Sistemi di forze

1 Esercizio

La tensione nel cavo di una gru (Figura 1) ha un modulo T. Calcolare il momento della forza (tensione) T esercitata dalla massa sul cavo rispetto all'origine O del sistema x, y, z.

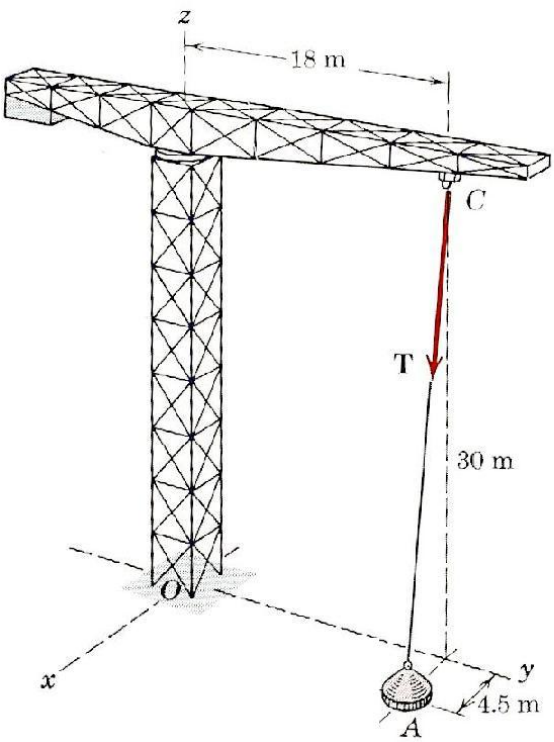


Figura 1: Momento di una forza rispetto ad un punto

Si considera la forza del cavo applicata in C.

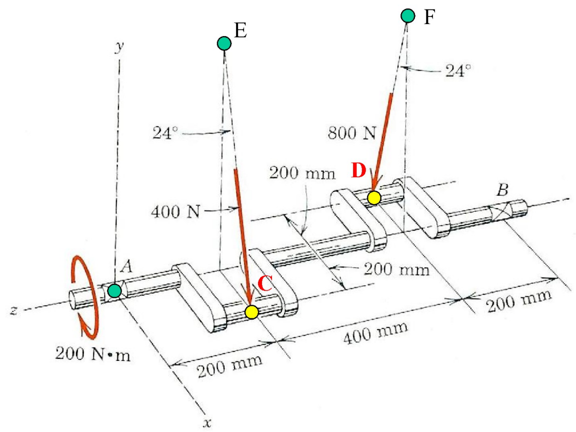
$$\begin{aligned}
\underline{M}(O, \underline{T}(C)) &= \underline{OC} \wedge \underline{T} = \underline{OC} \wedge (T\underline{e}_{CA}) \\
&= \left(18\underline{e}_y + 30\underline{e}_z\right) \wedge \left(T\frac{4.5\underline{e}_x - 30\underline{e}_z}{\|\underline{CA}\|}\right) \\
&= \frac{T}{\|\underline{CA}\|}\left(-30 \times 18\underline{e}_x + 135\underline{e}_y - 81\underline{e}_z\right)
\end{aligned}$$

con $\|\underline{CA}\| = \sqrt{920.25}$.

1.1 Esercizi senza procedimento di soluzione

1.2 Esercizio

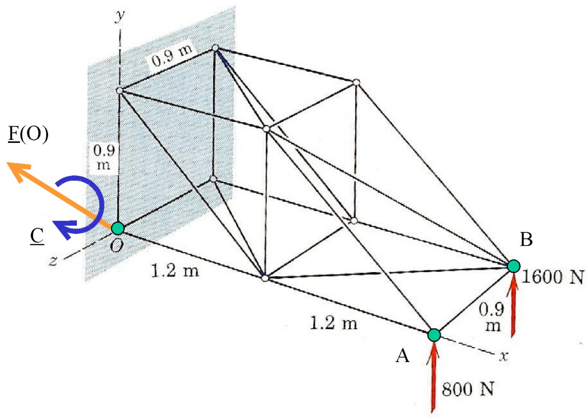
Calcolare il modulo del risultante $\underline{R}(\mathbb{S})$ e del momento $\underline{M}(A, \mathbb{S})$ del sistema $\mathbb{S}$ di tutte le forze applicate sull'albero motore di Figura.



1.3 Esercizio

Calcolare il risultante $\underline{R}(\mathbb{S})$ ed il momento $\underline{M}(O, \mathbb{S})$ del sistema di forze $\mathbb{S}$ applicate al traliccio di Figura in A ed in B. Mostrare che $\underline{R} \perp \underline{M}(O)$. Determinare il sistema formato da una forza in O e da una coppia: $\{\underline{F}(O), \underline{C}\}$ tale che sia equipollente al sistema iniziale.

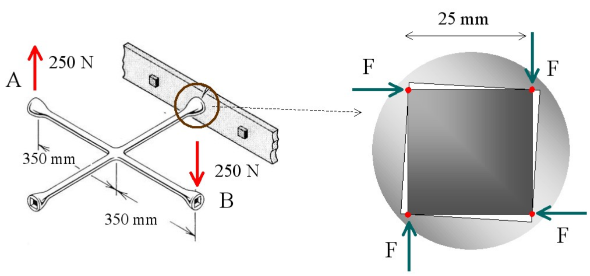
Risposta.
$\underline{R} = 2400\, \underline{e}_y$ N,
$\underline{M}(O) = 1440\, \underline{e}_x + 5760\, \underline{e}_z$ Nm



1.4 Esercizio

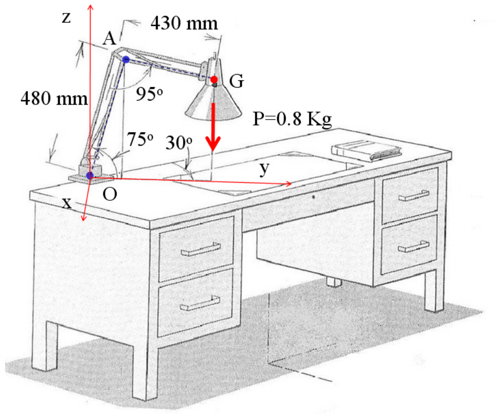
Con riferimento alla Figura, determinare F di modo che il sistema delle due forze applicate in A e B sia equipollente al sistema delle quattro forze (di direzione e verso assegnati) applicate sul dado di serraggio nei punti di contatto

Risposta.
$F = 3500$ N



1.5 Esercizio

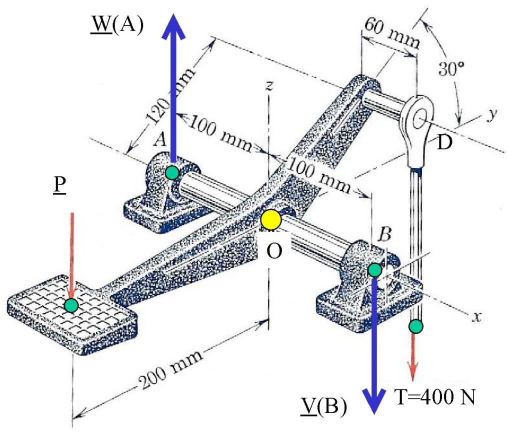
Calcolare il sistema forza-coppia $\underline{F}(O), \underline{C}$ equipollente alla forza peso $\underline{P}(G)$ della lampada.



1.6 Esercizio

Determinare, $\underline{P} = -P\underline{e}_z$, $\underline{W}(A) = W\underline{e}_z$ e $\underline{V}(B) = -V\underline{e}_z$ di modo che $\underline{W}(A), \underline{V}(B)$ siano equipollenti al sistema di forze $\{\underline{P}, -T\underline{e}_z\}$.

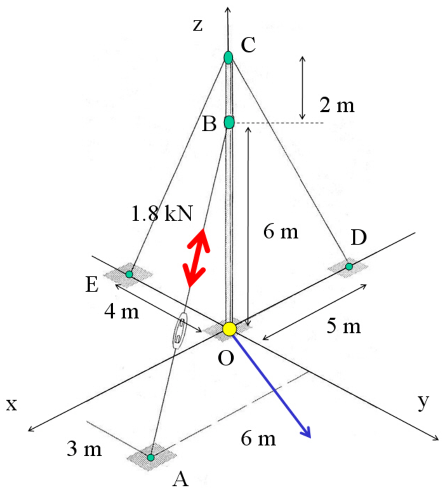
Risposta.
$W = -183.92$ N e $V = 423.92$ N



1.7 Esercizio

Sapendo che il sistema delle forze applicate all'asta OBC è equipollente ad una forza che passa per O e che la tensione imposta in AB è di 1.8 kN, calcolare la tensione in CD e CE

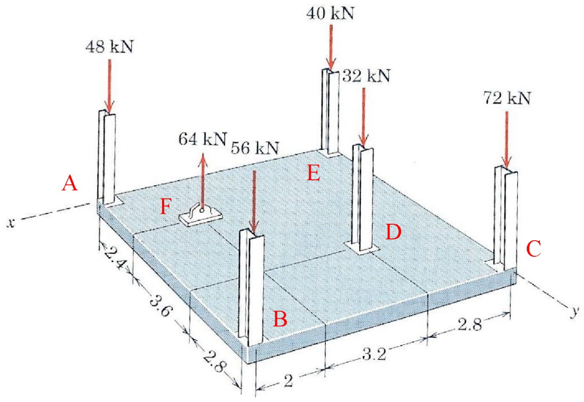
Risposta.
$T_{CD} = 1.698$ kN e $T_{CE} = 1.006$ kN



1.8 Esercizio

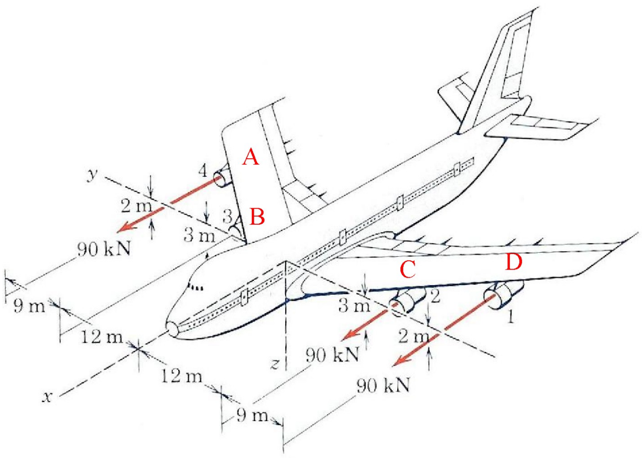
Calcolare le coordinate x, y del centro del sistema di forze parallele nel piano $z = 0$.

Risposta.
$x = 2.92\,\mathrm{m}$ e $y = 6.33\,\mathrm{m}$



1.9 Esercizio

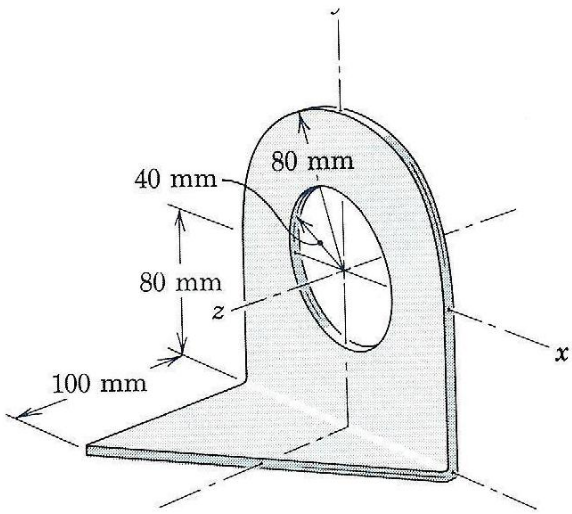
Calcolare le coordinate y, z del centro del sistema di forze parallele nel piano $x = 0$.



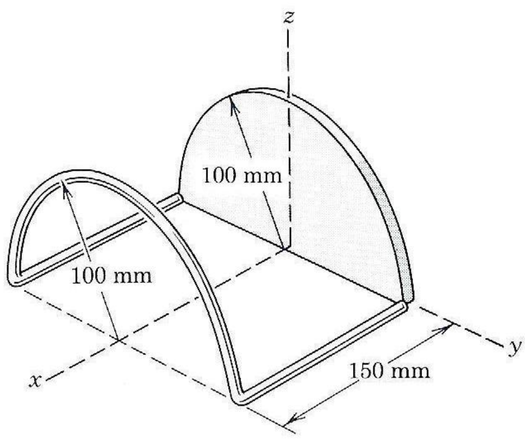
1.10 Esercizio

Per la piastra di Figura, dotata di spessore uniforme, calcolare la posizione del baricentro

Risposta.
$\underline{OG} = -8.3\underline{e}_x - 31.4\underline{e}_y + 10.3\underline{e}_z$ mm



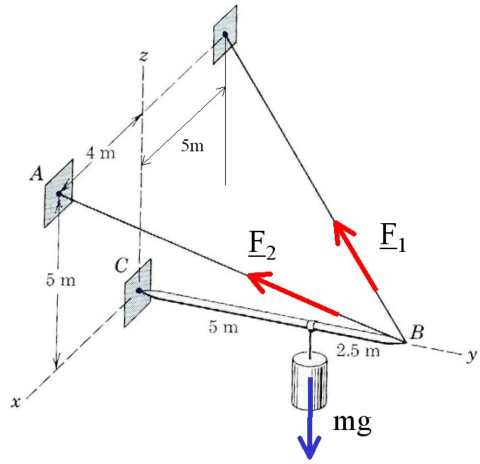
1.11 Esercizio



Calcolare la posizione del baricentro per la struttura di Figura. La densità per unità di area della piastra è $\rho_a = 30\,\mathrm{Kg/m^2}$; La densità per unità di lunghezza delle travi è $\rho_l = 0.5\,\mathrm{Kg/m}$

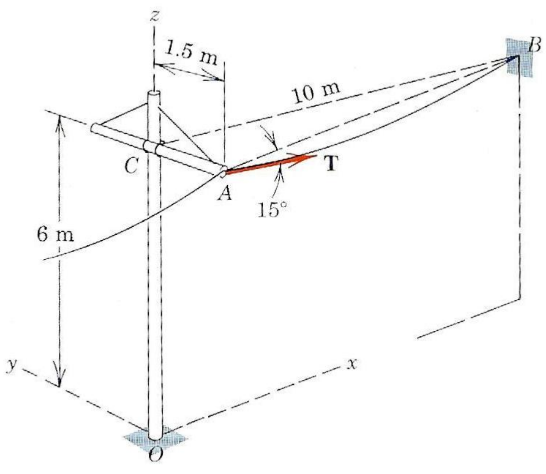
Risposta.
$\underline{OG} = 44.7\underline{e}_x + 38.5\underline{e}_z$ mm

1.12 Esercizio



L'asta CB è sostenuta tramite due fili. Determinare $\underline{F}_1$ ed $\underline{F}_2$ di modo che il sistema di forze: peso del blocco, $\underline{F}_1$ ed $\underline{F}_2$ sia equipollente ad una forza applicata in C.

