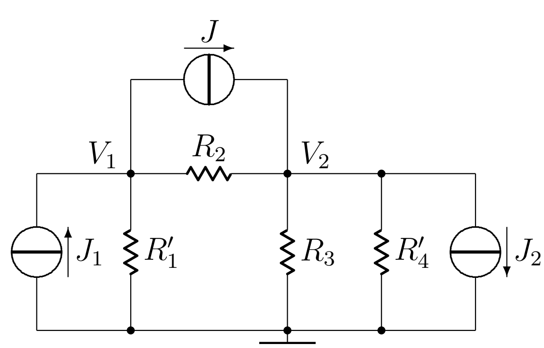


Figura 4.3: Circuito dell'esercizio 4.3

Soluzione

Prima di procedere con i calcoli si trasformano i rami contenenti generatori di tensione in serie a resistenze nei loro equivalenti Norton:



con $J_1 = \dfrac{E_1}{R_1} = 4\,A$, $J_2 = \dfrac{E_2}{R_4} = 250\,mA$, $R_1' = R_1 = 10\,\Omega$ e $R_4' = R_4 = 80\,\Omega$.

Impostando il sistema in forma matriciale nelle incognite V_1 e V_2 si ha:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1'} + \dfrac{1}{R_2} & -\dfrac{1}{R_2} \\ \\ -\dfrac{1}{R_2} & \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - J \\ \\ J - J_2 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{10\,\Omega} + \dfrac{1}{20\,\Omega} & -\dfrac{1}{20\,\Omega} \\ \\ -\dfrac{1}{20\,\Omega} & \dfrac{1}{20\,\Omega} + \dfrac{1}{40\,\Omega} + \dfrac{1}{80\,\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,A - 5\,A \\ \\ 5\,A - 0.25\,A \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni ha come soluzioni

$$V_1 \simeq 14.12\,V \qquad \text{e} \qquad V_2 \simeq 62.35\,V$$

Esercizio 4.4

Dato il circuito di Fig. 4.4, trovare i valori di V_1, V_2 e V_3 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $G_1 = 1\,S$, $G_2 = 2\,S$, $G_3 = 4\,S$, $G_4 = 8\,S$, $E = 13\,V$ e $J = 1\,A$.

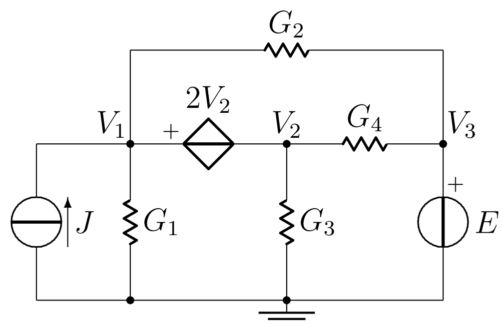


Figura 4.4: Circuito dell'esercizio 4.4

Soluzione

I nodi di V_1 e V_2 vanno considerati come un unico supernodo. Inoltre bisogna aggiungere al sistema l'equazione costitutiva del generatore dipendente di tensione ed il valore di V_3 che è noto. Le equazioni del sistema sono:

$$\begin{cases} V_1G_1 + (V_1 - V_3)G_2 + V_2G_3 + (V_1 - V_3)G_4 = J \\ V_1 - V_2 = 2V_2 \\ V_3 = E \end{cases}$$

Riordinando i termini e ponendo il tutto in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & G_3 + G_4 & -G_2 - G_4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1\,S + 2\,S & 4\,S + 8\,S & -2\,S - 8\,S \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,A \\ 0 \\ 13\,V \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni ha come soluzioni

$$V_1 \simeq 18.71\,V$$

$$V_2 \simeq \ \ 6.24\,V$$

$$V_3 = 13\,V$$

Esercizio 4.5

Dato il circuito di Fig. 4.5, trovare il valore di I_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_4 = 8\,\Omega$ ed $E = 30\,V$.

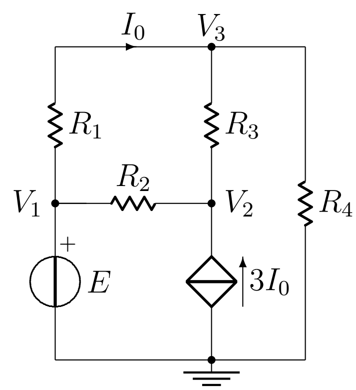


Figura 4.5: Circuito dell'esercizio 4.5

Soluzione

Alle equazioni dei nodi di V_1, V_2 e V_3 bisogna aggiungere l'equazione del generatore dipendente di corrente in funzione delle altre variabili:

$$I_0 = \frac{V_1 - V_3}{R_1}$$

Il sistema risultante è il seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{R_2} & \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} & -\dfrac{1}{R_3} & -3 \\ -\dfrac{1}{R_1} & -\dfrac{1}{R_2} & \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} & 0 \\ -\dfrac{1}{R_1} & 0 & \dfrac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{10\,\Omega} & \dfrac{1}{10\,\Omega}+\dfrac{1}{2\,\Omega} & -\dfrac{1}{2\,\Omega} & -3 \\ -\dfrac{1}{4\,\Omega} & -\dfrac{1}{10\,\Omega} & \dfrac{1}{4\,\Omega}+\dfrac{1}{2\,\Omega}+\dfrac{1}{8\,\Omega} & 0 \\ -\dfrac{1}{4\,\Omega} & 0 & \dfrac{1}{4\,\Omega} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\,V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni ha come soluzioni

$$V_1 = 30\,V$$

$$V_2 \simeq 37.16\,V$$

$$V_3 \simeq 12.82\,V$$

$$I_0 \simeq 4.925\,A$$

Esercizio 4.6

Dato il circuito di Fig. 4.6, trovare i valori di V_1 e V_2 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$, $R_3 = 8\,\Omega$, $R_4 = 1\,\Omega$, $E = 6\,V$ e $J = 3\,A$.

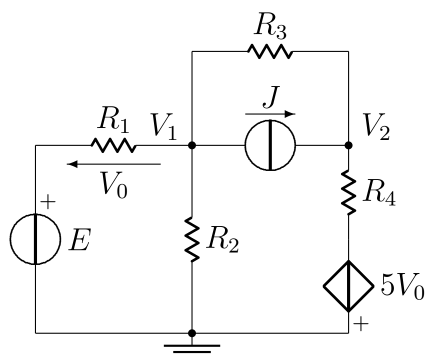


Figura 4.6: Circuito dell'esercizio 4.6

Soluzione

Scriviamo le equazioni delle correnti uscenti dai nodi di V_1 e V_2:

$$\begin{cases} \dfrac{V_1 - E}{R_1} + \dfrac{V_1}{R_2} + \dfrac{V_1 - V_2}{R_3} + J = 0 \\[2ex] \dfrac{V_2 - V_1}{R_3} + \dfrac{V_2 + 5V_0}{R_4} - J = 0 \end{cases}$$

A queste due equazioni bisogna aggiungere l'equazione costitutiva del generatore dipendente di tensione in funzione dei potenziali ai nodi:

$$V_0 = E - V_1$$

Mettendo insieme le tre equazioni e riordinando i termini si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} & -\dfrac{1}{R_3} & 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{R_3} & \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} & \dfrac{5}{R_4} \\[2ex] 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\[2ex] V_2 \\[2ex] V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{R_1} - J \\[2ex] J \\[2ex] E \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1\,\Omega}+\dfrac{1}{4\,\Omega}+\dfrac{1}{8\,\Omega} & -\dfrac{1}{8\,\Omega} & 0 \\ -\dfrac{1}{8\,\Omega} & \dfrac{1}{8\,\Omega}+\dfrac{1}{1\,\Omega} & \dfrac{5}{1\,\Omega} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{6\,V}{1\,\Omega} - 3\,A \\ 3\,A \\ 6\,V \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} V_1 &= 0\,V \\ V_2 &= -24\,V \\ V_0 &= 6\,V \end{aligned}$$

Esercizio 4.7

Dato il circuito di Fig. 4.7, trovare i valori di V_1, V_2 e V_3 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $G_1 = 2\,S$, $G_2 = 1\,S$, $G_3 = 4\,S$, $G_4 = 4\,S$, $G_5 = 1\,S$, $G_6 = 2\,S$, $J_1 = 4\,A$ e $J_2 = 8\,A$.

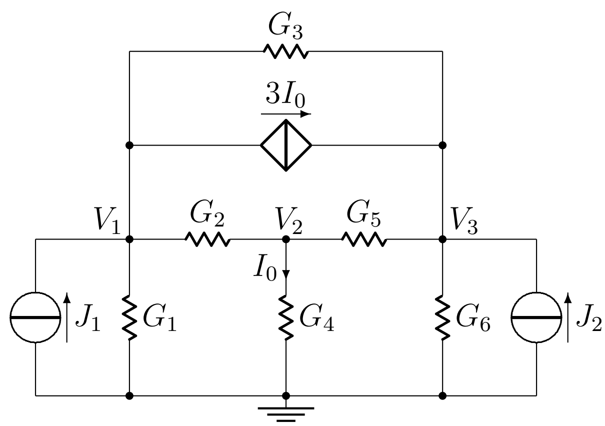


Figura 4.7: Circuito dell'esercizio 4.7

Soluzione

Considerando le equazioni delle correnti uscenti dai nodi di V_1, V_2 e V_3, e tenendo conto che la corrente che pilota il generatore dipendente vale

$$I_0 = V_2 G_4$$

si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+G_3 & -G_2 & -G_3 & 3 \\ -G_2 & G_2+G_4+G_5 & -G_5 & 0 \\ -G_3 & -G_5 & G_3+G_5+G_6 & -3 \\ 0 & G_4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ J_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 2\,S+1\,S+4\,S & -1\,S & -4\,S & 3 \\ -1\,S & 1\,S+4\,S+1\,S & -1\,S & 0 \\ -4\,S & -1\,S & 4\,S+1\,S+2\,S & -3 \\ 0 & 4\,S & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,A \\ 0 \\ 8\,A \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} &V_1 = 1.25\,V \\ &V_2 = 0.75\,V \\ &V_3 = 3.25\,V \\ &I_0 = 3\,A \end{aligned}$$

Esercizio 4.8

Dato il circuito di Fig. 4.8, trovare i valori di V_0 ed I_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 40\,\Omega$, $R_4 = 80\,\Omega$, $E_1 = 10\,V$ ed $E_2 = 12\,V$.

