1. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin del secondo ordine della funzione
$$f(x) = \frac{\arctan x}{1 - \arctan x}.$$

2. Determinare la parte principale e l'ordine di infinitesimo (rispetto all'infinitesimo campione x) delle seguenti funzioni:
   (a) $f(x) = x\ln(1+x) - \mathrm{e}^{-x} + \sqrt{1-2x}$
   (b) $g(x) = \cosh x - \cos x - \ln(1+x^2)$

3. Siano f e g due funzioni tali che $f(x) = 3x+2x^2+o(x^2)$ e $g(x) = 1+2x-x^2+o(x^2)$, per $x \to 0$. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin del secondo ordine della funzione composta F definita da $F(x) = g(f(x))$.

4. Dire fino a che ordine la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x - \cos x - x & x \leq 0 \\ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-2x} - \frac{1}{2}\ln(1+3x) & x < 0 \end{cases}$$
è derivabile in $x = 0$. Disegnare il grafico di f in un intorno $x = 0$.

5. Calcolare i seguenti limiti:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\arctan 3x - 3\sin 4x}{x^3}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{4x}}{x\sin x - 2x^2}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - x - \cos x}{x\ln(1+x) + 2x^2}$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x + \ln(1-2x) + 2x^2}{\mathrm{e}^{x^2} - x^2\sqrt{1+x} - 1}$
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \ln(1+x) + 2\sin x - \mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^3} - \mathrm{e}^{x^3}}$

6. Calcolare, al variare del parametro reale k, i seguenti limiti:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{3\sinh x - \sin 3x}{x^{3k}}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} - 1}{(\sinh x - \sin x)^k}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x - \sin x - 1}{\ln^k(1+x^5)}$

Soluzioni

1. Si ha

$$f(x) = \frac{\arctan x}{1 - \arctan x} \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1-\arctan x)^2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2(1 - x + x\ \arctan x)}{(1+x^2)^2\,(1-\arctan x)^3} \qquad f''(0) = 2\,.$$

Quindi $f(x) = x + x^2 + o(x^2)\,.$

2. Usando gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= -\frac{5}{6}\,x^3 + o(x^3)\,. \end{aligned}$$

Quindi, per $x \to 0$, la funzione f è un infinitesimo di ordine 3 che ha come parte principale $-5x^3/6$.

Analogamente, si ha

$$g(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = \frac{x^4}{2} + o(x^4)\,.$$

Quindi, per $x \to 0$, la funzione g è un infinitesimo di ordine 4 che ha come parte principale $x^4/2$.

3. Dagli sviluppi delle funzioni f e g si ha

$$\begin{array}{lll} f(0) = 0 & f'(0) = 3 & f''(0) = 4 \\ g(0) = 1 & g'(0) = 2 & g''(0) = -2\,. \end{array}$$

Derivando successivamente la funzione composta, si ha

$$\begin{aligned} &F(x) = g(f(x)) \\ &F'(x) = f'(x)g'(f(x)) \\ &F''(x) = f''(x)g'(f(x)) + f'(x)^2 g''(f(x)). \end{aligned}$$

Valutando in $x = 0$, si ha

$$\begin{aligned} &F(0) = g(f(0)) = g(0) = 1 \\ &F'(0) = f'(0)g'(f(0)) = 3g'(0) = 6 \\ &F''(0) = f''(0)g'(f(0)) + f'(0)^2 g''(f(0)) = 4g'(0) + 9g''(0) = 8 - 18 = -10. \end{aligned}$$

Quindi

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}\,x^2 + o(x^2) = 1 + 6x - 5x^2 + o(x^2)\,.$$

4. Si considerino le funzioni

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x - \cos x - x - 3x^2$$

$$f_2(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-2x} + \frac{1}{2}\,\ln(1+3x) - \frac{1}{8}\,\sin x^2\,.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - x - 3x^2 \\ &= -2x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) - 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &\quad -\frac{3}{2}\,x - \frac{9}{4}\,x^2 - \frac{9}{2}\,x^3 + o(x^3) - \frac{x^2}{8} + o(x^3) \\ &= -2x^2 - \frac{63}{16}\,x^3 + o(x^3)\,. \end{aligned}$$

Quindi la funzione $f(x)$ risulta derivabile solo due volte in $x = 0$. In particolare, si ha $f(0) = f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f'(0) = f_1'(0) = f_2'(0) = 0$, $f''(0) = f_1''(0) = f_2''(0) = -4$. La funzione f non è derivabile tre volte perché $f_1'''(0) \neq f_2'''(0)$.

5. Usando gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{4\arctan 3x - 3\sin 4x}{x^3} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4(3x - 9x^3 + o(x^3)) - 3(4x - 32x^3/3 + o(x^3))}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-36x^3 + 32x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}(-4 + o(1)) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{x + \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{4x}}{x\sin x - 2x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x + (1 + 3x + 9x^2/2 + o(x^2)) - (1 + 4x + 8x^2 + o(x^2))}{x(x + o(x)) - 2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-7x^2/2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-7/2 + o(1)}{-1 + o(1)} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - x - \cos x}{x\ln(1+x) + 2x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + x^2/2 + o(x^2)) - x - (1 - x^2/2 + o(x^2))}{x(x + o(x)) + 2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{3x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + o(1)}{3 + o(1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x+\ln(1-2x)+2x^2}{\mathrm{e}^{x^2}-x^2\sqrt{1+x}-1}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{2x(1-x^2/2+o(x^3))+(-2x-2x^2-8x^3/3+o(x^3))+2x^2}{(1+x^2+o(x^3))-x^2(1+x/2+o(x))-1}\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{-11x^3/3+o(x^3)}{-x^3/2+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-11/3+o(1)}{-1/2+o(1)}=\frac{22}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)+2\sin x-\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^3}-\mathrm{e}^{x^3}}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{1-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))+2(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))-(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{(1+x^3/2+o(x^3))-(1+x^3+o(x))}\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{-5x^3/6+o(x^3)}{-x^3/2+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-5/6+o(1)}{-1/2+o(1)}=\frac{5}{3}.
\end{aligned}
$$

6. Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari, si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\frac{3\sinh x-\sin 3x}{x^{3k}}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0^+}\frac{3(x+x^3/6+o(x^3))-(3x-9x^3/2+o(x^3))}{x^{3k}}\\
&\quad=\lim_{x\to 0^+}\frac{5x^3+o(x^3)}{x^{3k}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{5+o(1)}{x^{3(k-1)}}=\begin{cases}+\infty & k>1\\ 5 & k=1\\ 0 & k<1\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\frac{2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}-1}{(\sinh x-\sin x)^k}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0^+}\frac{2(1+x+x^2/2+o(x^2))-(1+2x+2x^2+o(x^2))-1}{((x+x^3/6+o(x^2))-(x-x^3/6+o(x^2))^k}\\
&\quad=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2+o(x^2)}{(x^3/3+o(x^3))^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{3k-2}}\,\frac{-1+o(1)}{(1/3+o(1))^k}\\
&\quad=\begin{cases}-\infty & k>2/3\\ -3^{2/3} & k=2/3\\ 0 & k<2/3\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{\ln^k(1+x^5)}=\\
&\quad=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x+x^2/2+o(x^2))-(x+o(x^2))-1}{(x^5+o(x^5))^k}\\
&\quad=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2/2+o(x^2)}{x^{5k}(1+o(1))^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{5k-2}}\,\frac{1/2+o(1)}{(1+o(1))^k}\\
&\quad=\begin{cases}+\infty & k>2/5\\ 1/2 & k=2/5\\ 0 & k<2/5\,.\end{cases}
\end{aligned}
$$