1.13 Esercizio

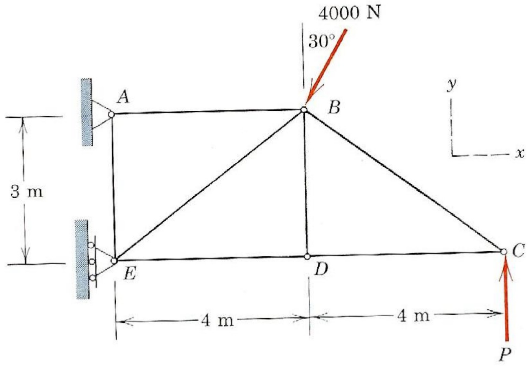


La tensione nel filo AB è pari a 800 N. Il filo forma, nel piano verticale passante per A e B un angolo di 15° con il piano orizzontale per A. Fornire l'espressione vettoriale di $\underline{T}$ e calcolare la proiezione sul piano xz. Calcolare il momento di $\underline{T}$ rispetto alla base O e rispetto all'asse z. Che relazione sussiste tra le due quantità?

Risposta.
$\underline{T} = 764\underline{e}_x + 114.6\underline{e}_y - 207\underline{e}_z$ N, $T_{xz} = 792$ N

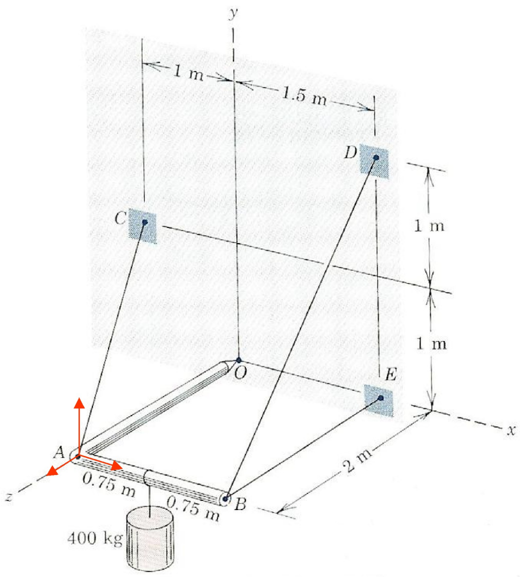
1.14 Esercizio

Sia $P = 500$ e sia $\mathbb{A}$ il sistema delle forze di Figura. Si consideri un sistema $\mathbb{B}$ di due forze: una forza qualunque applicata in A ed una forza orizzontale applicata in E. Si specifichi $\mathbb{B}$ di modo che $\mathbb{A} \bowtie \mathbb{B}$.



Risposta.
$\underline{F}(A) = 1285\underline{e}_x - 2964\underline{e}_y\,\mathrm{N}$, $\underline{F}(E) = -3285\underline{e}_x\,\mathrm{N}$

1.15 Esercizio

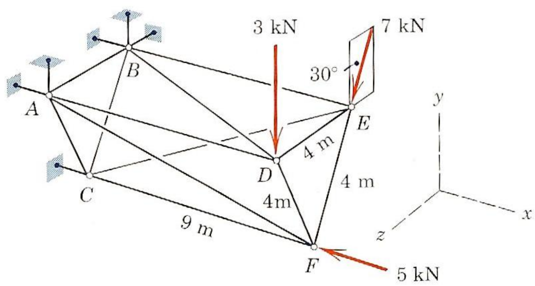


Si calcolino le tensioni nei fili di modo che il sistema di forze costituito dalle tre tensioni più la forza peso del blocco sia equipollente ad una forza applicata in O.

Risposta.
$T_{CA} = 4805\,\mathrm{N}$, $T_{DB} = 2774.6\,\mathrm{N}$, $T_{BE} = 654\,\mathrm{N}$

1.16 Esercizio

Sia $\mathbb{A}$ il sistema delle forze di Figura. Sia $\mathbb{B}$ un sistema di sei forze: tre forze applicate in B e dirette come le bielle in B; due forze applicate in A e dirette come le bielle in A; una forza applicata in C e diretta come la biella in C. Determinare i moduli di queste forze di modo che $\mathbb{A} \bowtie \mathbb{B}$



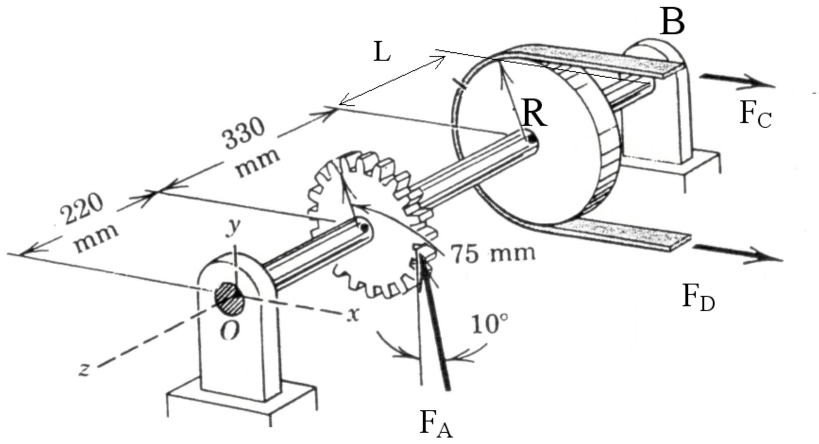
Risposta.
$C_x = -28.54\,\mathrm{kN}$, $A_x = 3.875\,\mathrm{kN}$, $A_y = -3\,\mathrm{kN}$, $B_x = 19.65\,\mathrm{kN}$, $B_y = -6.06\,\mathrm{kN}$, $B_z = 3.5\,\mathrm{kN}$

Raccolta primi compitini

2 Compitino novembre 2004

2.1 Esercizio 1

Il supporto in O è in grado di esercitare una forza qualsiasi $\underline{F}_O(O)$ ed una coppia $\underline{C} = C\underline{e}_z$, con C qualunque, mentre il supporto B è in grado di esercitare una forza $\underline{F}_B(B)$ con componente lungo z nulla e altrimenti arbitraria. Determinare completamente $\underline{F}_O(O)$, C e $\underline{F}_B(B)$ di modo che questo sistema di forze sia equipollente alle forze assegnate in Figura. La forza relativa alla ruota dentata è applicata sul dente che si trova in posizione $y = 0$.



Traccia di soluzione

Sia $\alpha = 10°$ Il sistema $\mathbb{A}$ è costituito dalle forze:

$$\begin{aligned}\underline{F}_C &= F_C\underline{e}_x\\ \underline{F}_D &= F_D\underline{e}_x\\ \underline{F}_A &= -F_A\sin\alpha\,\underline{e}_x + F_A\cos\alpha\,\underline{e}_y\end{aligned}$$

che forniscono:

$$\begin{aligned}\underline{R}(\mathbb{A}) &= (F_C + F_D - F_A\sin\alpha)\underline{e}_x + F_A\cos\alpha\,\underline{e}_y\\ \underline{M}(O,\mathbb{A}) &= 220F_A\cos\alpha\,\underline{e}_x + (220F_A\sin\alpha - 550(F_C + F_D))\underline{e}_y\\ &\quad + (75F_A\cos\alpha + R(-F_C + F_D))\underline{e}_z\end{aligned}$$

Il sistema $\mathbb{B}$ è costituito dalle forze:

$$\begin{aligned}\underline{F}_O &= F_{O1}\underline{e}_x + F_{O2}\underline{e}_y + F_{O3}\underline{e}_z\\ \underline{F}_B &= F_{B1}\underline{e}_x + F_{B2}\underline{e}_y\end{aligned}$$

e dalla coppia $\underline{C} = C\underline{e}_z$ che per convenzione è rappresentata con il suo momento rispetto ad un punto qualsiasi. dove le componenti rappresentano le incognite del problema. Per tale sistema si ottiene:

$$\begin{aligned}\underline{R}(\mathbb{B}) &= (F_{O1} + F_{B1})\underline{e}_x + (F_{O2} + F_{B2})\underline{e}_y + F_{O3}\underline{e}_z\\ \underline{M}(O,\mathbb{B}) &= (550 + L)F_{B2}\underline{e}_x - (550 + L)F_{B1}\underline{e}_y + C\underline{e}_z\end{aligned}$$

Imponendo $\underline{M}(O, \mathbb{B}) = \underline{M}(O, \mathbb{A})$ si determinano immediatamente F_{B2}, F_{B1}, C e poi imponendo $\underline{R}(\mathbb{B}) = \underline{R}(\mathbb{A})$ si determinano F_{O1}, F_{O2}, F_{O3}.

2.2 Esercizio 2

Definire l'asse centrale di un sistema di forze generale e calcolarlo per il sistema delle tre forze assegnate nell'esercizio precedente

Traccia di soluzione

Per la definizione vedere la teoria. Si sottolinea comunque che l'asse è una retta e non un semplice punto!
Per il calcolo si segue lo schema seguente. Il generico punto P dell'asse è:

$$P = C + \lambda \underline{R} \qquad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ed il punto C è definito da (vedere gli appunti):

$$\underline{OC} = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}(O)}{R^2}$$

Certamente il punto O è arbitrario, ma in questo caso conviene certamente prenderlo coincidente con il punto rispetto al quale, nell'esercizio precedente, si é calcolato $\underline{M}(\mathbb{A})$, poiché $\underline{R} \wedge \underline{M}(O)$ sono così già noti:

$$\underline{R} = \underline{R}(\mathbb{A}) \qquad \underline{M}(O) = \underline{M}(O, \mathbb{A})$$

e resta da calcolare solo il prodotto vettore.

2.3 Esercizio 3

LIBRO ESERCIZIO 1.5.2

3 Compitino novembre 2006

3.1 Esercizio 1

Si consideri il sistema costituito dalle forze $\underline{F}_1 = \underline{e}_x + 2\underline{e}_y - \underline{e}_z$ applicata in $Q_1 = (1, 2, 0)$, $\underline{F}_y = 3\underline{e}_x - \underline{e}_y + 2\underline{e}_z$ applicata in $Q_2 = (-1, 3, 2)$ e dalla coppia $\underline{C} = \underline{e}_x - \underline{e}_y - \underline{e}_z$. Trovare il suo asse centrale. Calcolare il suo invariante scalare e verificare i risultati teorici sulla riduzione del sistema di forza.

Traccia di soluzione. L'asse centrale è la retta parallela a $\underline{R}(\mathbb{S})$ passante per il punto P tale che:

$$\underline{OP} = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}(O)}{R^2}$$

con:

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 4\underline{e}_x + \underline{e}_y + \underline{e}_z \qquad R^2 = 18$$

e

$$\begin{aligned}
\underline{M}(O) &= \underline{OQ_1} \wedge \underline{F}_1 + \underline{OQ_2} \wedge \underline{F}_2 + \underline{C} \\
&= (-2\underline{e}_x + \underline{e}_y) + (8\underline{e}_x + 8\underline{e}_y - 8\underline{e}_z) + (\underline{e}_x - \underline{e}_y - \underline{e}_z) \\
&= 7\underline{e}_x + 8\underline{e}_y - 9\underline{e}_z
\end{aligned}$$

da cui:

$$\underline{OP} = \frac{1}{R^2}\left(-17\underline{e}_x + 43\underline{e}_y + 25\underline{e}_z\right)$$

È immediato verificare che $\mathcal{I} = \underline{M}(O) \cdot \underline{R}$ è diverso da zero. Quindi, scegliendo come polo un punto qualunque dell'asse centrale ci si attende che il momento sia non nullo, ma parallelo al risultante. Infatti, utilizzando il punto P appena determinato e la formula della traslazione del polo:

$$\begin{aligned}
\underline{M}(P) &= \underline{M}(O) + \underline{PO} \wedge \underline{R} \\
&= 7\underline{e}_x + 8\underline{e}_y - 9\underline{e}_z + \frac{1}{18}(-18\underline{e}_x - 117\underline{e}_y + 189\underline{e}_z) \\
&= 6\underline{e}_x + \frac{3}{2}\underline{e}_y + \frac{3}{2}\underline{e}_z = \frac{3}{2}\left(4\underline{e}_x + \underline{e}_y + \underline{e}_z\right)
\end{aligned}$$

3.2 Esercizio 2

LIBRO ESERCIZIO 1.5.3

3.3 Esercizio 3

Si consideri la struttura di Figura. Si vuole studiare la cinematica dei corpi rigidi pannello e pilone AB. Tra il pannello ed il pilone vi è un vincolo (in F) che blocca le velocità lineari ed angolari relative ad eccezione della prima componente della velocità angolare relativa. Tutti gli altri vincoli sono cerniere sferiche. A,G e C sono a terra. Stabilire se la struttura è ben vincolata o se sono possibili atti di moto (nel secondo caso stabilire quali).

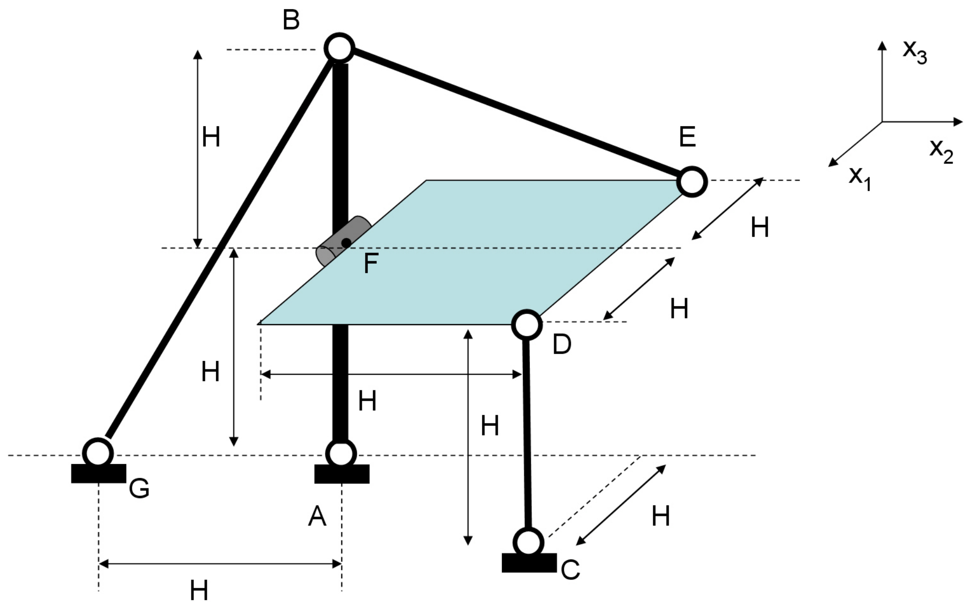


Figura 2: Analisi cinematica di una copertura

Traccia di soluzione

Il pilone sia il corpo 1 ed il pannello il corpo 2. Considerando già la cerniera a terra A

$$\underline{U}^{(1)}(P) = \underline{\omega}^{(1)} \wedge \underline{AP} \qquad \underline{U}^{(2)}(P) = \underline{U}(F) + \underline{\omega}^{(2)} \wedge \underline{FP}$$

Biella BG.

$$\underline{U}^{(1)}(B) \cdot \underline{GB} = 0$$

da cui

$$2H(\underline{\omega}^{(1)} \wedge \underline{e}_z) \cdot \left(\underline{e}_y + 2\underline{e}_z\right) = 0 \qquad \omega_x^{(1)} = 0$$

Vincolo F. Per le velocità di rotazione:

$$\underline{\omega}^{(2)} = \underline{\omega}^{(1)} + \alpha \underline{e}_x$$

Nel seguito si ometterà l'apice per le velocità angolari intendendo $\underline{\omega} = \underline{\omega}^{(1)}$ Per le velocità lineari:

$$\underline{U}^{(2)}(F) = \underline{U}^{(1)}(F) = H(\omega_y \underline{e}_y + \omega_z \underline{e}_z) \wedge \underline{e}_z = H\omega_y \underline{e}_x$$

Vincolo biella CD.

$$\underline{U}^{(2)}(D) \cdot \underline{e}_z = 0$$

da cui:

$$\left[H\omega_y \underline{e}_x + H(\alpha \underline{e}_x + \omega_y \underline{e}_y + \omega_z \underline{e}_z) \wedge (\underline{e}_x + \underline{e}_y)\right] \cdot \underline{e}_z = 0$$

che comporta $\alpha = \omega_y$.