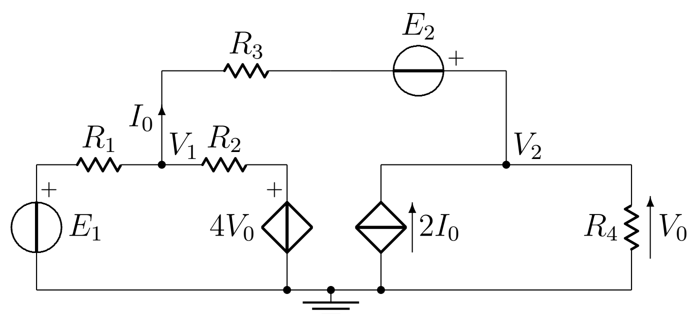


Figura 4.8: Circuito dell'esercizio 4.8

Soluzione

Si nota subito che

$$V_0 = V_2$$

Scriviamo quindi le equazioni delle correnti uscenti dai nodi di V_1 e V_2:

$$\begin{cases} \dfrac{V_1 - E_1}{R_1} + \dfrac{V_1 - 4V_2}{R_2} + \dfrac{V_1 - V_2 + E_2}{R_3} = 0 \\[2ex] \dfrac{V_2}{R_4} + \dfrac{V_2 - V_1 - E_2}{R_3} - 2I_0 = 0 \end{cases}$$

Le equazioni sono 2 ma le incognite sono 3, bisogna perciò aggiungere un'altra equazione:

$$I_0 = \frac{V_1 - V_2 + E_2}{R_3}$$

Mettendo insieme le tre equazioni e riordinando i termini si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3}-\frac{4}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -2 \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{R_1}-\frac{E_2}{R_3} \\ \frac{E_2}{R_3} \\ \frac{E_2}{R_3} \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10\,\Omega}+\frac{1}{20\,\Omega}+\frac{1}{40\,\Omega} & -\frac{1}{40\,\Omega}-\frac{4}{20\,\Omega} & 0 \\ -\frac{1}{40\,\Omega} & \frac{1}{40\,\Omega}+\frac{1}{80\,\Omega} & -2 \\ -\frac{1}{40\,\Omega} & \frac{1}{40\,\Omega} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10\,V}{10\,\Omega}-\frac{12\,V}{40\,\Omega} \\ \frac{12\,V}{40\,\Omega} \\ \frac{12\,V}{40\,\Omega} \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_1 = -168.8\,V$$

$$V_2 = V_0 = -134.4\,V$$

$$I_0 = -0.56\,A$$

Esercizio 4.9

Dato il circuito di Fig. 4.9, trovare i valori di V_1, V_2 e V_3 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 1\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$, $R_5 = 2\,\Omega$, $E = 5\,V$ e $J = 1\,A$.

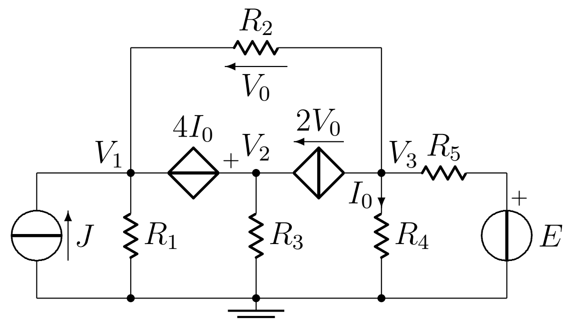
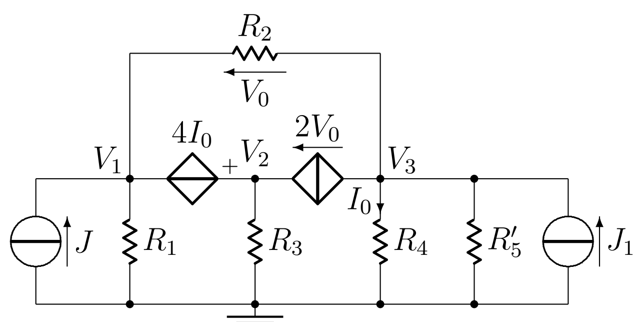


Figura 4.9: Circuito dell'esercizio 4.9

Soluzione

Come prima operazione conviene trasformare il ramo di destra nel suo equivalente Norton:



dove $J_1 = \dfrac{E}{R_5} = 2.5\,A$ ed $R_5' = R_5$

Considerando il ramo contenente il generatore dipendente di tensione come un unico supernodo, ed aggiungendo le equazioni che legano le incognite V_0 ed I_0 alle tensioni nodali, si giunge al seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{R_1} + \dfrac{V_1 - V_3}{R_3} + \dfrac{V_2}{R_2} - 2V_0 - J = 0 \\[2ex] \dfrac{V_3}{R_4} + \dfrac{V_3}{R_5'} + \dfrac{V_3 - V_1}{R_3} + 2V_0 - J_1 = 0 \\[2ex] V_2 - V_1 = 4I_0 \\[2ex] V_0 = V_1 - V_3 \\[2ex] I_0 = \dfrac{V_3}{R_4} \end{cases}$$

Riordinando i termini e ponendo il tutto in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3} & \dfrac{1}{R_2} & -\dfrac{1}{R_3} & -2 & 0 \\[2ex] -1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\[2ex] -\dfrac{1}{R_3} & 0 & \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5'} & 2 & 0 \\[2ex] -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\[2ex] 0 & 0 & -\dfrac{1}{R_4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\[1ex] V_2 \\[1ex] V_3 \\[1ex] V_0 \\[1ex] I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\[1ex] 0 \\[1ex] J_1 \\[1ex] 0 \\[1ex] 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{4\,\Omega} + \dfrac{1}{1\,\Omega} & \dfrac{1}{1\,\Omega} & -\dfrac{1}{1\,\Omega} & -2 & 0 \\[2ex] -1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\[2ex] -\dfrac{1}{1\,\Omega} & 0 & \dfrac{1}{1\,\Omega} + \dfrac{1}{4\,\Omega} + \dfrac{1}{2\,\Omega} & 2 & 0 \\[2ex] -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\[2ex] 0 & 0 & -\dfrac{1}{4\,\Omega} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\[1ex] V_2 \\[1ex] V_3 \\[1ex] V_0 \\[1ex] I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,A \\[1ex] 0 \\[1ex] 2.5\,A \\[1ex] 0 \\[1ex] 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_1 \simeq 2.545\,V$$

$$V_2 \simeq 2.727\,V$$

$$V_3 \simeq 0.182\,V$$

$$V_0 \simeq 2.364\,V$$

$$I_0 \simeq 45.45\,mA$$

Esercizio 4.10

Dato il circuito di Fig. 4.10, trovare i valori di V_1, V_2 e V_3. Siano dati $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 8\,\Omega$, $E_1 = 10\,V$, $E_2 = 12\,V$, $E_3 = 20\,V$ e $J = 1\,A$.

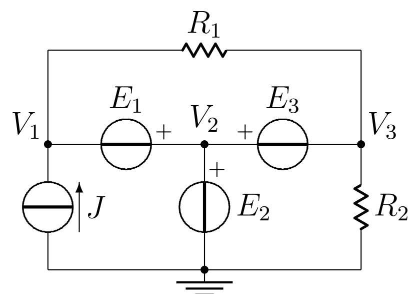


Figura 4.10: Circuito dell'esercizio 4.10

Soluzione

Dall'analisi del circuito si vede immediatamente che

$$V_1 = E_2 - E_1 = 2\,V$$

$$V_2 = E_2 = 12\,V$$

$$V_3 = E_2 - E_3 = -8\,V$$

Capitolo 5

Sovrapposizione degli effetti

Esercizio 5.1

Dato il circuito di Fig. 5.1, trovare il valore di i_x e la potenza P_x dissipata su R_2 usando il metodo della sovrapposizione degli effetti. Siano dati $R_1 = 24\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 80\,\Omega$, $E = 30\,V$ e $J = 2\,A$.

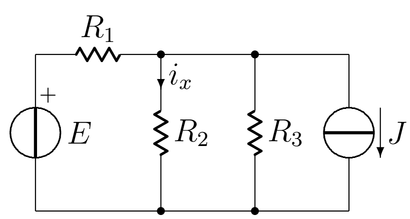
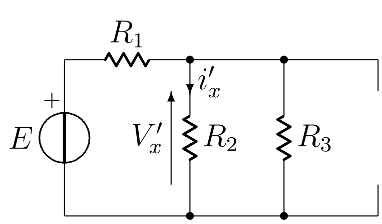


Figura 5.1: Circuito dell'esercizio 4.7

Soluzione

Per calcolare la i_x dovuta al generatore di tensione E si spegne il generatore di corrente J. Il circuito risultante è il seguente



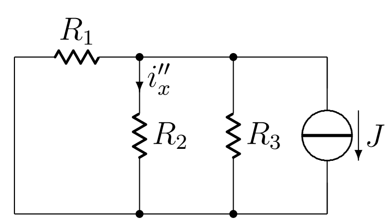
Per il calcolo di i'_x conviene prima trovare la tensione ai capi del parallelo tra R_2 ed R_3

$$V'_x = E\frac{R_2 \| R_3}{R_1 + (R_2 \| R_3)} = 30\,V \frac{20\,\Omega \| 80\,\Omega}{24\,\Omega + (20\,\Omega \| 80\,\Omega)} = 12\,V$$

da cui

$$i'_x = \frac{V'_x}{R_2} = \frac{12\,V}{20\,\Omega} = 0.6\,A$$

Per calcolare la i_x dovuta al generatore di corrente J si spegne il generatore di tensione E. Il circuito risultante è il seguente



Il valore di i''_x è dato da un semplice partitore di corrente.

$$i''_x = -J\frac{R_1 \| R_3}{R_2 + (R_1 \| R_3)} = -2\,A \frac{24\,\Omega \| 80\,\Omega}{20\,\Omega + (24\,\Omega \| 80\,\Omega)} = -0.96\,A$$

Mettendo insieme i due risultati si ha

$$i_x = i'_x + i''_x = 0.6\,A - 0.96\,A = -0.36\,A$$

e

$$P_x = R_2 \cdot i_x^2 = 20\,\Omega \cdot (-0.36\,A)^2 = 2.592\,W$$

Esercizio 5.2

Dato il circuito di Fig. 5.2, trovare il valore di i_x e la potenza P_x dissipata su R_3 usando il metodo della sovrapposizione degli effetti. Siano dati $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 6\,\Omega$, $R_4 = 8\,\Omega$, $E_1 = 40\,V$, $E_2 = 32\,V$ e $J = 2\,A$.

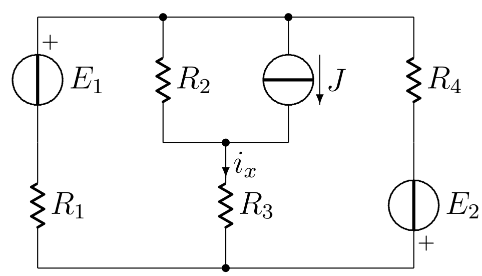
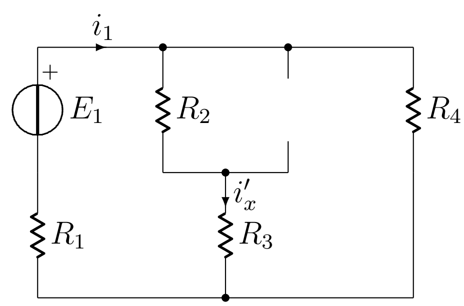


Figura 5.2: Circuito dell'esercizio 4.12

Soluzione

Primo effetto



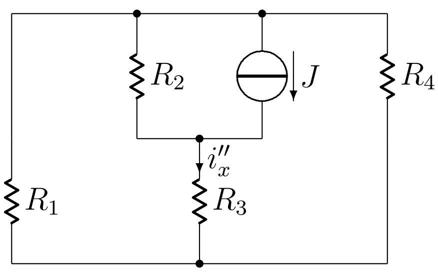
Per calcolare i'_x conviene prima calcolare i_1:

$$i_1 = \frac{E_1}{R_1 + [(R_2 + R_3)\|R_4]} = \frac{40\,V}{4\,\Omega + [(2\,\Omega + 6\,\Omega)\|8\,\Omega]} = 5\,A$$

Il valore di i'_x si ricava facendo un partitore di corrente:

$$i'_x = i_1 \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 5\,A \frac{8\,\Omega}{2\,\Omega + 6\,\Omega + 8\,\Omega} = 2.5\,A$$

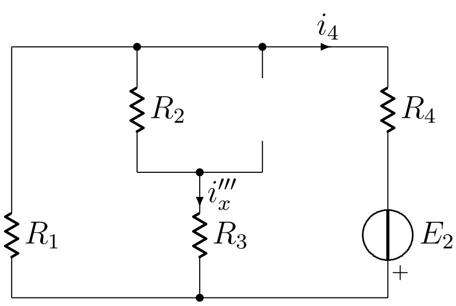
Secondo effetto



Il parallelo delle resistenze R_1 e R_4 è in serie ad R_3, quindi i''_x si trova con un partitore di corrente:

$$i''_x = J \frac{R_2}{R_2 + R_3 + (R_4 \| R_1)} = 2\,A \frac{2\,\Omega}{2\,\Omega + 6\,\Omega + (4\,\Omega \| 8\,\Omega)} = 0.375\,A$$

Terzo effetto



Per calcolare i'''_x conviene prima calcolare i_4:

$$i_4 = \frac{E_2}{R_4 + [(R_3 + R_2) \| R_1]} = \frac{32\,V}{8\,\Omega + [(6\,\Omega + 2\,\Omega) \| 4\,\Omega]} = 3\,A$$

Il valore di i'''_x si ricava facendo un partitore di corrente:

$$i'''_x = -i_4 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = -3\,A \frac{4\,\Omega}{4\,\Omega + 2\,\Omega + 6\,\Omega} = -1\,A$$

Complessivo

La corrente i_x vale

$$i_x = i'_x + i''_x + i'''_x = 2.5\,A + 0.375\,A - 1\,A = 1.875\,A$$

mentre P_x vale

$$P_x = R_3 \cdot i_x^2 \simeq 21.1\,W$$

Esercizio 5.3

Dato il circuito di Fig. 5.3, trovare il valore di i_0 usando il metodo della sovrapposizione degli effetti. Siano dati $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 6\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$, $R_5 = 10\,\Omega$, $E = 24\,V$, $J_1 = 4\,A$ e $J_2 = 2\,A$.

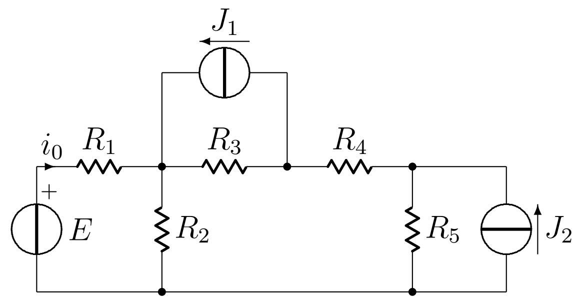
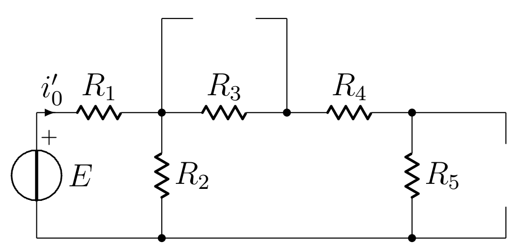


Figura 5.3: Circuito dell'esercizio 4.13

Soluzione

Primo effetto



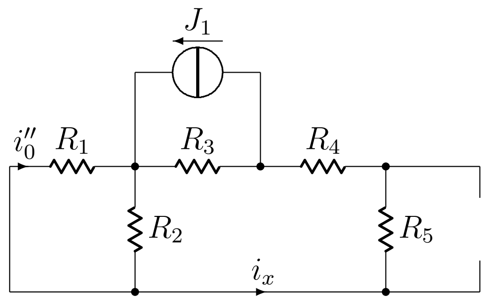
La corrente i'_0 è la corrente erogata dal generatore di tensione E

$$i'_0 = \frac{E}{R_1 + [R_2 \| (R_3 + R_4 + R_5)]} = \frac{24\,V}{8\,\Omega + [20\,\Omega \| (6\,\Omega + 4\,\Omega + 10\,\Omega)]} \simeq 1.33\,A$$

Secondo effetto

Calcoliamo prima i_x con un partitore di corrente

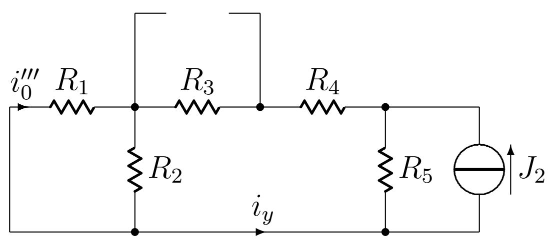
$$i_x = J_1 \frac{R_3}{R_3 + R_4 + R_5 + (R_1 \| R_2)} = 4\,A \frac{6\,\Omega}{6\,\Omega + 4\,\Omega + 10\,\Omega + (8\,\Omega \| 20\,\Omega)} \simeq 0.93\,A$$



da cui

$$i_0'' = -i_x \frac{R_2}{R_2 + R_1} = -0.93\,A \frac{20\,\Omega}{20\,\Omega + 8\,\Omega} \simeq -0.67\,A$$

Terzo effetto



Calcoliamo prima i_y con un partitore di corrente

$$i_y = J_2 \frac{R_5}{R_5 + R_4 + R_3 + (R_1 \| R_2)} = 2\,A \frac{10\,\Omega}{10\,\Omega + 4\,\Omega + 6\,\Omega + (8\,\Omega \| 20\,\Omega)} \simeq 0.78\,A$$

da cui

$$i_0''' = -i_y \frac{R_2}{R_2 + R_1} = -0.78\,A \frac{20\,\Omega}{20\,\Omega + 8\,\Omega} \simeq -0.55\,A$$

Complessivo

La corrente i_0 vale

$$i_0 = i_0' + i_0'' + i_0''' = 1.33\,A - 0.67\,A - 0.55\,A \simeq 0.11\,A$$

Capitolo 6

Circuiti equivalenti di Thevenin e Norton

Esercizio 6.1

Dato il circuito di Fig. 6.1, trovare il circuito equivalente di Thevenin tra i morsetti a e b. Siano dati $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_4 = 2\,\Omega$, $R_5 = 1\,\Omega$, $R_6 = 1\,\Omega$, $E_1 = 3\,V$, $E_2 = 2\,V$ e $J = 5\,A$.