Vincolo biella BE.

$$\left(\underline{U}^{(1)}(B) - \underline{U}^{(2)}(E)\right) \cdot \underline{BE} = 0$$

con:

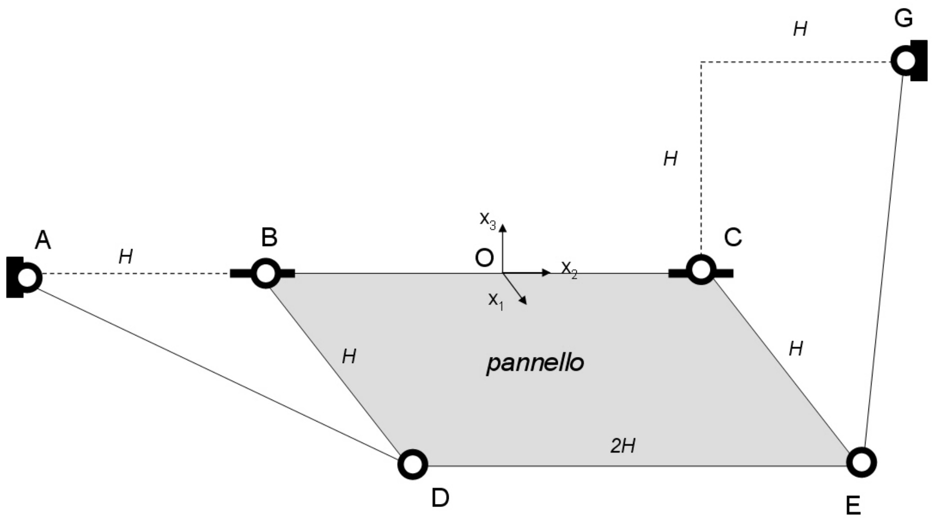
$$\begin{aligned}
\underline{U}^{(1)}(B) &= 2H(\omega_y \underline{e}_y + \omega_z \underline{e}_z) \wedge \underline{e}_z = 2H\omega_y \underline{e}_x \\
\underline{U}^{(2)}(E) &= H\omega_y \underline{e}_y + H^2(\omega_y \underline{e}_x + \omega_y \underline{e}_y + \omega_z \underline{e}_z) \wedge (\underline{e}_y - \underline{e}_x) \\
\underline{BE} &= H(-\underline{e}_z + \underline{e}_y - \underline{e}_x)
\end{aligned}$$

da cui $\omega_y = 0$, ma nulla si può dire su ω_z. Tutta la struttura ammette quindi una rotazione pura attorno ad un asse che passa per A ed è diretto come $\underline{e}_z$.

4 Compitino novembre 2007

4.1 Esercizio 1

Si consideri il pannello rigido rettangolare di figura. Il sistema di riferimento è centrato in O, punto medio del lato $\underline{BC}$. Il pannello giace nel piano $z = 0$ ed è vincolato ad una parete che giace nel piano $x = 0$ tramite i vincoli B e C e tramite i fili AD e GE. I vincoli B e C possono trasmettere al pannello solo forze con componente in direzione y nulla ed altrimenti arbitrarie. Determinare le forze trasmesse dai vincoli al pannello e le tensioni nei fili di modo che il sistema $\mathbb{K}$ costituito da tutte queste forze sia equipollente al sistema $\mathbb{M}$ di forze costituito dalla forza $P\underline{e}_z$ applicata nel baricentro del pannello ed alla forza $-2\underline{e}_y$ applicata in E.
Coordinate dei punti: A =H(0,-2,0); B =H(0,-1,0); C=H(0,1,0); D=H(1,-1,0); E=H(1,1,0); G=H(0,2,1)
Specificare e giustificare chiaramente il procedimento utilizzato. Il problema deve essere risolto mediante la soluzione in sequenza di equazioni con una solo incognita



Traccia di soluzione

Le forze che i fili trasmettono al pannello hanno la forma $\alpha(-\underline{e}_x + \underline{e}_y + \underline{e}_z)$ per EG e $\beta(-\underline{e}_x - \underline{e}_y)$ per AD, con α e β da determinare (α è il rapporto tra la tensione del filo EG e la lunghezza di $\underline{EG}$, β è il rapporto tra la tensione del filo DA e la lunghezza di $\underline{DA}$).
Per imporre l'equipollenza si deve imporre uguaglianza del risultante e del momento rispetto ad un punto qualsiasi, qui fissato in E:

$$\underline{R}(\mathbb{K}) = \underline{R}(\mathbb{M}) \qquad \underline{M}(E, \mathbb{K}) = \underline{M}(E, \mathbb{M})$$

oppure, in maniera perfettamente equivalente:

$$\underline{R}(\mathbb{K} - \mathbb{M}) = \underline{0} \qquad \underline{M}(E, \mathbb{K} - \mathbb{M}) = \underline{0}$$

Nella soluzione si segue quest'ultima strada. La prima è identica alla seconda previo trasferimento dal primo membro al secondo (nelle prossime equazioni) di alcuni termini.
Si noti che a priori è possibile scegliere qualunque polo al post di E per calcolare i momenti. In generale però il sistema che si ottiene non permette di risolvere un'equazione alla volta! (matrice del sistema triangolare).
Momento rispetto ad un asse parallelo a x per E:

$$M(\underline{CE}) = PH - B_z 2H = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = \frac{1}{2}P$$

Momento rispetto ad un asse parallelo a y per E:

$$M(\underline{DE}) = B_z H + C_z H - P\frac{H}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad C_z = 0$$

Risultante, componente R_z:

$$R_z = B_z + C_z + \alpha - P = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}P$$

Risultante, componente R_y:

$$R_y = 2P + \alpha - \beta = 0 \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{5}{2}P$$

Momento rispetto ad un asse parallelo a z per E:

$$M_z(E) = B_x 2H - \beta 2H = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = \frac{5}{2}P$$

Risultante, componente R_x:

$$R_x = B_x + C_x - \beta - \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad C_x = \frac{P}{2}$$

4.2 Esercizio 2

LIBRO ESERCIZIO 1.5.4

4.3 Esercizio 3

Definire l'invariante scalare I di un sistema $\mathbb{A}$ di forze. Si consideri un sistema di forze piano. Quali sono i possibili valori di I? Dimostrare ogni affermazione. Qual è il sistema $\mathbb{B}$ più semplice a cui $\mathbb{A}$ è equipollente?

Traccia di soluzione

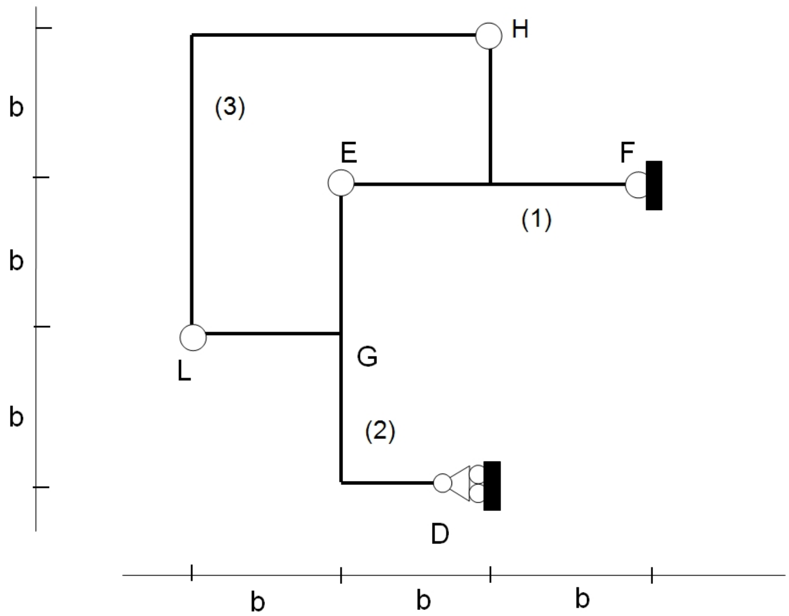
Se il piano è perpendicolare a $\underline{e}_z$ la generica forza ha forma $\underline{F} = F_x\underline{e}_x + F_y\underline{e}_y$ ed il suo momento rispetto ad un punto qualsiasi ha direzione $\underline{e}_z$. L'invariante $\mathcal{I} := \underline{M}(O, \mathbb{A}) \cdot \underline{R}(\mathbb{A})$ è quindi sempre nullo. Se $\underline{R}(\mathbb{A}) = \underline{0}$ allora $\mathbb{A}$ è equipollente ad una coppia pari a $\underline{M}(O, \mathbb{A})$, con O generico. Altrimenti $\mathbb{A}$ è equipollente ad una forza pari a $\underline{R}(\mathbb{A})$ applicata in un punto qualunque dell'asse centrale (che è una retta del piano).

5 Compitino novembre 2008

5.1 Esercizio 1

Utilizzando la cinematica analitica, studiare la struttura di Figura.

- Calcolare il numero di Gradi di Libertà ed il numero di Gradi di Vincolo
- Stabilire se la struttura è ben vincolata, ed in caso contrario determinare gli atti di moto possibili
- Cosa si può dire dell'asse del Mozzi dei corpi EF e EGD?



Traccia di soluzione

Il corpo (3) è una biella e sarebbe "errore" considerarlo come corpo rigido. Vi sono dunque 6 GdL e 6 GdV, di cui 3 a terra. La struttura potrebbe essere ben vincolata, ma non lo è perché i vincoli sono mal disposti.

$$\underline{U}^{(1)} = \omega^{(1)} \underline{e}_z \wedge \underline{FE}$$
$$\underline{U}^{(2)} = \underline{U}_E + \omega^{(2)} \underline{e}_z \wedge \underline{ED}$$

Vincolo cerniera in E:

$$\underline{U}_E = -2b\omega^{(1)} \underline{e}_y$$

Vincolo carrello in D:

$$\underline{U}^{(2)}(D) \cdot \underline{e}_x = 0 \quad \rightarrow \quad \omega^{(2)} = 0$$

Vincolo biella LH:

$$(\underline{U}^{(1)}(H) - \underline{U}^{(2)}(L)) \cdot \underline{HL} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega^{(1)}(-b\underline{e}_x + b\underline{e}_y) \cdot (2b\underline{e}_x + 2b\underline{e}_y) = 0$$

Quest'ultimo vincolo è sempre soddisfatto $\forall\,\omega^{(1)}$ che è quindi parametro libero.
Il corpo (1) ruota intorno ad F. L'asse del Mozzi è dunque la retta parallela a $\underline{e}_z$ che passa per F. Il corpo (2) trasla in direzione verticale. Essendo $\omega^{(2)} = 0$ l'asse del Mozzi non è definito.

5.2 Esercizio 2

Si consideri la struttura della Figura 3 che è costituita dall'insieme di due corpi rigidi: il pannello, detto corpo (1) e la trave $AGDE$, detta corpo (2). Il pannello è una lastra quadrata dotata di peso Q ed il punto B è posizionato nella mezzeria del suo lato verticale. In F è applicata una forza esterna attiva $\underline{F}_F = -5\underline{e}_x + 4\underline{e}_y$ e sul braccio GE è applicata la coppia $\underline{C} = h(\underline{e}_x + \underline{e}_y - \underline{e}_z)$.

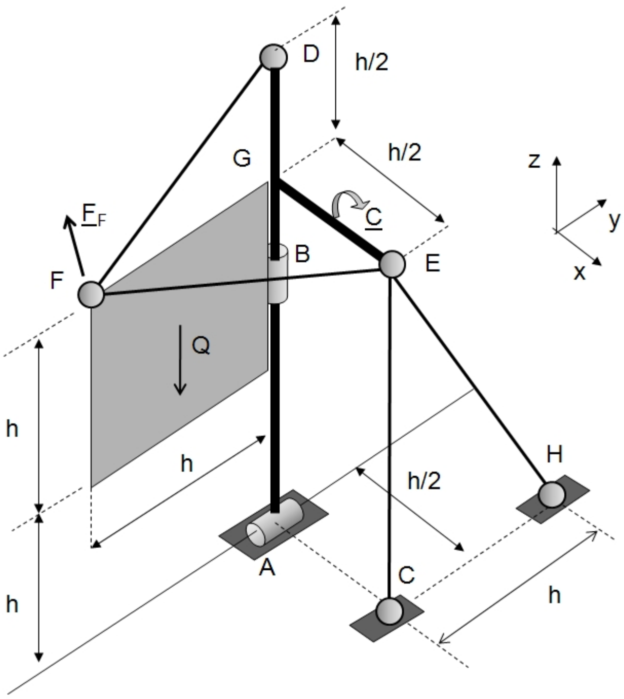


Figura 3: Esempio di struttura in 3D

La trave è collegata a terra in A tramite un vincolo esterno manicotto che blocca le velocità lineari ed angolari tranne le componenti in direzione y $U_y^{(2)}(A)$ e $\omega_y^{(2)}$. Dal punto di vista statico questo implica che il vincolo A può esercitare su (2) una forza $\underline{F}_A = F_{Ax}\underline{e}_x + F_{Az}\underline{e}_z$ ed una coppia $\underline{C}_A = C_{Ax}\underline{e}_x + C_{Az}\underline{e}_z$ con $F_{Ax}, F_{Az}, C_{Ax}, C_{Az}$ arbitrari.
Inoltre la trave è collegata a terra tramite le bielle EC ed EH.