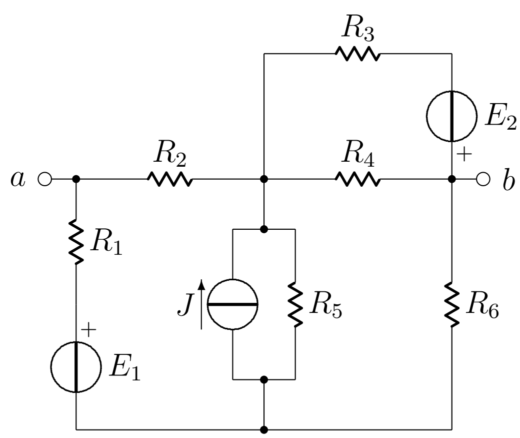
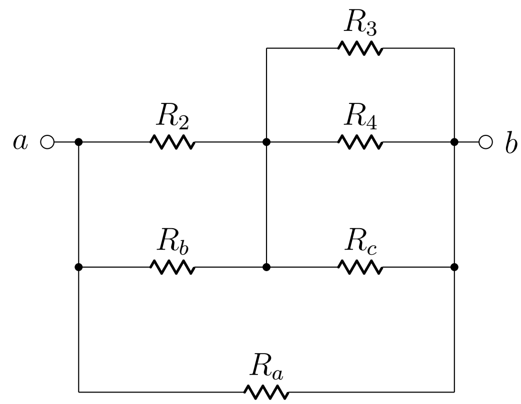


Figura 6.1: Circuito dell'esercizio 4.48

Soluzione

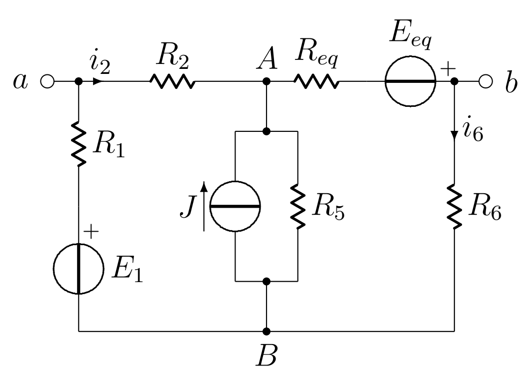
Resistenza equivalente
Spegnendo i generatori di corrente e di tensione e trasformando in triangolo la stella costituita dai resistori R_1, R_5 ed R_6, si ha



dove $R_a = R_b = R_c = 3\,\Omega$, da cui

$$R_{ab} = R_a \| [(R_b \| R_2) + (R_3 \| R_4 \| R_c)] = 3\,\Omega \| [(3\,\Omega \| 1\,\Omega) + (2\,\Omega \| 2\,\Omega \| 3\,\Omega)] = 1\,\Omega$$

Tensione a vuoto
Il metodo più veloce consiste nel trasformare il gruppo R_3-R_4-E_2 nel suo equivalente Thevenin:



dove

$$R_{eq} = R_3 \| R_4 = 2\,\Omega \| 2\,\Omega = 1\,\Omega$$

$$E_{eq} = E_2 \frac{R_4}{R_4 + R_3} = 1\,V$$

La tensione a vuoto V_{ab} è data da

$$V_{ab} = R_2 \cdot i_2 + R_{eq} \cdot i_6 - E_{eq}$$

Per calcolare le correnti incognite conviene applicare il teorema di Millman ai nodi A e B:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1+R_2} + J - \frac{E_{eq}}{R_{eq}+R_6}}{\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{eq}+R_6}} = 3\,V$$

da cui

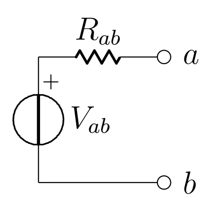
$$i_2 = \frac{E_1 - V_{AB}}{R_1+R_2} = 0\,A$$

$$i_6 = \frac{V_{AB}+E_{eq}}{R_{eq}+R_6} = \frac{3\,V+1\,V}{1\,\Omega+1\,\Omega} = 2\,A$$

e quindi

$$V_{ab} = R_2 \cdot i_2 + R_{eq} \cdot i_6 - E_{eq} = 1\,V$$

Circuito equivalente di Thevenin



Esercizio 6.2

Dato il circuito di Fig. 6.2, trovare il circuito equivalente di Thevenin tra i morsetti a e b, e tra i morsetti b e c. Siano dati $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$, $R_3 = 8\,\Omega$, $R_4 = 10\,\Omega$, $R_5 = 2\,\Omega$, $E = 48\,V$ e $J = 2\,A$.

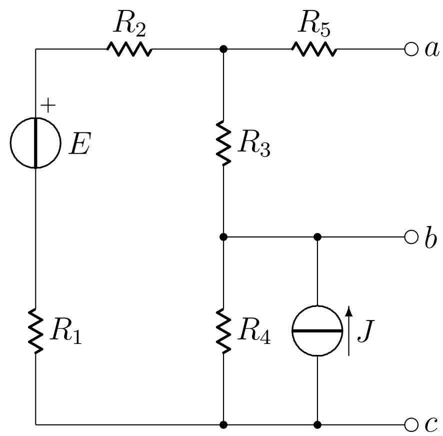


Figura 6.2: Circuito dell'esercizio 4.35

Soluzione

Resistenze equivalenti
Spegnendo i generatori di corrente e di tensione si ha

$$R_{ab} = (R_1 + R_2 + R_4)\|R_3 + R_5 = (4\,\Omega + 6\,\Omega + 10\,\Omega)\|8\,\Omega + 2\,\Omega \simeq 7.71\,\Omega$$

$$R_{bc} = (R_1 + R_2 + R_3)\|R_4 = (4\,\Omega + 6\,\Omega + 8\,\Omega)\|10\,\Omega \simeq 6.43\,\Omega$$

Tensioni a vuoto
Per semplificare i conti conviene trasformare il gruppo R_4-J nel suo equivalente Thevenin:

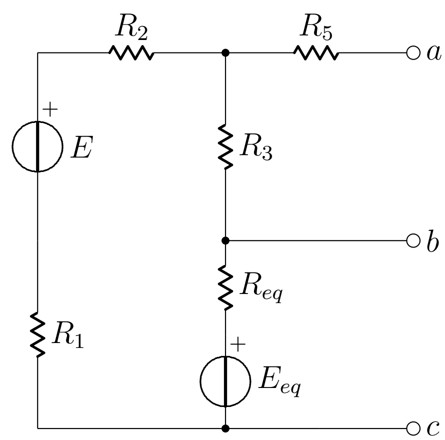
dove

$$R_{eq} = R_4 = 10\,\Omega$$

$$E_{eq} = J \cdot R_4 = 20\,V$$

La tensione a vuoto V_{ab} è data da

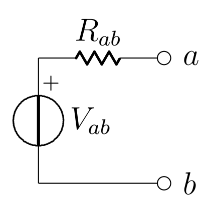
$$V_{ab} = (E - E_{eq})\frac{R_3}{R_3 + R_1 + R_2 + R_{eq}} = (48\,V - 20\,V)\frac{8\,\Omega}{8\,\Omega + 4\,\Omega + 6\,\Omega + 10\,\Omega} = 8\,V$$



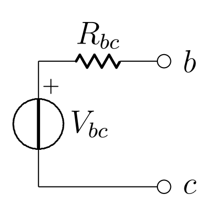
mentre la tensione V_{bc} è data da

$$V_{bc} = \frac{\frac{E}{R_1+R_2+R_3} + \frac{E_{eq}}{R_4}}{\frac{1}{R_1+R_2+R_3} + \frac{1}{R_4}} = 30\,V$$

Circuito equivalente di Thevenin tra i morsetti a e b



Circuito equivalente di Thevenin tra i morsetti b e c



Esercizio 6.3

Dato il circuito di Fig. 6.3, trovare il circuito equivalente di Norton tra i morsetti a e b. Siano dati $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $E = 4\,V$ e $J = 3\,A$.

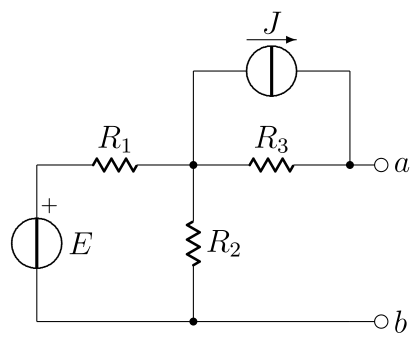


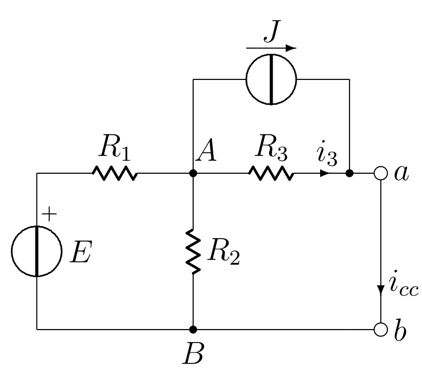
Figura 6.3: Circuito dell'esercizio 4.39

Soluzione

Resistenza equivalente
Spegnendo i generatori di corrente e di tensione si ha

$$R_{ab} = (R_1 \| R_2) + R_3 = (1\,\Omega \| 4\,\Omega) + 2\,\Omega = 2.8\,\Omega$$

Corrente di corto circuito
Il circuito diventa:



La corrente di corto circuito è data da

$$i_{cc} = i_3 + J$$

Per calcolare la corrente i_3 conviene applicare il teorema di Millman tra i nodi A e B:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E}{R_1} - J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \simeq 0.57\,V$$

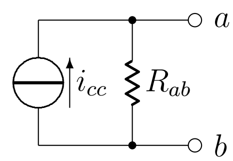
da cui

$$i_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} = \frac{0.57\,V}{2\,\Omega} = 0.285\,A$$

e quindi

$$i_{cc} = i_3 + J = 0.285\,A + 3\,A = 3.285\,A$$

Circuito equivalente di Norton



Esercizio 6.4

Dato il circuito di Fig. 6.4, trovare i circuiti equivalenti di Thevenin e Norton tra i morsetti a e b. Siano dati $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$ e $J = 8\,A$.

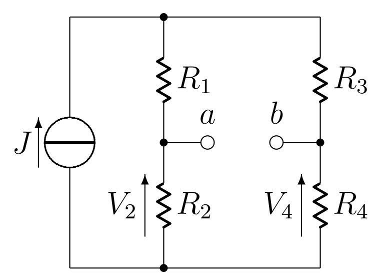


Figura 6.4: Circuito dell'esercizio 4.48

Soluzione

Resistenza equivalente
Spegnendo il generatore di corrente J si ha

$$R_{eq} = (R_1 + R_3)\|(R_2 + R_4) = (1\,\Omega + 2\,\Omega)\|(5\,\Omega + 4\,\Omega) = 2.25\,\Omega$$

Tensione a vuoto
La tensione a vuoto V_{ab} è data da

$$V_{ab} = V_2 - V_4$$

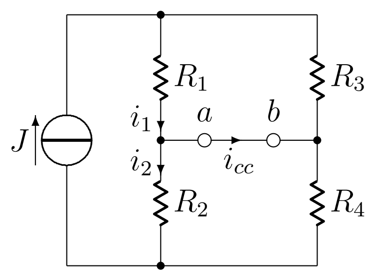
inoltre

$$V_2 = R_2 \cdot J \tfrac{R_3+R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4} = 5\,\Omega \cdot 8\,A \tfrac{2\,\Omega+4\,\Omega}{1\,\Omega+5\,\Omega+2\,\Omega+4\,\Omega} = 20\,V$$

$$V_4 = R_4 \cdot J \tfrac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_3+R_4} = 4\,\Omega \cdot 8\,A \tfrac{1\,\Omega+5\,\Omega}{1\,\Omega+5\,\Omega+2\,\Omega+4\,\Omega} = 16\,V$$

e quindi

$$V_{ab} = V_2 - V_4 = 20\,V - 16\,V = 4\,V$$



Corrente di corto circuito
Il circuito diventa così

La corrente i_{cc} è data da

$$i_{cc} = i_1 - i_2$$

dove

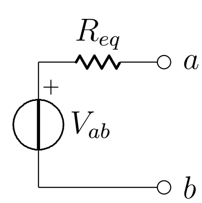
$$i_1 = J\frac{R_3}{R_3+R_1} = 8\,A\frac{2\,\Omega}{2\,\Omega+1\,\Omega} \simeq 5.33\,A$$

$$i_2 = J\frac{R_4}{R_4+R_2} = 8\,A\frac{4\,\Omega}{4\,\Omega+5\,\Omega} \simeq 3.55\,A$$

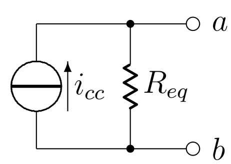
da cui

$$i_{cc} = i_1 - i_2 = 5.33\,A - 3.55\,A \simeq 1.78\,A$$

Circuito equivalente di Thevenin



Circuito equivalente di Norton


a
i_{cc}
R_{eq}
b

Capitolo 7

Fasori

Esercizio 7.1

Calcolare i numeri complessi risultanti dalle seguenti espressioni ed esprimerli in forma cartesiana.

(a) $\dfrac{15\angle 45°}{3 - \mathrm{j}4} + \mathrm{j}2$

(b) $\dfrac{8\angle(-20°)}{(2+\mathrm{j})(3-\mathrm{j}4)} + \dfrac{10}{-5+\mathrm{j}12}$

(c) $10 + (8\angle 50°)(5 - \mathrm{j}12)$

(d) $2 + \dfrac{3+\mathrm{j}4}{5-\mathrm{j}8}$

(e) $4\angle(-10°) + \dfrac{1-\mathrm{j}2}{3\angle 6°}$

(f) $\dfrac{8\angle 10° + 6\angle(-20°)}{9\angle 80° - 4\angle 50°}$

Soluzione

(a) $\dfrac{15\angle 45°}{3 - \mathrm{j}4} + \mathrm{j}2 = \dfrac{10.6 + \mathrm{j}10.6}{3 - \mathrm{j}4} + \mathrm{j}2 = -0.42 + \mathrm{j}2.97 + \mathrm{j}2 = -0.42 + \mathrm{j}4.97$

(b) $\dfrac{8\angle(-20°)}{(2+\mathrm{j})(3-\mathrm{j}4)} + \dfrac{10}{-5+\mathrm{j}12} = \dfrac{7.52 - \mathrm{j}2.74}{10 - \mathrm{j}5} - 0.3 - \mathrm{j}0.71 =$

$= 0.71 + \mathrm{j}0.08 - 0.3 - \mathrm{j}0.71 = 0.41 - \mathrm{j}0.63$

(c) $10+(8\angle 50°)(5-\mathrm{j}12) = 10+(5.14+\mathrm{j}6.13)(5-\mathrm{j}12) = 10+99.25-\mathrm{j}31.07 =$

$= 109.25 - \mathrm{j}31.07$

(d) $2 + \dfrac{3+\mathrm{j}4}{5-\mathrm{j}8} = 2 - 0.19 + \mathrm{j}0.49 = 1.81 + \mathrm{j}0.49$

(e) $4\angle(-10°) + \dfrac{1-\mathrm{j}2}{3\angle 6°} = 3.94 - \mathrm{j}0.69 + \dfrac{1-\mathrm{j}2}{2.98+\mathrm{j}0.31} =$

$= 3.94 - \mathrm{j}0.69 + 0.26 - \mathrm{j}0.7 = 4.2 - \mathrm{j}1.39$

(f) $\dfrac{8\angle 10° + 6\angle(-20°)}{9\angle 80° - 4\angle 50°} = \dfrac{7.88+\mathrm{j}1.39+5.64-\mathrm{j}2.05}{1.56+\mathrm{j}8.86-2.57-\mathrm{j}3.06} = \dfrac{13.52-\mathrm{j}0.66}{-1.01+\mathrm{j}5.8} =$

$= -0.5 - \mathrm{j}2.24$

Esercizio 7.2

Calcolare le sinusoidi corrispondenti a ciascuno dei seguenti fasori.

(a) $V_1 = 60\angle 15^\circ$, $\qquad \omega = 1\,rad/s$

(b) $V_2 = 6 + \mathrm{j}8$, $\qquad \omega = 40\,rad/s$

(c) $I_1 = 2.8\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}$, $\qquad \omega = 377\,rad/s$

(d) $I_2 = -0.5 - \mathrm{j}1.2$, $\qquad \omega = 1000\,rad/s$

Soluzione

(a) $v_1 = 60\cos(t + 15^\circ)\,V$

(b) $V_2 = 6 + \mathrm{j}8 = 10\angle 53.1^\circ \Rightarrow v_2 = 10\cos(40t + 53.1^\circ)\,V$

(c) $I_1 = 2.8\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3} = 2.8\angle(-60^\circ) \Rightarrow i_1 = 2.8\cos(377t - 60^\circ)\,A$

(d) $I_2 = -0.5 - \mathrm{j}1.2 = 1.3\angle(-112.6^\circ) \Rightarrow i_2 = 1.3\cos(1000t - 112.6^\circ)\,A$

Esercizio 7.3

Calcolare le seguenti espressioni utilizzando i fasori.

(a) $3\cos(50t + 10°) - 5\cos(50t - 30°)$

(b) $40\sin 30t + 30\cos(30t - 45°)$

(c) $20\sin 100t + 10\cos(100t + 60°) - 5\sin(100t - 20°)$

Soluzione

(a) Passando ai fasori si ha

$$3\angle 10° - 5\angle(-30°) = 2.95 + \mathrm{j}0.52 - 4.33 + \mathrm{j}2.5 = -1.38 + \mathrm{j}3.02 = 3.32\angle 114°$$

e quindi

$$3\cos(50t + 10°) - 5\cos(50t - 30°) = 3.32\cos(50t + 114°)$$

(b) Passando ai fasori si ha

$$-\mathrm{j}40 + 30\angle(-45°) = -\mathrm{j}40 + 21.21 - \mathrm{j}21.21 = 21.21 - \mathrm{j}61.21 = 64.78\angle(-70.9°)$$

e quindi

$$40\sin 30t + 30\cos(30t - 45°) = 64.78\cos(30t - 70.9°)$$

(c) Passando ai fasori si ha

$$-\mathrm{j}20 + 10\angle 60° - 5\angle(-110°) = -\mathrm{j}20 + 5 + \mathrm{j}8.66 + 1.71 + \mathrm{j}4.7 = 9.44\angle(-44.7°)$$

e quindi

$$20\sin 100t + 10\cos(100t + 60°) - 5\sin(100t - 20°) = 9.44\cos(100t - 44.7°)$$

Capitolo 8

Reti dinamiche

Esercizio 8.1

Dato il circuito di Fig. 8.1, trovare il valore di I_0. Siano dati $Z_1 = 4\,\Omega$, $Z_2 = -\mathrm{j}4\,\Omega$, $Z_3 = \mathrm{j}8\,\Omega$, $Z_4 = -\mathrm{j}4\,\Omega$, $Z_5 = 4\,\Omega$ e $J = 5\,A$.

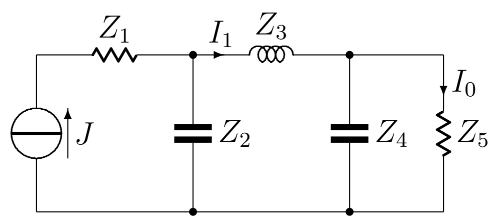


Figura 8.1: Circuito dell'esercizio 9.38

Soluzione

Con un primo partitore di corrente si calcola la corrente I_1:

$$I_1 = J\frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + (Z_4 \| Z_5)} = 5\,A\frac{-\mathrm{j}4\,\Omega}{-\mathrm{j}4\,\Omega + \mathrm{j}8\,\Omega + (-\mathrm{j}4\,\Omega \| 4\,\Omega)} = -2 - \mathrm{j}\,A$$

e con un secondo partitore si trova la corrente I_0:

$$I_0 = I_1\frac{Z_4}{Z_4 + Z_5} = (-2 - \mathrm{j})\,A\frac{-\mathrm{j}4\,\Omega}{-\mathrm{j}4\,\Omega + 4\,\Omega} = -1.5 + \mathrm{j}0.5\,A$$

Esercizio 8.2

Dato il circuito di Fig. 8.2, trovare il valore di Z. Siano dati $Z_1 = 12\,\Omega$, $Z_2 = -\mathrm{j}4\,\Omega$, $Z_3 = \mathrm{j}8\,\Omega$, $E = 10\angle(-90°)\,V$ e $V_0 = 4\angle 0\,V$.