- Determinare l'asse centrale del sistema di forze $\{-\underline{F}_F, -\underline{C}\}$
- Calcolare le tensioni/compressioni nelle bielle e $F_{Ax}, F_{Az}, C_{Ax}, C_{Az}$ in modo che il sistema di forze esercitate da A e dalle bielle EC, EH su $AGDE$ sia equipollente al sistema di forze $\{-\underline{F}_F, -\underline{C}\}$

Traccia di soluzione

La prima risposta è immediata se si sceglie come punto di riferimento (origine degli assi) F (ogni altra scelta sarebbe penalizzante). Infatti in tal caso il momento del sistema rispetto a F

è semplicemente $-\underline{C}$. Quindi il punto P dell'asse centrale che appartene al piano passante per F ortogonale a $\underline{R}$ è:

$$\underline{FP} = \frac{\underline{F}_F \wedge \underline{C}}{R^2}$$

con $R^2 = 41$ e:

$$\underline{F}_F \wedge \underline{C} = -h(4\underline{e}_x + 5\underline{e}_y + 9\underline{e}_z)$$

L'asse centrale è dunque la retta di equazione:

$$Q = P + \lambda \underline{F}_F$$

Le bielle EC, EH sono in grado di esercitare sulla trave in E forze dirette come le bielle stesse:

$$\begin{aligned} \underline{T}_{EH} &= \alpha(\underline{e}_y - 2\underline{e}_z) \\ \underline{T}_{EC} &= -\beta \underline{e}_z \end{aligned}$$

con α ed β arbitrari. Si sceglie A come polo del momento. Detto $\mathbb{A}$ il sistema delle forze $\{-\underline{F}_F, -\underline{C}\}$ e $\mathbb{B}$ il sistema delle reazioni vincolari di A e delle bielle esterne si deve imporre:

$$\underline{R}(\mathbb{B} - \mathbb{A}) = \underline{0}, \quad \underline{M}(A, \mathbb{B} - \mathbb{A}) = \underline{0}$$

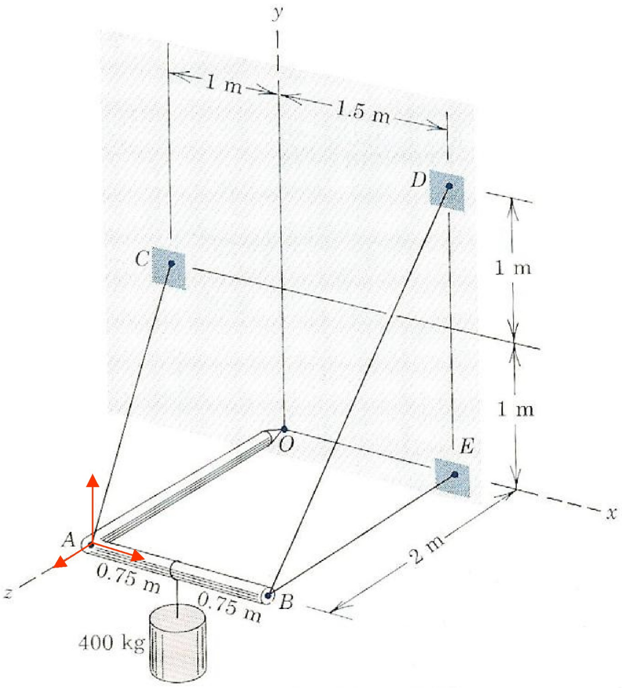
Si cerca di procedere scrivendo equazioni in una sola incognita:

$$\begin{aligned} R_y = 0 &\quad \rightarrow \quad \alpha = -4 \\ R_x = 0 &\quad \rightarrow \quad F_{Ax} = 5 \\ M_y(A) = 0 &\quad \rightarrow \quad \beta = 26 \\ R_z = 0 &\quad \rightarrow \quad F_{Az} = 18 \\ M_x(A) = 0 &\quad \rightarrow \quad C_{Ax} = -h \\ M_z(A) = 0 &\quad \rightarrow \quad C_{Az} = 8h \end{aligned}$$

Raccolta esercizi di statica e temi esame

6 Albero a gomito

Si calcolino le reazioni vincolari in O e le azioni nelle bielle affinché l'albero a gomito sia in equilibrio



Le bielle ammettono solo forze di intensità incognita e dirette come le bielle stesse. Siano $\underline{T}_{EB} = T_{EB}\underline{e}_{EB}$, $\underline{T}_{DB} = T_{DB}\underline{e}_{DB}$, $\underline{T}_{CA} = T_{CA}\underline{e}_{CA}$ le forza esercitate dal corpo rigido sulle bielle. Si vuole imporre l'equilibrio del corpo (equazioni cardinali del sistema di forze $\mathbb{S}$ esercitate *sul* corpo). Momento di tutte le forze attorno ad un asse diretto come z e passante per A:

$$1.5T_{DB}\frac{1}{\sqrt{2}} - 400g \times .75 = 0 \qquad T_{DB} = 2774.68N$$

Momento di tutte le forze attorno ad un asse diretto come x e passante per A:

$$O_y = 0$$

Momento di tutte le forze attorno ad un asse diretto come y e passante per A:

$$-2\,O_x + T_{DB}\frac{1}{\sqrt{2}}1.5 + 1.5\,T_{BE} = 0$$

Risultante di tutte le forze in direzione x:

$$O_x - T_{CA}\frac{1}{\sqrt{6}} = 0$$

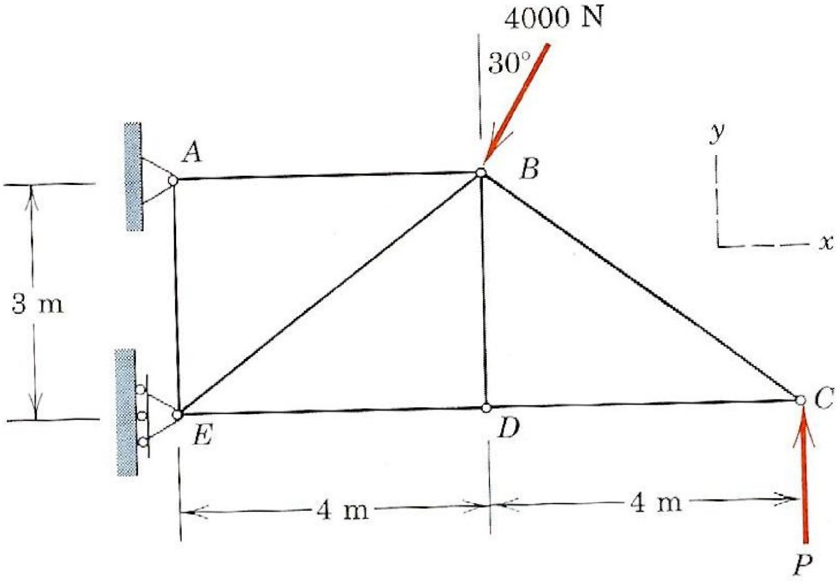
Risultante di tutte le forze in direzione y:

$$T_{CA}\frac{1}{\sqrt{6}} - 400g + T_{DB}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

da cui $T_{CA} = 4805\,\mathrm{N}$, $O_x = 1962\,\mathrm{N}$,. $T_{BE} = 654\,\mathrm{N}$. Da ultimo, per calcolare O_z si pone a zero il risultante di tutte le forze in direzione z: $O_z = 6540\,\mathrm{N}$.

7 Statica corpo 2D

Supponendo la struttura rigida, calcolare le reazioni vincolari se $P = 500N$. Si immagini poi che il carrello in E non sia in grado di opporsi al distacco; qual è il massimo valore di P per cui si può avere equilibrio?



Si indicano con A_x e A_y le reazioni della cerniera in A. Con E_x la reazione orizzontale del carrello in E. Si impongono le tre equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_x = 0 &\qquad A_x + E_x - 4000 \times 0.5 = 0 \\ R_y = 0 &\qquad A_y + P - 4000 \times 0.5\sqrt{3} = 0 \\ M(A) = 0 &\qquad 3\,E_x + 8\,P - 4000 \times 2\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

che forniscono: $A_x = -1285\,\mathrm{N}$, $A_y = 2964\,\mathrm{N}$, $E_x = 3285\,\mathrm{N}$. Il massimo valore di P per cui si può avere equilibrio si ottiene imponendo che l'equilibrio sussista con $E_x = 0$. Riscrivendo l'equazione $M(A) = 0$ si ottiene: $P = 1732\,\mathrm{N}$.

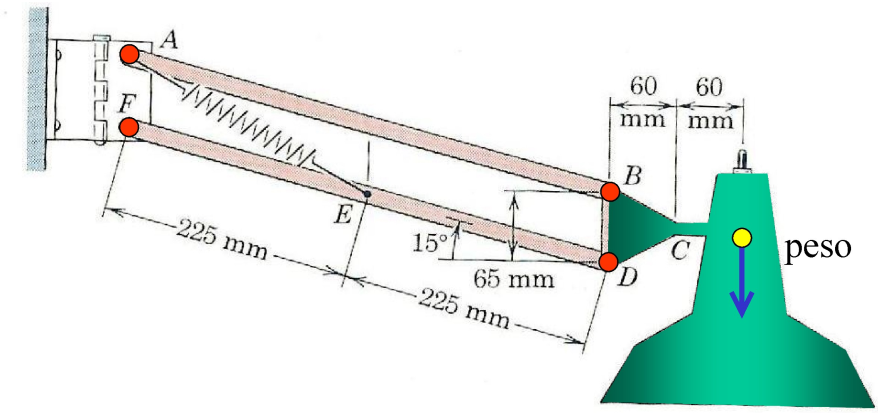
Si provi a risolvere lo stesso problema scrivendo il set delle tre relazioni seguenti:

$$M(E) = 0, \quad M(D) = 0, \quad M(C) = 0$$

A che conclusione si arriva? Darne una spiegazione.
Si provi poi a risolvere lo stesso problema assumendo $P = 4000\,\mathrm{N}$ e cambiando il vincolo in E. Si supponga cioè che in E vi sia un carrello con piano orizzontale che blocca quindi la velocità di E in direzione verticale. Scrivendo l'equazione del momento rispetto ad A si verifica immediatamente che tale momento non può annullarsi per nessuna combinazione delle reazioni vincolari. L'equilibrio non può sussistere. La matrice del sistema associato al problema di equilibrio ha dimensione (3,3), ma è singolare.

8 Analisi du una lampada

Si ignori l'attrito nelle cerniere e si calcoli il valore della forza applicata dalla molla in E che permette alla lampada di restare in equilibrio. La massa della testa è .6 Kg.



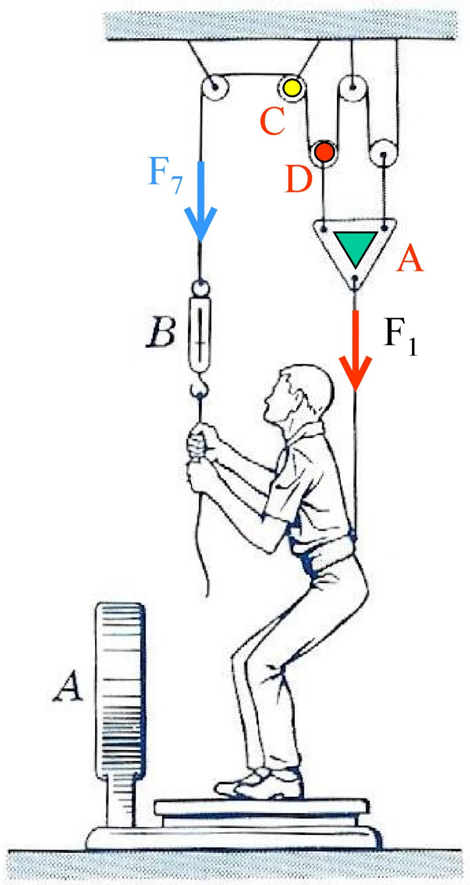
La lampada è data dalla somma di tre corpi rigidi differenti: le due aste e la testa verde della lampada. L'asta AB è una biella, cioè è vincolata agli estremi attraverso cerniere ed è scarica lungo il corpo. Le azioni esercitate su A e B sono dunque due forze uguali e contrarie dirette lungo AB. Indichiamo con $F_{AB}\underline{e}_{AB}$ la forza esercitata su AB dalla testa della lampada. Siano $D_x\underline{e}_x$ e $D_y\underline{e}_y$ le forze esercitate da FD sulla testa e si scrivano le 3 equazioni cardinali di equilibrio della testa:

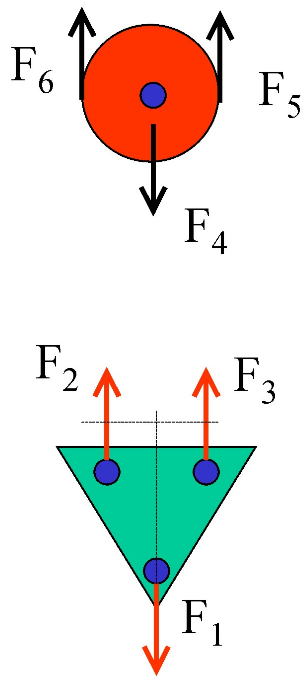
$$D_x\,65 = 120mg$$
$$-F_{AB}\sin 15^\circ + D_y - mg = 0$$
$$F_{AB}\cos 15^\circ + D_x = 0$$

da cui $D_x = 1.84\,\mathrm{mg}$, $D_y = .5\,\mathrm{mg}$, $F_{AB} = -1.911\,\mathrm{mg}$
Per determinare la forza F_E della molla si impone, ad esempio, che il momento rispetto a F di tutte la forze applicate ad FD sia nullo. Si ottiene $F_E = 45.2\,\mathrm{N}$

9 Esempio

Lo strano strumento di Figura serve a misurare il peso della persona P. P tira verso il basso sul dinamometro B con una forza di 76 N e legge sulla bilancia il peso di 268 N. I fili possono sopportare solo una tensione diretta come il filo stesso. Qual è il peso reale della persona?
Per semplicità, e per collocare questo esercizio nel contesto della statica dei corpi rigidi, è possibile trattare i fili come sottilissime aste rigide senza peso incernierate alle pulegge nei punti di contatto con le stesse. Questa idealizzazione potrà essere applicata nel seguito a tutti gli esercizi che coinvolgono fili o catene.

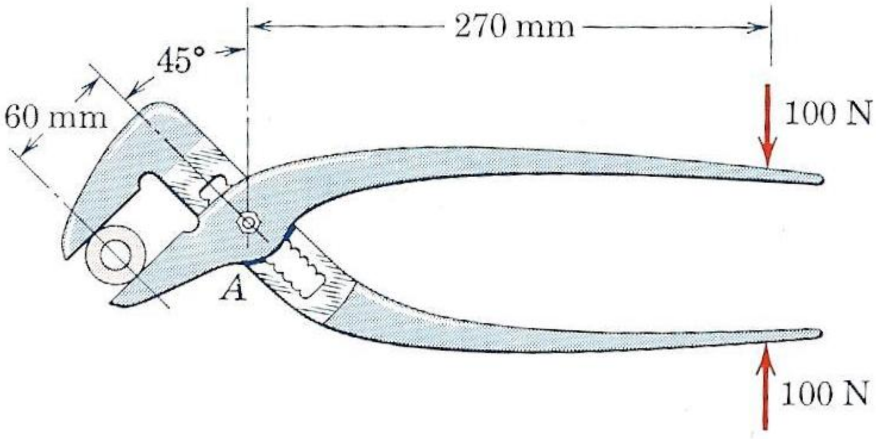




Traccia di soluzione. Si esaminano in sequenza vari corpi rigidi, cominciando con la piastra A. L'equazione del momento rispetto al punto di applicazione di F_1 fornisce: $F_2 = F_3$. L'equilibrio in direzione verticale fornisce: $2F_2 = F_1$. L'equilibrio in direzione orizzontale è automaticamente soddisfatto.
Si esamini ora la puleggia D. Per l'equilibrio del filo: $F_2 = F_4$. L'equazione del momento rispetto al punto di applicazione di F_4 fornisce: $F_5 = F_6$. L'equilibrio in direzione verticale fornisce: $2F_5 = F_4$. Quindi $F_5 = .25F_1$.
Applicando lo stesso procedimento alla puleggia C si ottiene $F_7 = .25F_1$. Ma $F_7 = 76\,\mathrm{N}$.
Sull'uomo sono esercitate le forze: $76\underline{e}_2$, $4F_7\underline{e}_2$, $268\underline{e}_2$. Tali forze equilibrano il suo peso, che risulta pari a 648 N.

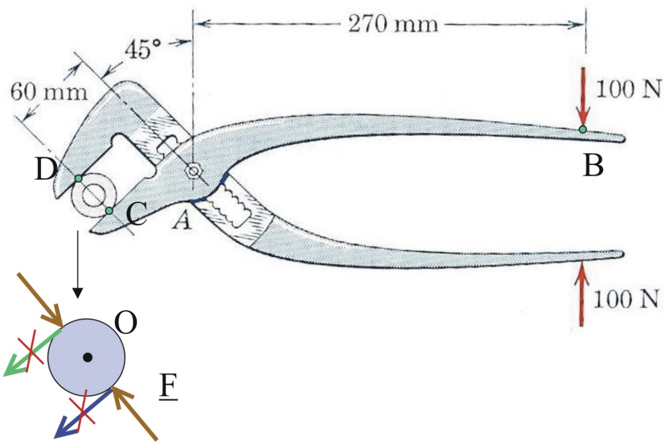
10 Esempio (febbraio 2003)

Calcolare il modulo della reazione vincolare in A. Le superfici di contatto sono scabre e non é lecito trascurare a priori le forze tangenziali scambiate tra pinza e perno



Traccia di soluzione. Equilibrio della barra "afferrata": $\underline{R} = \underline{0}$ e $\underline{M}(O) = \underline{0}$, dove O é il centro della barra stessa. Queste equazioni dicono che le uniche forze che la pinza può esercitare sulla barra sono due forze $\underline{F}$ perpendicolari ai piatti delle pinze in C ed in D. La barra esercita sulle pinze forze uguali e contrarie.
Equilibrio del sottosistema pinza CAB. Momento rispetto ad A:

$$F\,60 = (100)(270) \qquad \rightarrow \qquad F = 450\,N$$



Risultante nullo:

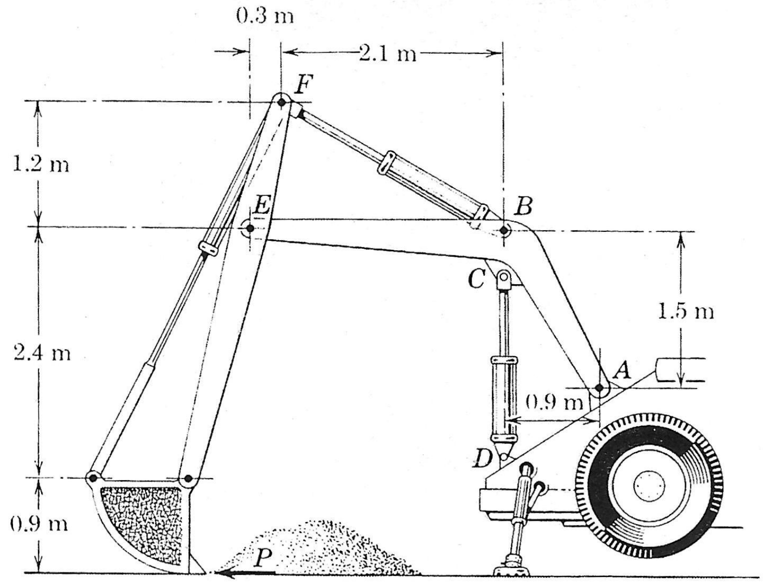
$$A_x + \frac{F}{\sqrt{2}} = 0$$
$$A_y - \frac{F}{\sqrt{2}} - 100 = 0$$

da cui: $A_x = -225\sqrt{2}$ N, $A_y = 100 + 225\sqrt{2}$ N e $\|\underline{A}\| = 525,49\,\mathrm{N}$

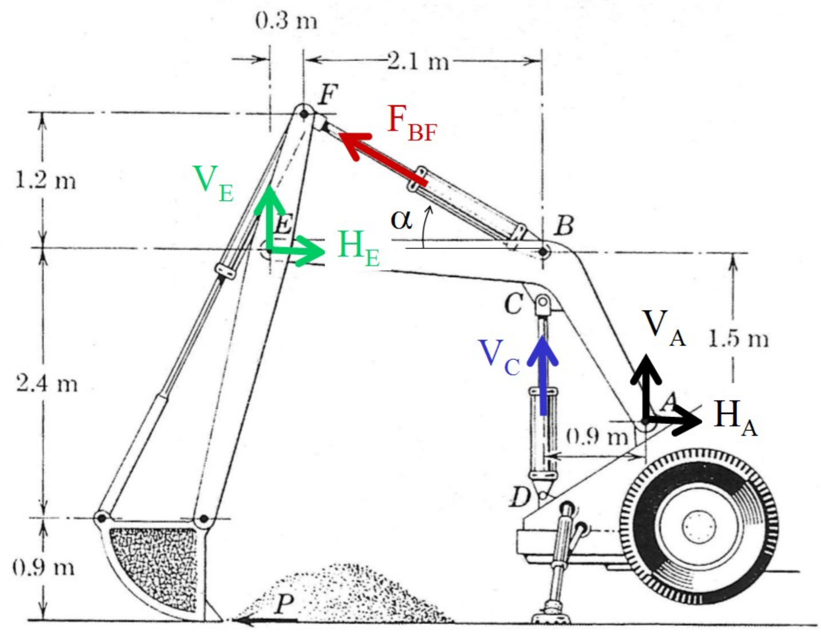
11 Tema esame settembre 2003

11.1 Esercizio 1

Sulla pala della scavatrice rappresentata in Figura viene esercitata una forza orizzontale $P = 10\,\mathrm{kN}$. Trascurando il peso dei bracci meccanici, si calcolino le forze (espresse come vettori vettori) esercitate sulle cerniere in A ed in E



Traccia di soluzione



Si calcolano prima le forze in A. A tale scopo si considera il sottosistema che si ottiene rompendo le cerniere A e D e considerando tutta la parte di sinistra. Le forze esercitate su questo sottosistema sono: la forza P, le reazioni H_A, V_A, la forza verticale V_C esercitata dalla biella sul corpo rigido EBA. Le equazioni cardinali sono sufficienti per calcolare le incognite:

$$\begin{aligned} M(A) = 0 \quad &\rightarrow \quad -P(2.4+0.9-1.5) - V_C 0.9 = 0 \\ R_y = 0 \quad &\rightarrow \quad V_A + V_C = 0 \\ R_x = 0 \quad &\rightarrow \quad H_A = P \end{aligned}$$

da cui $H_A = P, V_A = 2P$. Riassumendo: $\underline{F}_A = H_A\underline{e}_x + V_A\underline{e}_y$ rappresenta la forza esercitata dal blocco a destra sul corpo EBA.
Per calcolare le reazioni in E consideriamo il sottosistema di sinistra che si ottiene rompendo le cerniere F e E. Le forze esterne applicate sul sottosistema scelto sono: $\underline{F}_E = H_E\underline{e}_x + V_E\underline{e}_y$, $\underline{F}_{BF} = T_{BF}\underline{e}_{BF}$ e $-P\underline{e}_x$. Per semplificare i conti, la forza $\underline{F}_{BF}$ può essere espressa come: $\underline{F}_{BF} = F_{BF}\underline{BF}$, dove F_{BF} è pari a $T_{BF}/\|\underline{FB}\|$.
Inoltre:

$$\underline{BF} = -2.1\underline{e}_x + 1.2\underline{e}_y$$

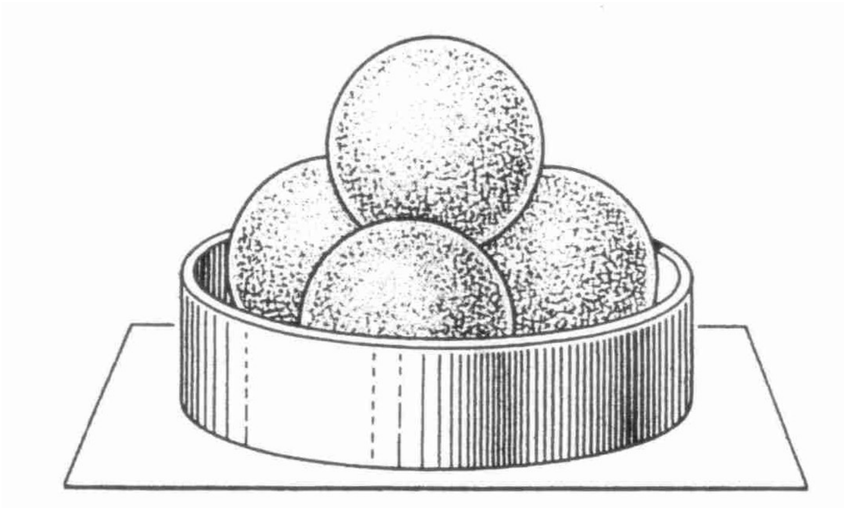
Ancora una volta le equazioni cardinali sono sufficienti per risolvere il problema:

$$\begin{aligned} M(E) = 0 \quad &\rightarrow \quad -3.3P + F_{BF}(2.1 \times 1.2 + 1.2 \times 0.3) = 0 \\ R_y = 0 \quad &\rightarrow \quad 1.2F_{BF} + V_E = 0 \\ R_x = 0 \quad &\rightarrow \quad H_E - P - 2.1F_{BF} = 0 \end{aligned}$$

12 Tema esame febbraio 2004

12.1 Esercizio 1

Tre sfere identiche di acciaio $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ sono appoggiate su di un piano e contenute in un anello circolare $\mathcal{A}$. Le dimensioni dell'anello e delle sfere sono tali che ciascuna sfera sfiora le altre due e l'anello. Si appoggia poi sulle prime tre sfere una quarta sfera $\mathcal{S}_4$ identica di massa M. Trascurando l'attrito e supponendo che le tre sfere inferiori non si scambino tra loro alcuna forza, calcolare la forza che l'anello esercita su ciascuna delle sfere.



Traccia di soluzione

Le quattro sfere si dispongono in modo tale che i loro centri rappresentano i vertici di un tetraedro con lati tutti uguali a $2R$, dove R rappresenta il raggio di ciascuna sfera. Ciascun lato passa per un punto di contatto tra due sfere ed è ortogonale alle superfici di contatto in tale punto. Poiché è assente l'attrito le forze di contatto sono dirette come i lati del tetraedro. Le direzioni sono quindi note. Si devono determinare i moduli. Si ricorda che, per ipotesi, le forze di contatto tra le sfere nel piano sono nulle.
Si consideri il sistema $\mathcal{A}$ delle tre sfere inferiori. Siano C_1, C_2 e C_3 i tre punti di contatto tra le sfere e l'anello esterno. Le forze $\underline{T}_1, \underline{T}_2, \underline{T}_3$ (di modulo T_1, T_2, T_3) esercitate dalle sfere sull'anello sono assunte divergenti dal centro dell'anello (vedere Figura) e non hanno componenti verticali (per la mancanza di attrito). Si consideri un asse verticale z_1 passante per il centro O_1 di $\mathcal{S}_1$ e si imponga che il momento delle tre forze rispetto a z_1 è nullo (è una condizione necessaria di equilibrio). Si ottiene $T_2 = T_3$. Si ripete il procedimento con z_2 passante per O_2 ottenendo $T_1 = T_3$. Quindi i moduli delle tre forze sono identici e vengono indicati con T.
Si consideri ora la sfera $\mathcal{S}_4$ che tocca le tre sfere inferiori nei tre punti D_1, D_2, D_3. Le forze che agiscono su $\mathcal{S}_4$ sono il peso $-Mg\underline{e}_z$ e le tre forze di contatto $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ che supponiamo convergenti verso il centro della sfera superiore. Si consideri adesso il centro della base del tetraedro sopra descritto e si imponga che il momento rispetto a tale punto delle forze agenti su $\mathcal{S}_4$ sia nullo. La componente lungo $\underline{e}_z$ viene automaticamente nulla mentre le altre due impongono che $V_1 = V_2 = V_3$. Queste incognite verranno quindi indicate con V.
Si consideri il piano verticale passante per C_1 ed il centro dell'anello. Dalla Figura 4 si trova:

$$L_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}, \qquad L_2 = \frac{2R}{\sqrt{3}}\sqrt{2}$$

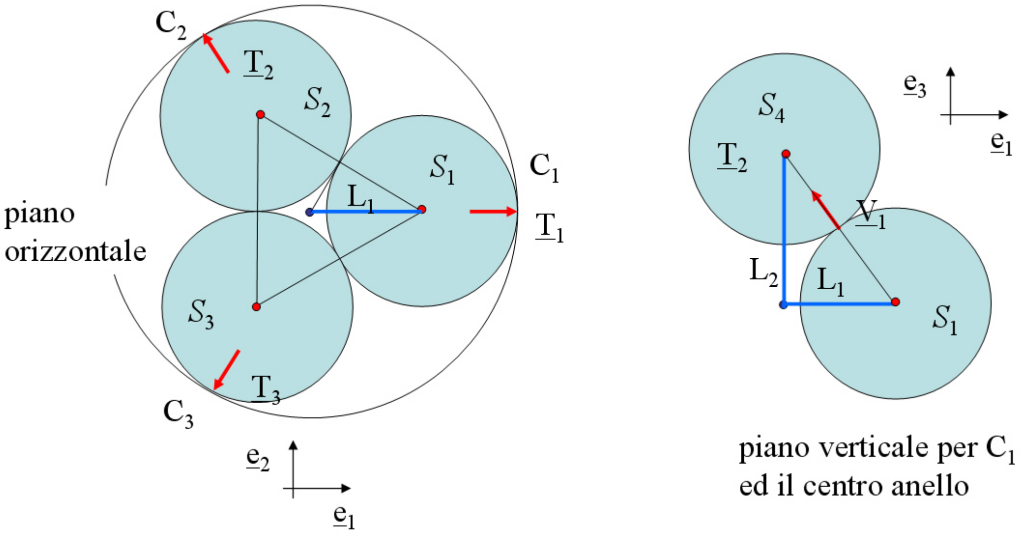


Figura 4: Piani di sezione orizzontale e verticale

In questo piano la forza $\underline{V}_1$ ha dunque la forma:

$$\underline{V}_1 = V\left(-\underline{e}_x + \sqrt{2}\underline{e}_z\right)\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Si potrebbe ripetere il procedimento per tutte le tre sfere della base trovando che le componenti verticale della forza esercitata su $\mathcal{S}_4$ sono identiche. Per il sistema $\mathcal{S}_4$ si ha dunque:

$$R_z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Mg = V\sqrt{6}$$

La forza che la sfera superiore trasmette alla sfera $\mathcal{S}_1$ è dunque pari a:

$$-\underline{V}_1 = \frac{Mg}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_x - \underline{e}_y\right)$$

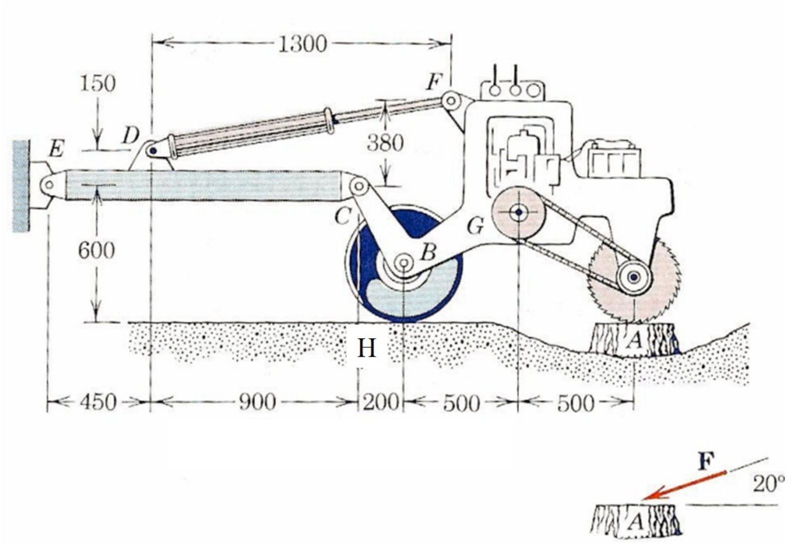
Dall'equilibrio in direzione orizzontale di $\mathcal{S}_1$ si trova infine che

$$T = \frac{Mg}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

13 Tema esame febbraio 2004

13.1 Esercizio 1

L'apparecchio da taglio di Figura ha massa 300 kg (la ruota in B, il braccio DF ed il braccio EC non sono considerati parte dell'apparecchio e se ne trascura la massa). Il centro di gravità dell'apparecchio è in G. La sega esercita su A la forza indicata a lato della Figura con modulo di F pari a 400N. Calcolare la forza che il perno della cerniera in C esercita sull'apparecchio. Non è lecito trascurare l'attrito tra la ruota in B ed il terreno. Le cerniere invece sono prive di attrito. Il punto A è livellato col terreno a sinistra.