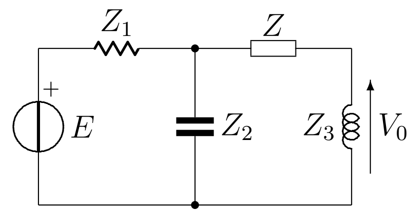
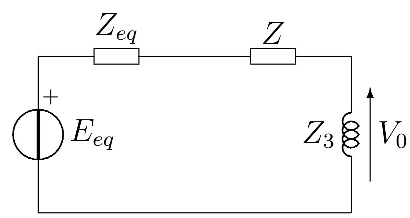


Figura 8.2: Circuito dell'esercizio 9.44

Soluzione

Prima di procedere con i calcoli conviene trasformare il lato sinistro del circuito nel suo equivalente Thevenin:



con

$$V_{eq} = E\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = 10\angle(-90°)\,V\,\frac{-\mathrm{j}4\,\Omega}{12\,\Omega - \mathrm{j}4\,\Omega} = (-3 - \mathrm{j})\,V$$

$$Z_{eq} = Z_1 \| Z_2 = 12\,\Omega \| (-\mathrm{j}4\,\Omega) = (1.2 - \mathrm{j}3.6)\,\Omega$$

A questo punto basta scrivere una relazione che leghi la tensione V_0 agli gli altri parametri del circuito:

$$V_0 = V_{eq}\frac{Z_3}{Z_{eq} + Z + Z_3}$$

da cui

$$Z = Z_3\frac{V_{eq}}{V_0} - Z_{eq} - Z_3 = (0.8 - \mathrm{j}10.4)\,\Omega$$

Esercizio 8.3

Dato il circuito di Fig. 8.3, trovare il valore di Z_{eq}. Siano dati $Z_1 = (2+\mathrm{j}6)\,\Omega$, $Z_2 = (2-\mathrm{j}2)\,\Omega$, $Z_3 = \mathrm{j}10\,\Omega$ e $Z_4 = (2+\mathrm{j}4)\,\Omega$.

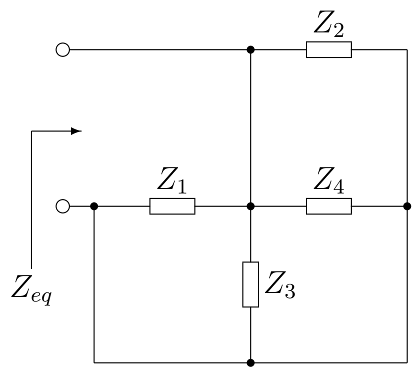


Figura 8.3: Circuito dell'esercizio 9.47

Soluzione

Le quattro impedenze sono tutte in parallelo tra di loro:

$$Z_{eq} = \frac{1}{\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3} + \dfrac{1}{Z_4}} = (2+\mathrm{j})\,\Omega$$

Esercizio 8.4

Dato il circuito di Fig. 8.4, calcolare i valori di Z e di I. Siano dati $Z_1 = 2\,\Omega$, $Z_2 = 4\,\Omega$, $Z_3 = -\mathrm{j}6\,\Omega$, $Z_4 = 3\,\Omega$, $Z_5 = \mathrm{j}4\,\Omega$ ed $E = 60\angle 10^\circ\, V$.

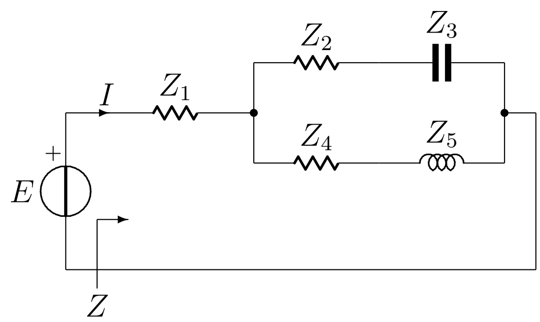


Figura 8.4: Circuito dell'esercizio 9.49

Soluzione

Il valore di Z è dato da:

$$Z = Z_1 + (Z_2 + Z_3) \| (Z_4 + Z_5) = 2\,\Omega + (4\,\Omega - \mathrm{j}6\,\Omega) \| (3\,\Omega + \mathrm{j}4\,\Omega) = (6.83 + \mathrm{j}1.094)\,\Omega$$

Il valore di I è invece dato da:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{60\angle 10^\circ\, V}{(6.83 + \mathrm{j}1.094)\,\Omega} = (8.67 + \mathrm{j}0.136)\, A$$

Esercizio 8.5

Dato il circuito di Fig. 8.5, calcolare lo scostamento di fase tra ingresso ed uscita, determinare se lo scostamento di fase è in anticipo o in ritardo (uscita rispetto ingresso), e calcolare il valore dell'uscita se l'ingresso V_i vale $60\,V$. Siano dati $Z_1 = 20\,\Omega$, $Z_2 = \mathrm{j}10\,\Omega$, $Z_3 = 40\,\Omega$, $Z_4 = \mathrm{j}30\,\Omega$, $Z_5 = 30\,\Omega$ e $Z_6 = \mathrm{j}60\,\Omega$.

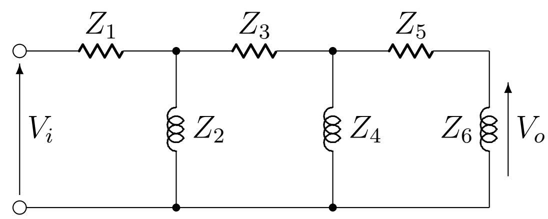


Figura 8.5: Circuito dell'esercizio 9.61

Soluzione

Il circuito è un filtro passa-alto. Attraverso una serie di partitori di tensione si può giungere ad una relazione che lega V_o a V_i:

$$V_o = V_i \left[\frac{Z_2 \| (Z_3 + Z_4 \| (Z_5 + Z_6))}{Z_1 + Z_2 \| (Z_3 + Z_4 \| (Z_5 + Z_6))} \right] \left[\frac{Z_4 \| (Z_5 + Z_6)}{Z_3 + Z_4 \| (Z_5 + Z_6)} \right] \left[\frac{Z_6}{Z_5 + Z_6} \right]$$

sostituendo i valori numerici si ha:

$$\frac{V_o}{V_i} = (0.206 + \mathrm{j}0.328)(0.249 + \mathrm{j}0.367)(0.8 + \mathrm{j}0.4) = -0.118 + \mathrm{j}0.098$$

Lo scostamento di fase è dato dall'argomento del numero complesso appena calcolato:

$$\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{0.098}{-0.118}\right) = 140.2^\circ$$

Questo scostamento di fase è positivo, quindi è in anticipo.

Per calcolare il valore dell'uscita con un ingresso di $60\,V$ si utilizza la relazione calcolata in precedenza:

$$V_o = V_i(-0.118 + \mathrm{j}0.098) = 60\,V(-0.118 + \mathrm{j}0.098) = 9.2\angle 140.2^\circ\,V$$

Esercizio 8.6

Dato il circuito di Fig. 8.6, calcolare il valore di i_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $C = 50\,\mu F$, $L = 10\,mH$ e $j = 10\sin(1000t)\,A$.

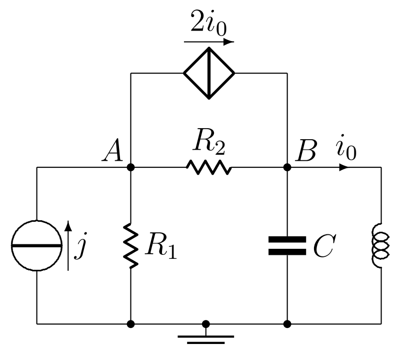
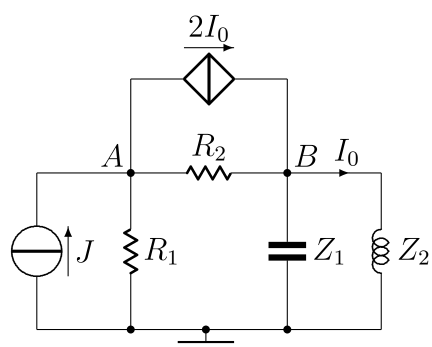


Figura 8.6: Circuito dell'esercizio 10.7

Soluzione

Passiamo ai fasori:



dove

$$\omega = 1000\,rad/s$$

$$J = -\mathrm{j}10\,A$$

$$Z_1 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}20\,\Omega$$

$$Z_2 = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}10\,\Omega$$

inoltre

$$I_0 = \frac{V_B}{Z_2}$$

Il nodo di riferimento è il nodo di massa. Scriviamo le equazioni delle tensioni ai nodi A e B:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 2 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20\,\Omega} + \frac{1}{10\,\Omega} & -\frac{1}{10\,\Omega} & 2 \\ -\frac{1}{10\,\Omega} & \frac{1}{10\,\Omega} + \frac{1}{-\mathrm{j}20\,\Omega} + \frac{1}{\mathrm{j}10\,\Omega} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{\mathrm{j}10\,\Omega} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{j}10\,A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_A = (-160 + \mathrm{j}280)\,V$$

$$V_B = (80 + \mathrm{j}160)\,V$$

$$I_0 = (16 - \mathrm{j}8)\,A$$

e quindi

$$i_0 = 17.89\cos(1000t - 26.56°)\,A$$

Esercizio 8.7

Dato il circuito di Fig. 8.7, calcolare il valore di I_0 utilizzando il metodo dei nodi. Siano dati $Z_1 = \mathrm{j}4\,\Omega$, $Z_2 = 3\,\Omega$, $Z_3 = 2\,\Omega$, $Z_4 = 1\,\Omega$, $Z_5 = -\mathrm{j}2\,\Omega$ ed $E = 50\angle 20°\,V$.

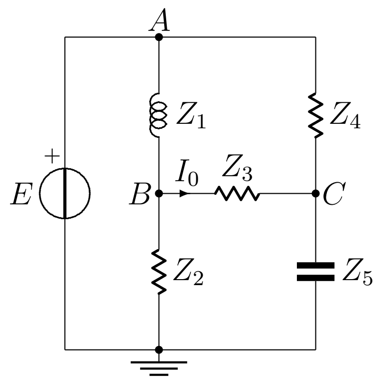


Figura 8.7: Circuito dell'esercizio 10.11

Soluzione

Il nodo di riferimento è il nodo di massa. Scriviamo le equazioni delle tensioni ai nodi A, B e C:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{Z_1} & \dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2}+\dfrac{1}{Z_3} & -\dfrac{1}{Z_3} \\ -\dfrac{1}{Z_4} & -\dfrac{1}{Z_3} & \dfrac{1}{Z_3}+\dfrac{1}{Z_4}+\dfrac{1}{Z_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{\mathrm{j}4\,\Omega} & \dfrac{1}{\mathrm{j}4\,\Omega}+\dfrac{1}{3\,\Omega}+\dfrac{1}{2\,\Omega} & -\dfrac{1}{2\,\Omega} \\ -\dfrac{1}{1\,\Omega} & -\dfrac{1}{2\,\Omega} & \dfrac{1}{2\,\Omega}+\dfrac{1}{1\,\Omega}+\dfrac{1}{-\mathrm{j}2\,\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 20°\,V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_A = (46.98 + \mathrm{j}17.1)\, V$$

$$V_B = (31.53 - \mathrm{j}7.33)\, V$$

$$V_C = (40.34 - \mathrm{j}4.49)\, V$$

e quindi

$$I_0 = \frac{V_B - V_C}{Z_3} = (-4.4 - \mathrm{j}1.42)\, A = 4.63\angle(-162.1^\circ)\, A$$

Esercizio 8.8

Dato il circuito di Fig. 8.8, calcolare la potenza media assorbita da ogni elemento. Siano dati $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $L = 1\,H$, $C = 0.25\,F$ ed $e = 20\cos(2t + 30°)\,V$.

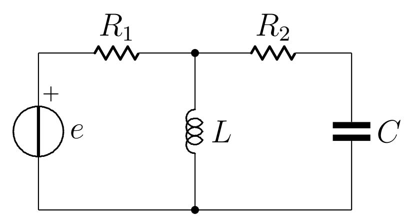
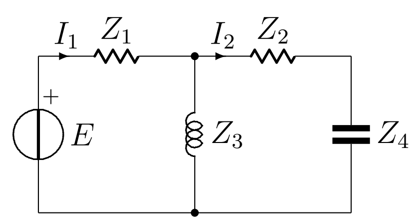


Figura 8.8: Circuito dell'esercizio 11.3

Soluzione

Passiamo al dominio dei fasori:



dove

$$E = 20\angle 30°\,V = 17.32 + \mathrm{j}10\,V$$

$$Z_1 = R_1 = 4\,\Omega$$

$$Z_2 = R_2 = 2\,\Omega$$

$$Z_3 = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}2\,\Omega$$

$$Z_4 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}2\,\Omega$$

Calcoliamo le correnti I_1 ed I_2:

$$I_1 = \frac{E}{Z_1 + (Z_3 \| (Z_2 + Z_4))} = \frac{17.32 + \mathrm{j}10\,V}{4\,\Omega + (\mathrm{j}2\,\Omega \| (2\,\Omega - \mathrm{j}2\,\Omega))} = 3.1 + \mathrm{j}0.63\,A$$

$$I_2 = I_1 \frac{Z_3}{Z_3 + Z_2 + Z_4} = (3.1 + \mathrm{j}0.63)\,A \frac{\mathrm{j}2\,\Omega}{\mathrm{j}2\,\Omega + 2\,\Omega - \mathrm{j}2\,\Omega} = -0.63 + \mathrm{j}3.1\,A$$

La potenza media assorbita dagli elementi reattivi è nulla, mentre la potenza media assorbita dagli elementi resistivi vale:

$$P_1 = \frac{1}{2} R_1 |I_1|^2 = \frac{1}{2} 4\,\Omega (3.16\,A)^2 = 20\,W$$

$$P_2 = \frac{1}{2} R_2 |I_2|^2 = \frac{1}{2} 2\,\Omega (3.16\,A)^2 = 10\,W$$

Esercizio 8.9

Dato il circuito di Fig. 8.9, calcolare la potenza media assorbita dalla resistenza R_2. Siano dati $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$, $Z_1 = \mathrm{j}2\,\Omega$, $Z_2 = -\mathrm{j}\,\Omega$ e $J = 8\angle 60°)\,A$.

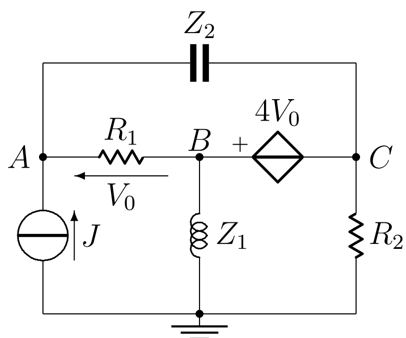


Figura 8.9: Circuito dell'esercizio 11.5

Soluzione

Per risolvere il problema conviene applicare il metodo dei nodi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{Z_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_1}-\frac{1}{Z_2} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{Z_1} & \frac{1}{Z_2}+\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2\,\Omega}+\frac{1}{-\mathrm{j}\,\Omega} & -\frac{1}{2\,\Omega} & -\frac{1}{-\mathrm{j}\,\Omega} & 0 \\ -\frac{1}{2\,\Omega}-\frac{1}{-\mathrm{j}\,\Omega} & \frac{1}{2\,\Omega}+\frac{1}{\mathrm{j}2\,\Omega} & \frac{1}{-\mathrm{j}\,\Omega}+\frac{1}{4\,\Omega} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\angle 60^\circ\,A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$V_A = (-4.22 + \mathrm{j}13.08)\,V$$

$$V_B = (-5.68 + \mathrm{j}13.74)\,V$$

$$V_C = (-11.48 + \mathrm{j}16.36)\,V$$

$$V_0 = (1.45 - \mathrm{j}0.65)\,V$$

A questo punto la potenza media assorbita da R_2 è data da:

$$P = \frac{|V_C|^2}{2R_2} = \frac{(20\,V)^2}{2 \cdot 4\,\Omega} = 2.5\,W$$

Esercizio 8.10

Dato il circuito di Fig. 8.10, calcolare il valore del carico Z che assorbe la massima potenza media. Calcolare inoltre la massima potenza media assorbita. Siano dati $Z_1 = 8\,\Omega$, $Z_2 = \mathrm{j}10\,\Omega$, $Z_3 = -\mathrm{j}4\,\Omega$ e $J = 3\angle 20°\,A$.

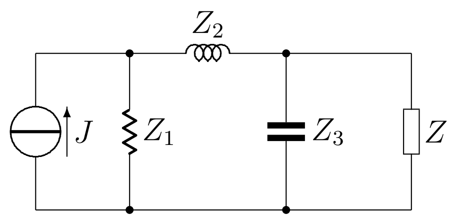


Figura 8.10: Circuito dell'esercizio 11.12

Soluzione

Determiniamo il circuito equivalente Thevenin visto dall'impedenza Z.

Calcolo di Z_{eq}:

$$Z_{eq} = (Z_1 + Z_2)\|(Z_3) = (8\,\Omega + \mathrm{j}10\,\Omega)\|(-\mathrm{j}4\,\Omega) = 1.28 - \mathrm{j}4.96\,\Omega$$

Calcolo di V_{eq}:

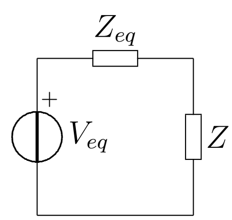
$$V_{eq} = Z_3 \cdot J \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = -\mathrm{j}4\,\Omega \cdot 3\angle 20°\,A \frac{8\,\Omega}{8\,\Omega + \mathrm{j}10\,\Omega - \mathrm{j}4\,\Omega} = -2.79 - \mathrm{j}9.19\,V$$

Il circuito risultante è il seguente:
Il valore di impedenza che massimizza la potenza assorbita è pari a:

$$Z = Z_{eq}^* = 1.28 + \mathrm{j}4.96\,\Omega$$

In questo caso la massima potenza assorbita vale:

$$P_{max} = \frac{|V_{eq}|^2}{8\Re(Z)} = \frac{(9.6\,V)^2}{8 \cdot 1.28\,\Omega} = 9\,W$$


Z_{eq}
+
V_{eq}
Z

Esercizio 8.11

Dato il circuito di Fig. 8.11, calcolare il valore del carico Z che assorbe la massima potenza media. Calcolare inoltre la massima potenza media assorbita. Siano dati $Z_1 = 1\,\Omega$, $Z_2 = \mathrm{j}\,\Omega$, $Z_3 = -\mathrm{j}\,\Omega$ ed $E = 6\angle 0°\,V$.