Traccia di soluzione

Non è lecito trascurare l'attrito e dunque sulla ruota B in H vi può essere a priori una forza qualunque: $H_x \underline{e}_x + H_y \underline{e}_y$. Se si considera però il sottosistema ruota B e si impone che $M(B) = 0$ si trova subito (come sempre accade per le ruote senza freni o motori) che $H_x = 0$.
Si osserva che $\underline{F}$ è la forza che la sega esercita sul tronco. Invece $-\underline{F}$ è la forza che il tronco esercita sulla sega.
Si considera il sistema nel suo complesso rompendo E (vedere Figura 5). Se si rompe il vincolo E è necessario mettere in evidenza la reazione equivalente $E_x \underline{e}_x + E_y \underline{e}_y$. Si impone che ($\alpha = 20°$):

$$M_z(E) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$1550 H_y - 2050 Mg + 600 F \cos\alpha + 2550 F \sin\alpha = 0$$

da cui si ricava il valore di $H_y = 3521$ N.
Si considera ora l'apparecchio di taglio propriamente detto (vedere Figura 6). Si rompono quindi i vincoli in C ed F e si mettono in evidenza le rispettive reazioni vincolari che diventano forze esterne per il sottosistema in questione. Si impone che, per tutte le forze esterne agenti su di

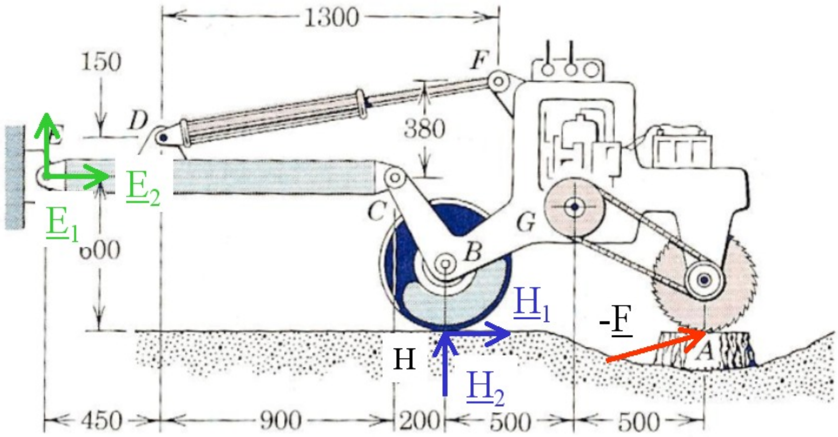


Figura 5: Forze esterne per il sistema globale

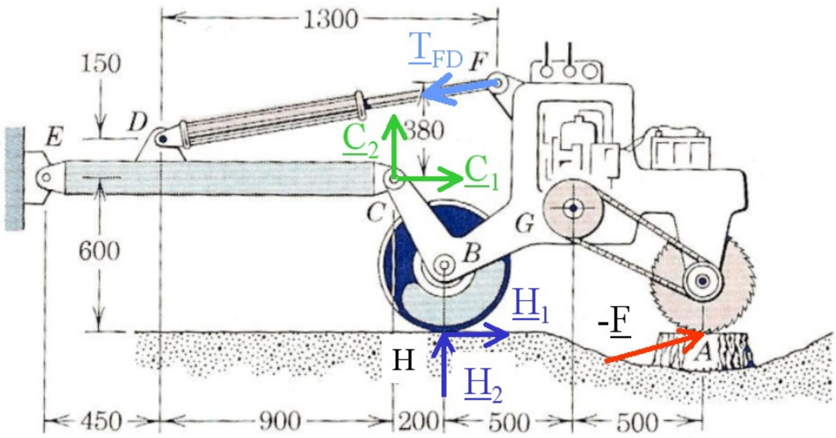


Figura 6: Forze esterne per l'apparecchio di taglio

esso:

$$M_z(C) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$200H_y - 700Mg + 600F\cos\alpha + 1200F\sin\alpha + 380T_{FD}\cos\beta - 400T_{FD}\sin\beta = 0$$

dove β è l'angolo di inclinazione di $\underline{FD}$ rispetto all'orizzontale:

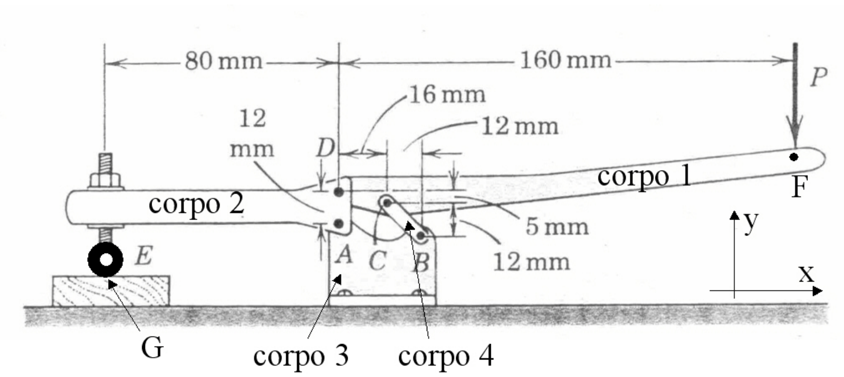
$$\beta = \arctan\frac{230}{1300}$$

Si ottiene dunque $T_{FD} = 3172$ N. Le componenti C_x e C_y seguono facilmente.

14 Tema esame giugno 2005

14.1 Esercizio 1

Si consideri l'utensile da taglio di Figura. I corpi sono collegati tra loro da cerniere prive di attrito. La sega viene premuta contro il blocco di legno tramite l'applicazione della forza P N su F (in direzione verticale). Alla vite è attaccata in E, tramite una cerniera senza attrito, una sega circolare (l'oggetto nero) di raggio 5 mm. La sega è tenuta in rotazione uniforme da un motore (solidale con il corpo 2) che, nell'istante considerato, esercita su di essa solo una coppia pari a C N·m e fa ruotare la sega in senso antiorario. Per ipotesi la sega tocca il blocco di legno nel solo punto G che giace sull'asse della vite. La distanza verticale tra G e D è 27 mm. Determinare la forza esercitata dal blocco di legno sulla sega.



Traccia di soluzione

Si considera dapprima il corpo 1 e si scrive l'equazione del momento rispetto a D. La biella CB esercita una forza $-C_y \underline{e}_x + C_y \underline{e}_y$ sul corpo in questione.

$$-160P - 5C_y + C_y 16 = 0 \qquad \rightarrow \quad C_y = \frac{160}{11} P$$

Scrivendo le altre due equazioni cardinali della statica per il corpo 1 si ottiene la forza $D_x \underline{e}_x + D_y \underline{e}_y$ ce il corpo 2 esercitata sul corpo 1.

$$D_x - C_y = 0 \qquad D_y + C_y - P = 0$$

da cui si ricavano le forze D_x e D_y.
Si analizza ora la sega. Siccome la sega ruota in senso antiorario, il motore esercita una coppia di $1000C\underline{e}_z$ Nmm sulla sega (attenzione al segno ed alle unità di misura). Tale coppia serve effettivamente a tagliare il blocco di legno: non è quindi possibile trascurare la componente orizzontale della forza in G. Il blocco di legno esercita quindi sulla sega in G una forza incognita generica, $G_x \underline{e}_x + G_y \underline{e}_y$. Scrivendo l'equazione del momento rispetto alla cerniera E per la sega si può calcolare immediatamente il valore di G_x:

$$1000C + 5G_x = 0$$

da cui $G_x = -200C$ N.
Si analizza ora il sistema corpo 2 + sega e si scrive l'equazione del momento rispetto ad A:

$$12D_x - 80G_y + 15G_x = 0$$

da cui si ricava G_y. La coppia è interna al sistema considerato, quindi non entra nell'equazione precedente! La forza richiesta dal problema è $G_x \underline{e}_x + G_y \underline{e}_y$.

ATTENZIONE: se si considera solo il corpo 2 senza la sega, allora si deve tener conto della coppia ma anche della forza che la sega esercita sulla vite!

14.2 Esercizio 2

Si consideri la struttura dell'esercizio precedente senza la sega in E (quindi non vi è contatto con il blocco sottostante). Se la velocità del punto E ha componente verticale $-U\underline{e}_y$, si esprimano gli atti di moto dei corpi 1,2,4 e se ne calcoli il centro di istantanea rotazione usando i metodi della cinematica analitica.

Traccia di soluzione

Se si considera la cerniera a terra, l'atto di moto del corpo 2 è:

$$\underline{U}^{(2)}(P) = \omega^{(2)} \underline{e}_z \wedge \underline{AP}$$

Inoltre, per ipotesi la velocità verticale del punto E è $-U\underline{e}_y$, quindi

$$80\omega^{(2)} = U$$

Se si considera la cerniera a terra in B, l'atto di moto del corpo 4 è:

$$\underline{U}^{(4)}(P) = \omega^{(4)} \underline{e}_z \wedge \underline{BP}$$

L'atto di moto generico del corpo 1 è:

$$\underline{U}^{(1)}(P) = \underline{U}_D + \omega^{(1)} \underline{e}_z \wedge \underline{DP} = -\frac{3}{20} U \underline{e}_x + \omega^{(1)} \underline{e}_z \wedge \underline{DP}$$

ed è soggetto ai vincoli:

$$\underline{U}^{(1)}(D) = \underline{U}^{(2)}(D) = -12\omega^{(2)} \underline{e}_x \qquad \underline{U}^{(1)}(C) = \underline{U}^{(4)}(C) = -12\omega^{(4)} \underline{e}_x - 12\omega^{(4)} \underline{e}_y$$

e quindi:

$$\underline{U}_D = -12\omega^{(2)} \underline{e}_x$$

$$-\frac{3}{20} U \underline{e}_x + 5\omega^{(1)} \underline{e}_x + 16\omega^{(1)} \underline{e}_y = -12\omega^{(4)} \underline{e}_x - 12\omega^{(4)} \underline{e}_y$$

Si ottiene il sistema:

$$16\omega^{(1)} = -12\omega^{(4)}$$

$$-\frac{3}{20} U + 5\omega^{(1)} = -12\omega^{(4)}$$

che ammette la soluzione:

$$\omega^{(1)} = -\frac{3}{220} U \qquad \omega^{(4)} = \frac{1}{55} U$$

Il CIR del corpo 2 è A, il CIR del corpo 4 è B. Il CIR del corpo 1 si trova cercando il punto Q a velocità nulla:

$$\underline{U}^1(Q) = -\frac{3}{20} U \underline{e}_x - \frac{3}{220} U \underline{e}_z \wedge \left(x \underline{e}_x + y \underline{e}_y \right) = \underline{0}$$

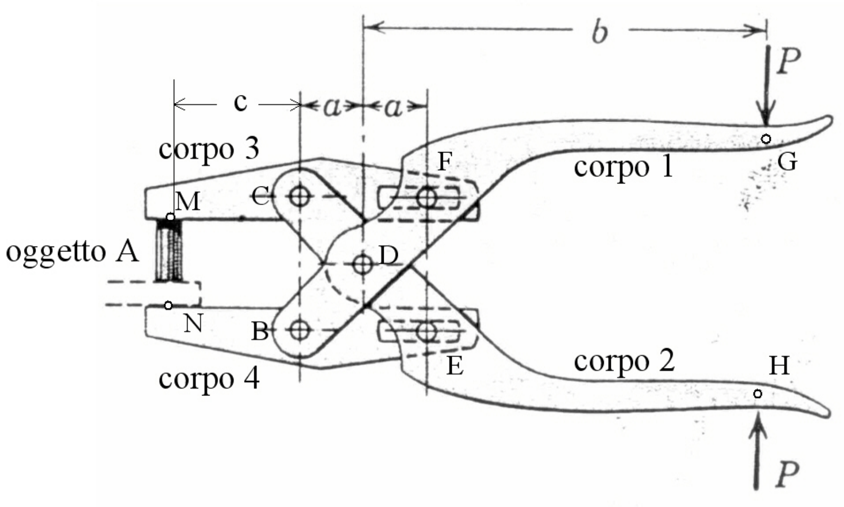
dove x ed y rappresentano le coordinate rispetto a D. Si ottiene:

$$x = 0, \qquad y = 11$$

15 Tema esame luglio 2005

15.1 Esercizio 1

Lo strumento di Figura serve per pinzare l'oggetto a sinistra. Tutti corpi sono collegati tra loro da cerniere prive di attrito. La cerniera tra il corpo 1 ed il corpo 3 e la cerniera tra il corpo 2 ed il corpo 4 possono traslare nella guida lungo l'orizzontale senza attrito. Si trascuri l'attrito sull'oggetto A e si consideri che il contatto con le pinze sia puntuale (in M ed N allineati in verticale). Si calcoli la compressione esercitata sull'oggetto A e la forza scambiata in D. La struttura è geometricamente simmetrica, ma non è lecito assumere a priori la simmetria di forze o coppie. Ogni affermazione sulle forze e coppie deve essere basata su equazioni.



Traccia di soluzione

Si isoli il corpo 3. Le forze agenti su di esso sono: $F_M \underline{e}_y$, $F_{C1}\underline{e}_x + F_{C2}\underline{e}_y$, $F_F \underline{e}_y$. Poiché la sola forza orizzontale è F_{C1}, si ottiene $F_{C1} = 0$. Nel seguito si indicherà F_{C2} semplicemente F_C
Si scrivono le equazioni $R_y = 0$ e $M(C) = 0$:

$$F_M + F_C + F_F = 0 \tag{1}$$

$$cF_M - 2aF_F = 0 \tag{2}$$

Si isolino i corpi 1 e 2 (senza però rompere la cerniera intermedia D). Su di essi, oltre alle forze $\underline{P}$, si esercitano le forze $-F_C\underline{e}_y$, $F_B\underline{e}_y$, $-F_F\underline{e}_y$, $F_E\underline{e}_y$ che sono tutte verticali per gli stessi ragionamenti appena presentati.
Se si impone l'annullarsi del momento rispetto ad un punto qualunque dell'asse EF si ottiene che $F_B = F_C$; se si impone l'annullarsi del momento rispetto ad un punto qualunque dell'asse CB si ottiene che $F_F = F_E$
Si consideri adesso il solo corpo 1, su cui agisce anche la forze della cerniera in D. Poiché non vi sono altre forze orizzontali la componente orizzontale di $\underline{F}_D$ è nulla. Si scrivono quindi le equazioni $R_y = 0$ e $M(D) = 0$:

$$F_C + F_D - F_F - P = 0 \tag{3}$$

$$aF_C + aF_F + Pb = 0 \tag{4}$$

da cui si ottiene che:

$$F_M = P\frac{b}{a}$$

La forza F_D si trova poi per sostituzione:

$$F_D = \frac{a^2 + ab + bc}{a^2}P$$

15.2 Esercizio 2

Si consideri la struttura dell'esercizio precedente senza l'oggetto A. Si esprimano gli atti di moto dei corpi 1,2,3,4 e se ne calcoli il centro di istantanea rotazione usando i metodi della cinematica analitica in funzione della velocità di avvicinamento dei punti di applicazione delle forze P. Si supponga che i punti G ed H abbiano la stessa velocità verticale U (di segno opposto) e che la loro velocità orizzontale sia $-Q\underline{e}_x$. Indicare con d la distanza verticale tra D e G e con h la distanza verticale tra D ed F.

Traccia di soluzione

Atto di moto dei corpi 1 e 2:

$$\underline{U}^1(P) = \underline{U}^1(D) + \underline{\omega}_x \wedge \underline{DP} \tag{5}$$
$$\underline{U}^2(P) = \underline{U}^2(D) + \underline{\omega}_y \wedge \underline{DP} \tag{6}$$

Poiché $\underline{U}(G) = -Q\underline{e}_x - U\underline{e}_y$ e $\underline{U}(H) = -Q\underline{e}_x + U\underline{e}_y$ si ottiene:

$$\omega_y = -\omega_x = \frac{U}{b} \qquad \underline{U}(D) = -\left(Q + U\frac{d}{b}\right)\underline{e}_x := -U_D\underline{e}_x$$

Atto di moto del corpo 3:

$$\underline{U}^3(P) = \underline{U}^3(C) + \omega_z \wedge \underline{CP}$$

Vincolo cerniera C:

$$\underline{U}^3(C) = \underline{U}^2(C) = -U_D\underline{e}_x - \omega_y h\underline{e}_x - \omega_y a\underline{e}_y$$

Vincolo "carrello" F:

$$\underline{U}^3(F) \cdot \underline{e}_y = \underline{U}^1(F) \cdot \underline{e}_y \quad \rightarrow \quad 2a\omega_z - a\omega_y = a\omega_x$$

da cui $\omega_z = 0$. Un ragionamento identico porta a $\omega_4 = 0$. Il corpo 3 trasla quindi in orizzontale (CIR all'infinito in direzione verticale). Indicando con $\underline{x} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y$ il CIR di 1 rispetto a D, si ottiene:

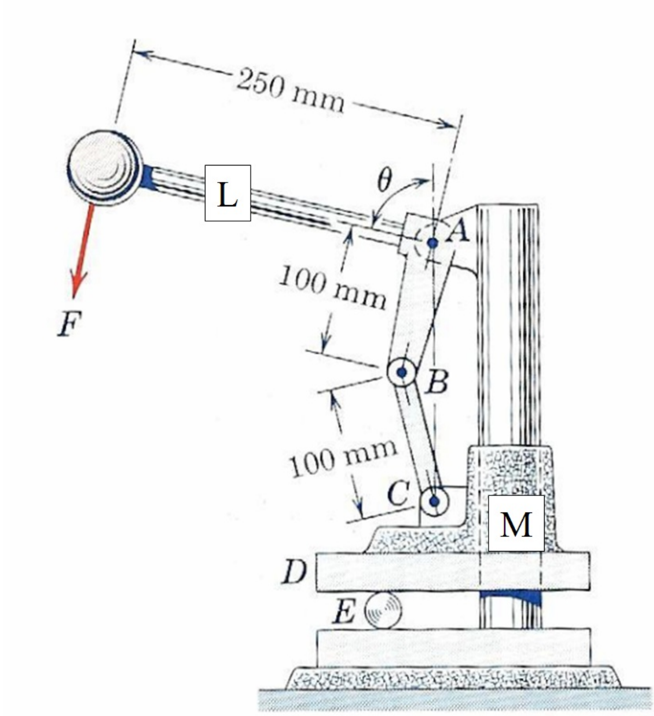
$$x = 0, \qquad y = \frac{Q}{U}b + d$$

Il CIR di 2 è il simmetrico del CIR di 1 rispetto all'asse orizzontale per D

16 Tema esame febbraio 2004

16.1 Esercizio 1

Il manicotto M scorre senza attrito lungo l'asta verticale. Calcolare la forza di compressione esercitata su E (trascurare l'attrito) e la forza che la leva L trasmette al perno della cerniera in A se il modulo di F è 200 N e $\theta = 75°$. Trascurare le forze peso



Traccia di soluzione

Si considera dapprima la leva FAB che è soggetta alle forze della Figura 7. Per calcolare la tensione nella biella CB si impone (è comodo traslare $\underline{T}_{CB}$ in C):

$$\underline{M}(A) = \underline{0} \qquad \Rightarrow \qquad F\,250 - T_{CB} 200 \sin\theta\cos\theta = 0$$

da cui si ricava T_{CB} (l'angolo tra $\underline{CB}$ e l'orizzontale è θ). Le componenti A_x ed A_y si ricavano agevolmente dalle equazioni $R_x = 0, R_y = 0$.
Si considera ora il manicotto M che è soggetta alle forze della Figura 8. Si noti che non sono state messe in evidenza le forze che l'asta verticale esercita sul manicotto. L'unica cosa che è dato sapere (e che interessa) è che non eserciterà forze verticali poiché non c'è attrito. L'unica equazione che si può scrivere è quindi:

$$R_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_y - T_{CB}\sin\theta = 0$$

da cui si ricava E_y, che rappresenta effettivamente la compressione su E (perchè?)

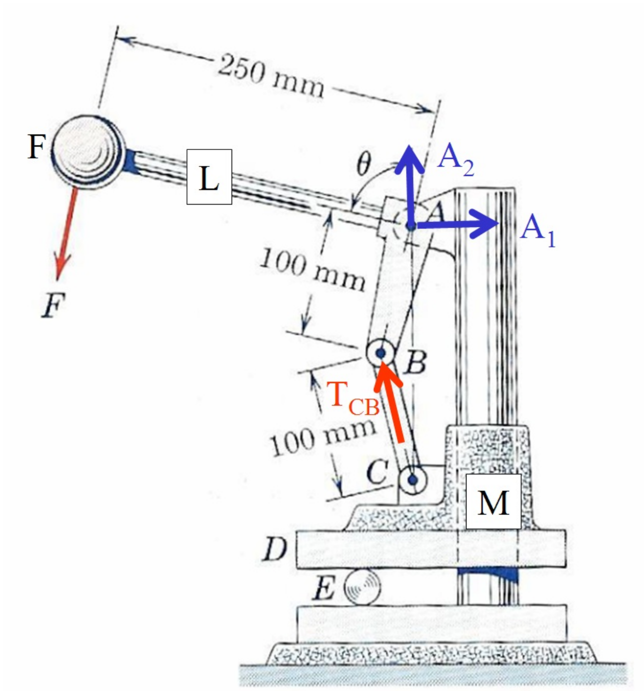


Figura 7: Forze esterne per la leva FAB

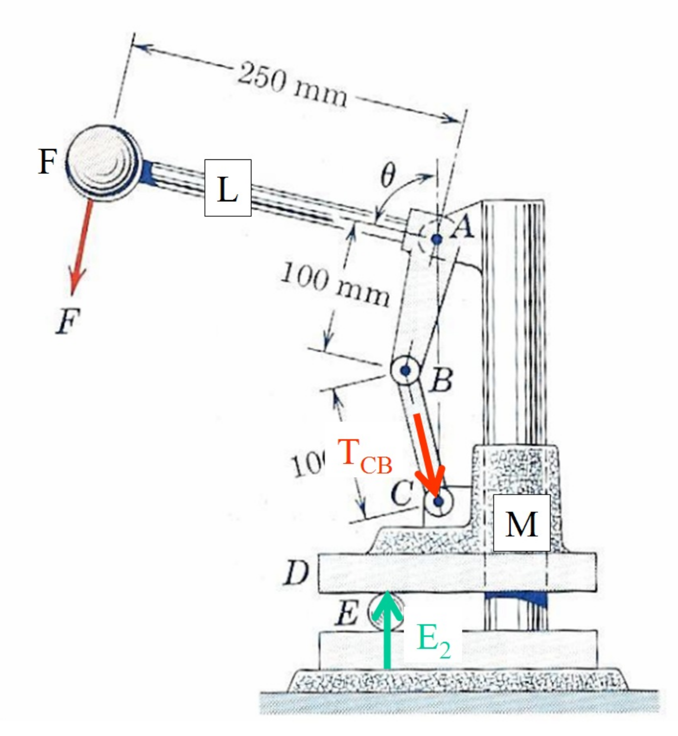
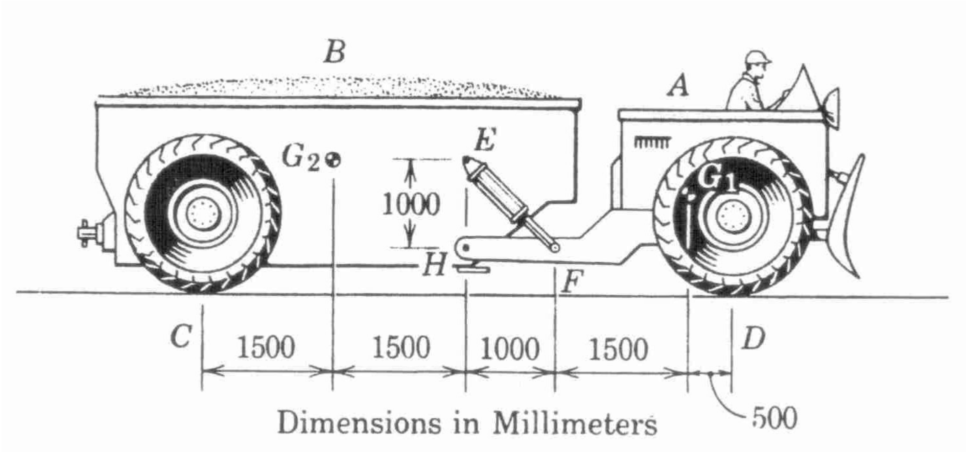


Figura 8: Forze esterne per il manicotto M

17 Tema esame luglio 2004

17.1 Esercizio 1

La massa della parte $\mathcal{A}$ è di 4 Mg (megagrammi) con baricentro in G_1. La massa della parte $\mathcal{B}$ è di 24 Mg con baricentro in G_2. Tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono posizionati due cilindri idraulici: EF ed un cilindro identico dal lato opposto (uno per lato). Si calcoli la forza esercitata dal terreno sulla parti $\mathcal{A}$ e sulla parte $\mathcal{B}$. Si calcoli la compressione nel cilindro EF.



Traccia di soluzione

Le forze peso sono $P_A = 4000g\,\text{N}$ e $P_B = 24000g\,\text{N}$ con g accelerazione di gravità (9.81 m/s^2). Si indichi con V_D e V_C la forza esercitata dal terreno su di una ruota anteriore e posteriore, rispettivamente
Si considera tutto il sistema $\mathcal{A} + \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \underline{M}(C) = \underline{0} \quad &\Rightarrow \quad 6000 \cdot 2V_D - P_B 1500 - P_A 5500 = 0 \\ R_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2(V_D + V_C) = P_B + P_A \end{aligned}$$

da cui si ricavano V_D e V_C:

$$V_D = \frac{1}{120}\left(55P_A + 15P_B\right) \qquad V_C = \frac{1}{24}\left(P_A + 9P_B\right)$$

Chiaramente la forza del terreno su tutta la parte $\mathcal{A}$ sarà $2V_D$ e così per $\mathcal{B}$ $2V_C$.
Si indica con C_{EF} la compressione nel pistone. Il pistone è una biella quindi ammette solo forza assiale.
Si considera poi il sottosistema $\mathcal{A}$. Detto x l'asse ortogonale al piano passante per H Ricordandosi che ci sono due pistoni:

$$M_z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3000 \cdot 2V_D - 2500P_A - \frac{2}{\sqrt{2}}1000C_{EF} = 0$$

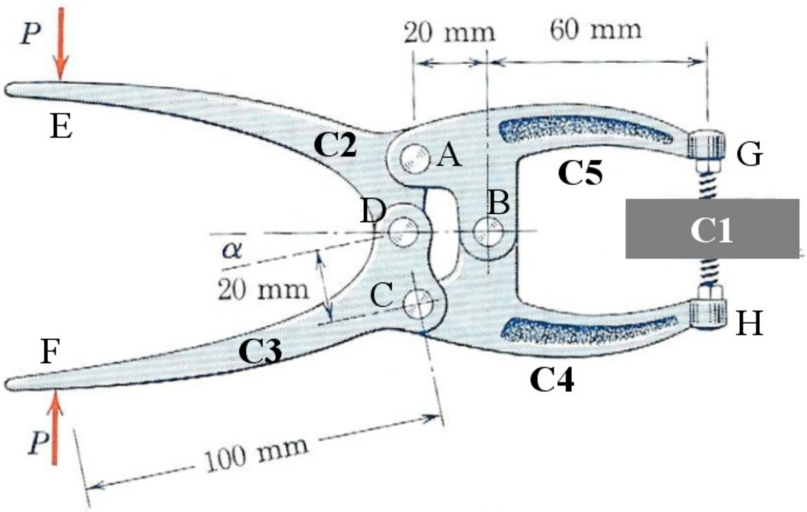
da cui:

$$C_{EF} = \frac{P_A + 3P_B}{4\sqrt{2}}$$

18 Tema esame luglio 2004

18.1 Esercizio 1

Calcolare le forze esercitate dalle due viti sul corpo C_1 se $P = 150\,\mathrm{N}$ e $a = 10°$. Calcolare anche la forza esercitata da C_4 sul perno B. Specificare sempre il sottosistema considerato e le forze agenti su di esso.
Per semplicità si possono considerare le due viti come parte integrante dei corpi rigidi C_4 e C_5 rispettivamente Si trascura il peso. NON é lecito trascurare l'attrito nei punti di contatto tra C1 e le viti.



Traccia di soluzione

Si considera dapprima il corpo C_1 che è soggetto alle quattro forze della Figura 9. Si impongono le tre equazioni cardinali della statica per C_1 e si trova che $V_H = -V_G$ e che $H_H = H_G = 0$.