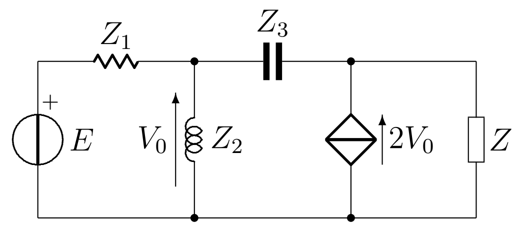
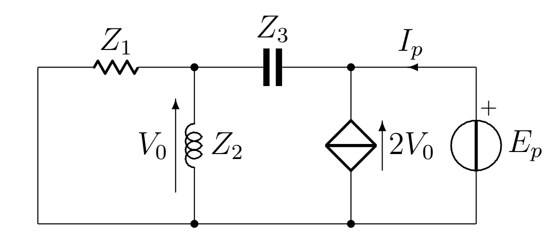


Figura 8.11: Circuito dell'esercizio 11.13

Soluzione

Determiniamo il circuito equivalente Thevenin visto dall'impedenza Z.

Calcolo di Z_{eq}:



$$Z_{eq} = \frac{E_p}{I_p} = \frac{Z_1 \| Z_2 + Z_3}{1 - 2(Z_1 \| Z_2)} = \frac{(1\,\Omega \| \mathrm{j}\,\Omega) - \mathrm{j}\,\Omega}{1 - 2(1\,\Omega \| \mathrm{j}\,\Omega)} = 0.5 + \mathrm{j}0.5\,\Omega$$

Calcolo di V_{eq}:

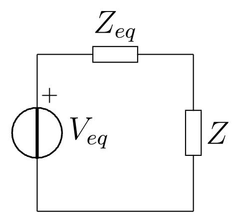
$$V_0 = \frac{\dfrac{E}{Z_1} + 2V_0}{\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}}$$

da cui

$$V_0 = -3 - \mathrm{j}3\,\Omega$$

$$V_{eq} = V_0 + 2V_0 \cdot Z_3 = -9 + \mathrm{j}9\,V$$

Il circuito risultante è il seguente:



Il valore di impedenza che massimizza la potenza assorbita è pari a:

$$Z = Z_{eq}^{*} = 0.5 - \mathrm{j}0.5\,\Omega$$

In questo caso la massima potenza assorbita vale:

$$P_{max} = \frac{|V_{eq}|^2}{8\,\Re(Z)} = \frac{(12.73\,V)^2}{8 \cdot 0.5\,\Omega} = 40.5\,W$$

Esercizio 8.12

Dato il circuito di Fig. 8.12, determinare la potenza complessa assorbita da ognuno dei cinque elementi. Siano dati $Z_1 = -\mathrm{j}2\,\Omega$, $Z_2 = 2\,\Omega$, $Z_3 = \mathrm{j}\,\Omega$, $E_1 = 40\angle 0°\,V_{eff}$ ed $E_2 = 50\angle 90°\,V_{eff}$.

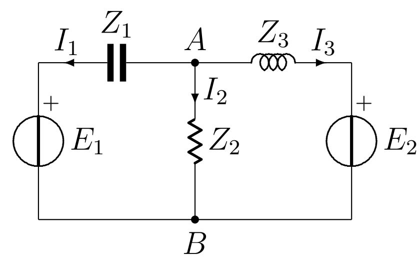


Figura 8.12: Circuito dell'esercizio 11.40

Soluzione

NOTA:tutte le tensioni e tutte le correnti sono espresse rispettivamente in Volt efficaci ed in Ampere efficaci.

Per prima cosa può risultare utile determinare il valore di V_{AB} applicando il teorema di Millman.

$$V_{AB} = \frac{\dfrac{E_1}{Z_1} + \dfrac{E_2}{Z_3}}{\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3}} = 30 + \mathrm{j}70\,V$$

A questo punto si possono facilmente calcolare le correnti che scorrono nei tre rami del circuito:

$$I_1 = \frac{V_{AB} - E_1}{Z_1} = -35 - \mathrm{j}5\,A$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{Z_2} = 15 + \mathrm{j}35\,A$$

$$I_3 = \frac{V_{AB} - E_2}{Z_3} = 20 - \mathrm{j}30\,A$$

Le potenze complesse assorbite da ogni elemento valgono:

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_1^* = -1400 + \mathrm{j}200\,\mathrm{VA}$$

$$P_{E_2} = E_2 \cdot I_3^* = -1500 + \mathrm{j}1000\,\mathrm{VA}$$

$$P_{Z_1} = Z_1 \cdot |I_1|^2 = -\mathrm{j}2500\,\mathrm{VAR}$$

$$P_{Z_2} = Z_2 \cdot |I_2|^2 = 2900\,\mathrm{W}$$

$$P_{Z_3} = Z_3 \cdot |I_3|^2 = \mathrm{j}1300\,\mathrm{VAR}$$

Esercizio 8.13

Dato il circuito di Fig. 8.13, determinare la potenza complessa fornita dal generatore di corrente. Siano dati $Z_1 = 5\,\Omega$, $Z_2 = 3\,\Omega$, $Z_3 = \mathrm{j}4\,\Omega$, $Z_4 = -\mathrm{j}2\,\Omega$, $Z_5 = 6\,\Omega$ e $J = 4\angle 30^\circ\,A$.

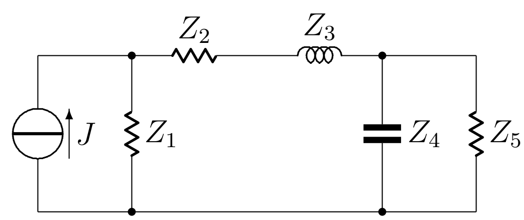


Figura 8.13: Circuito dell'esercizio 11.41

Soluzione

Per risolvere l'esercizio basta determinare la tensione ai capi del generatore di corrente. Per fare questo si calcola l'impedenza ai capi del generatore stesso:

$$Z = Z_1 \| (Z_2 + Z_3 + (Z_4 \| Z_5)) = 2.27 + \mathrm{j}0.698\,\Omega$$

La tensione ai capi del generatore vale:

$$V_g = J \cdot Z = 6.47 + \mathrm{j}6.96\,V$$

mentre la potenza fornita dal generatore vale:

$$P = \frac{1}{2} V_g \cdot J^* = 18.17 + \mathrm{j}5.58\,\mathrm{VA}$$

Esercizio 8.14

Dato il circuito di Fig. 8.14, determinare le potenze attiva, reattiva e complessa fornite dal generatore di tensione. Siano dati $Z_1 = 4\,\Omega$, $Z_2 = 1\,\Omega$, $Z_3 = -\mathrm{j}\,\Omega$, $Z_4 = \mathrm{j}2\,\Omega$, $Z_5 = 2\,\Omega$ ed $E = 12\angle 0°\,V$.

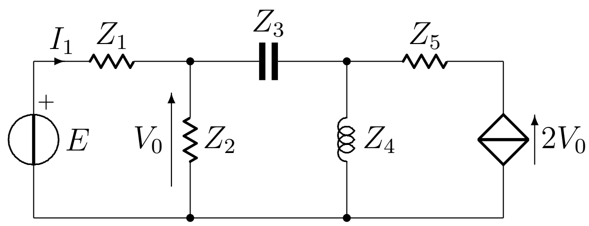
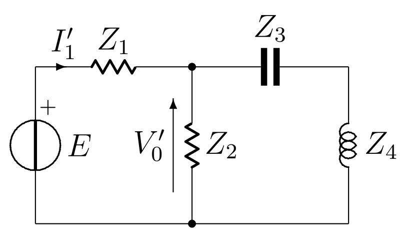


Figura 8.14: Circuito dell'esercizio 11.42

Soluzione

Per risolvere l'esercizio bisogna determinare la corrente I_1. Per fare questo si può applicare il metodo della sovrapposizione degli effetti.

Primo effetto

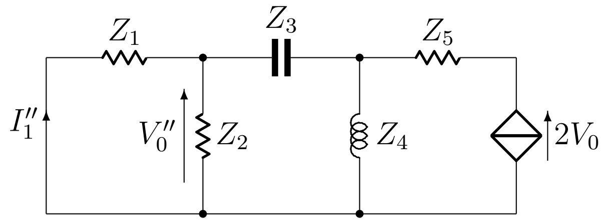


Dall'esame del circuito si ha:

$$I_1' = \frac{E}{Z_1 + (Z_2 \| (Z_3 + Z_4))} = \frac{12\,V}{4\,\Omega + (1\,\Omega \| (-\mathrm{j}\,\Omega + \mathrm{j}2\,\Omega))} = 2.63 - \mathrm{j}0.29\,A$$

$$V_0' = E - I_1' Z_1 = 1.48 + \mathrm{j}1.16\,V$$

Secondo effetto



Dall'esame del circuito si ha:

$$I_1'' = -2V_0 \frac{Z_4}{Z_4 + Z_3 + (Z_2 \| Z_1)} \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1} = -V_0(0.49 + \mathrm{j}0.39)\, A$$

$$V_0'' = 2V_0 \frac{Z_4}{Z_4 + Z_3 + (Z_2 \| Z_1)} \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = V_0(1.95 + \mathrm{j}1.56)\, V$$

Mettendo insieme il tutto si ha:

$$V_0 = V_0' + V_0'' = 1.48 + \mathrm{j}1.16\, V + V_0(1.95 + \mathrm{j}1.56)\, V$$

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 2.63 - \mathrm{j}0.29\, A - V_0(0.49 + \mathrm{j}0.39)\, A$$

da cui

$$V_0 = -0.96 + \mathrm{j}0.36\, V$$

$$I_1 = 3.24 - \mathrm{j}0.09\, A$$

Le potenze fornite dal generatore valgono:

$$P_a = \frac{1}{2} \Re(E I_1^*) = 19.44\,\mathrm{W}$$

$$P_r = \frac{1}{2} \Im(E I_1^*) = 0.54\,\mathrm{VAR}$$

$$P_c = \frac{1}{2} (E I_1^*) = 19.44 + \mathrm{j}0.54\,\mathrm{VA}$$