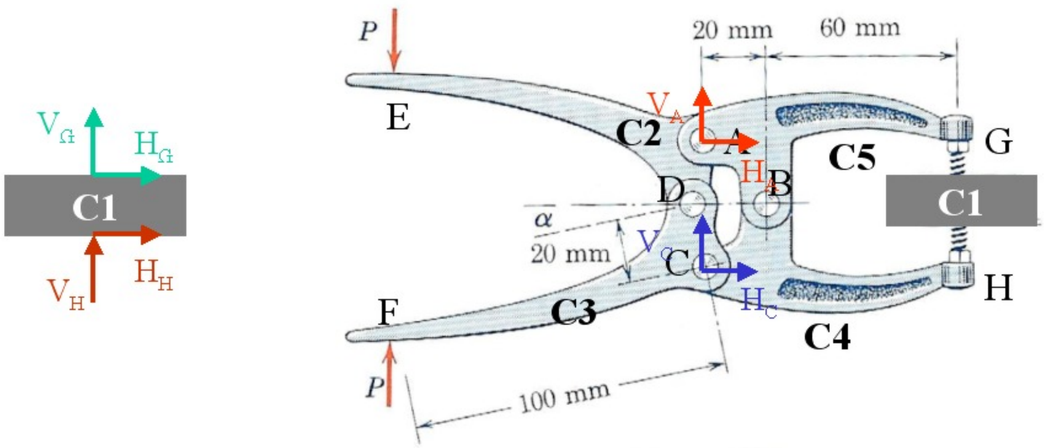


Figura 9: Forze esterne per il corpo C_1 ed il sottosistema $C_4 + C_5 + C_1$

Si considera poi il sottosistema $C_4 + C_5 + C_1$ soggetto alle forze esterne della Figura 9 applicate in A ed in B. Si sottolinea che le forze scambiate in B tra C_5 e C_4 sono forze interne e quindi non entrano nelle equazioni cardinali della statica per il sottosistema scelto. Si impongono le due equazioni:

$$R_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_A + H_C = 0$$
$$M(C) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_A = 0$$

da cui si ricava $H_A = H_C = 0$.
Si considera poi il sottosistema C_2 soggetto a forze esterne applicate in E, A e D. Si impone l'equazione:

$$M(D) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (100 \cos\alpha - 20 \sin\alpha)P - 20 \sin\alpha V_A = 0$$

da cui si ricava V_A in funzione di P.
Si considera infine il sottosistema C_5 soggetto a forze esterne applicate in A, B e G. Si impone l'equazione:

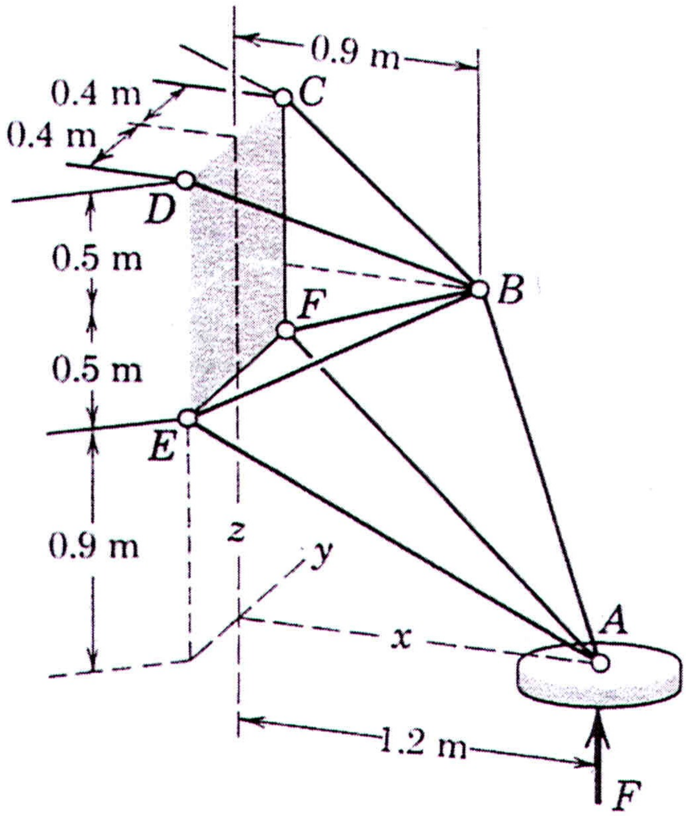
$$M(B) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -20V_A - 60V_G = 0$$

da cui si ricava V_G. La forza V_G rappresenta la compressione su C_1 (perché?). Le altre forze richieste seguono facilmente.

19 Tema esame settembre 2004

19.1 Esercizio 1

La forza $\underline{F}$, verticale ed ortogonale al piattello, ha valore 2.2 kN. Calcolare la forza esercitata dall'asta EB su B. Tutti i vincoli sono cerniere sferiche. Poiché la struttura ed il carico sono simmetrici rispetto ad un piano verticale passante per A e B, è lecito assumere come ipotesi che le forze in travi simmetriche rispetto a tale piano siano esse stesse simmetriche.



Traccia di soluzione

Poiché vi sono solo cerniere sferiche tutte le travi sono bielle che ammettono solo forza assiale. Per verificarlo è sufficiente considerare un sottosistema costituito una generica asta ed imporre che il momento di tutte le forze applicate all'asta sia nullo se calcolato rispetto ad una delle due cerniere.
Si consideri il sottosistema cerniera A e si imponga che il momento rispetto all'asse EF di tutte le forze applicate al sottosistema sia nullo. Le forze $\underline{T}_{EA}$ e $\underline{T}_{FA}$ non danno contributo perchè passano per EF. È necessario invece esprimere la forza $\underline{T}_{BA}$:

$$\underline{T}_{BA} = T\,(0.3\underline{e}_x - 1.4\underline{e}_z)$$

Si ottiene dunque

$$M_{EF} = 0 \quad \rightarrow \quad (1.2\underline{e}_x - 0.9\underline{e}_z) \wedge (0.3T\underline{e}_x - 1.4T\underline{e}_z + F\underline{e}_z) \cdot \underline{e}_y = 0$$

da cui $T = 0.851F$.

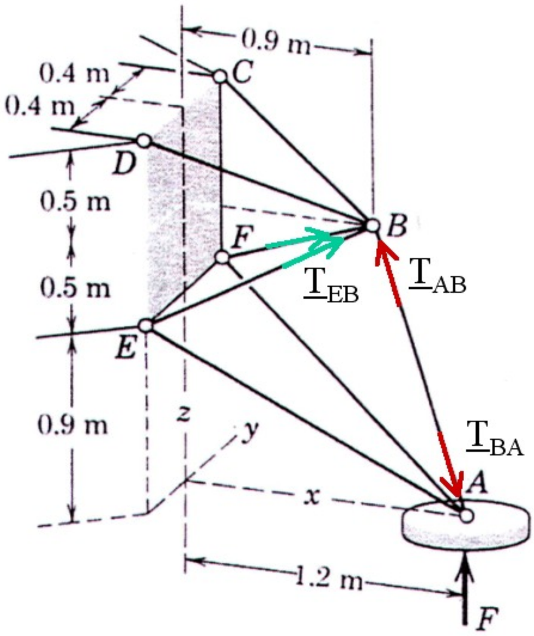


Figura 10: Esame settembre 2004

Si consideri adesso il sottosistema cerniera B e si imponga che il momento di tutte le forze rispetto all'asse DC sia nullo. Le forze $\underline{T}_{DB}$ e $\underline{T}_{CB}$ non danno contributo perchè passano per DC. È necessario invece esprimere le forze $\underline{T}_{EB}$, $\underline{T}_{FB}$ usando la simmetria:

$$\underline{T}_{EB} = Q\left(0.9\underline{e}_x + 0.4\underline{e}_y + 0.5\underline{e}_z\right)$$
$$\underline{T}_{FB} = Q\left(0.9\underline{e}_x - 0.4\underline{e}_y + 0.5\underline{e}_z\right)$$

Inoltre $\underline{T}_{AB} = -\underline{T}_{BA}$ Si ottiene dunque:

$$M_{CD} = 0 \quad \rightarrow \quad (0.9\underline{e}_x - 0.5\underline{e}_z) \wedge (1.8Q\underline{e}_x + Q\underline{e}_z - 0.3T\underline{e}_x + 1.4T\underline{e}_z) \cdot \underline{e}_y = 0$$

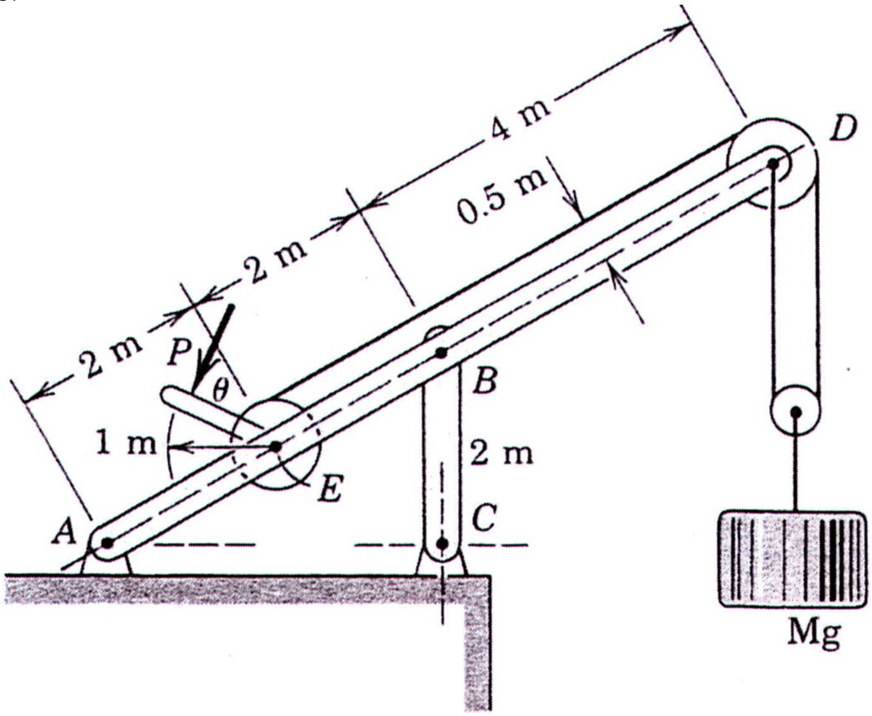
Il modulo della forza F_{EB} esercitata da EB su B risulta dunque:

$$F_{EB} = Q\|\underline{EB}\| = 1.62kN$$

20 Tema esame settembre 2004

20.1 Esercizio 1

Se la leva a cui è applicata la forza $\underline{P}$ è inclinata di 45° rispetto all'orizzontale, determinare il valore della forza $\underline{P}$ necessaria per mantenere in equilibrio la massa sospesa. La forza agisce in direzione ortogonale alla leva (la leva è lunga 1 m) Calcolare poi la forza esercitata dalla cerniera A sul terreno.



Traccia di soluzione

Si considera la puleggia F. Imponendo l'annullarsi del momento (rispetto al centro della puleggia) delle tre forze applicate (le tensioni dei tre fili) ed imponendo anche che il risultante in direzione verticale sia nullo si ottiene:

$$T_{F1} = T_{F2} = \frac{1}{2}Mg$$

dove M indica la massa del blocco e g l'accelerazione di gravità. Inoltre $T_{F2} = T_{D1}$.
Si considera poi la puleggia D, imponendo l'annullarsi del momento rispetto al centro della puleggia di tutte le forze applicate. si ottiene:

$$T_{D2} = T_{D1} = \frac{1}{2}Mg \qquad T_E = \frac{1}{2}Mg$$

Si considera il sistema puleggia E con manovella imponendo l'annullarsi del momento rispetto a E di tutte le forze applicate. Si ottiene:

$$P = \frac{1}{4}Mg$$

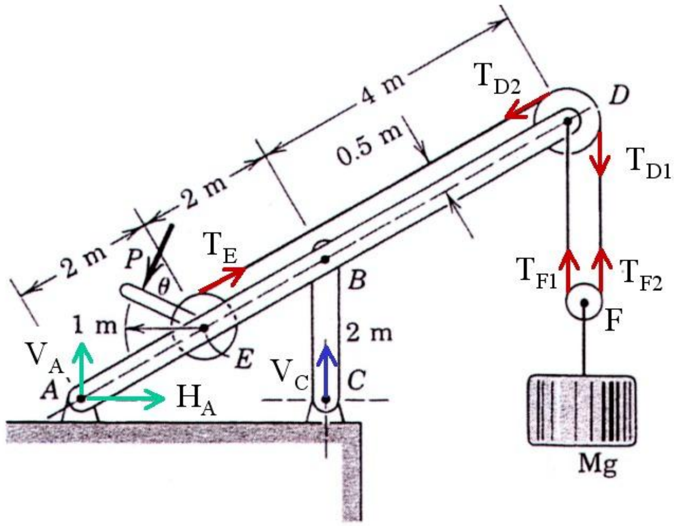


Figura 11: Esame settembre 2004

Si considera adesso tutto il sistema mettendo in evidenza le reazioni in A ed in C. Si osserva che BC è una biella, mentre AD non lo è.

$$R_x = 0 \quad \to \quad H_A = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

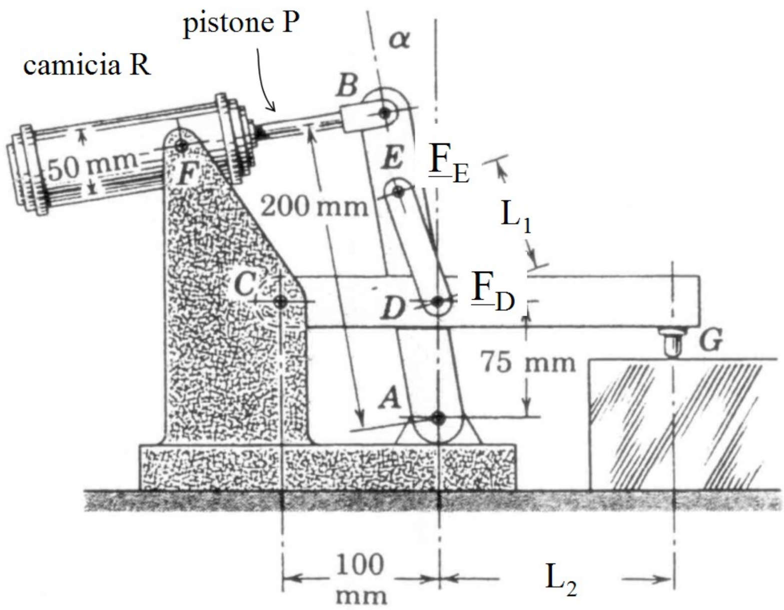
$$M(C) = 0 \quad \to \quad -V_A 2\sqrt{3} + \frac{P}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \frac{P}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - Mg\left(\frac{1}{4} + 2\sqrt{3}\right) = 0$$

da cui si ricavano H_A e V_A. La forza esercitata da A sul terreno è $-H_A \underline{e}_x - V_A \underline{e}_y$.

21 Tema esame febbraio 2005

21.1 Esercizio 1

In F è incernierato un corpo rigido R (camicia del pistone) che contiene un pistone idraulico P. All'interno di R viene esercitata su P una pressione di 400 kN/m^2 parallela ad FE e la superficie di P su cui questa pressione è esercitata è un cerchio di diametro 50 mm centrato sul braccio del pistone. R non esercita altre forze su P.
Il contatto tra il perno in G ed il blocco sottostante è privo di attrito. AB è ortogonale a FB. CG è orizzontale. Se $\alpha = 10°$ è l'angolo tra AB e la verticale, calcolare la forza esercitata da G sul blocco sottostante.



Traccia di soluzione

La pressione esercitata è un sistema di forze parallele che è equipollente alla risultante applicata nel baricentro. La sua retta di applicazione coincide quindi con FE. La pressione è $400\,10^{-6}$kN/mm^2 e dunque il modulo F della forza equipollente é (in kN):

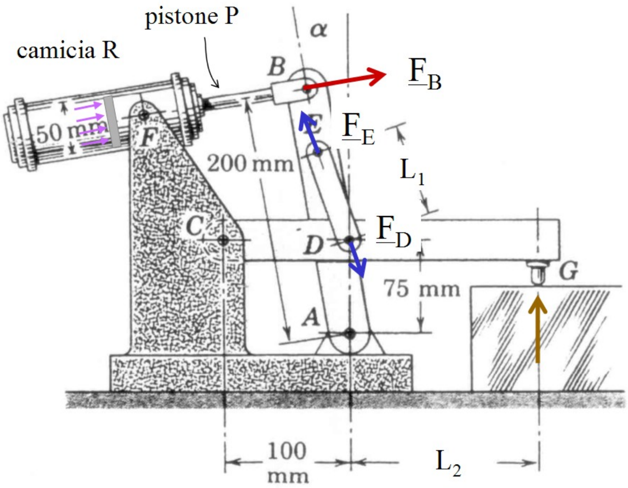
$$F = p\frac{\pi}{4}d^2 = 400\,10^{-6}\,50^2\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

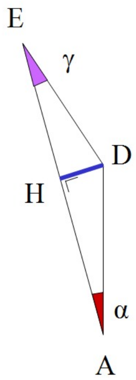
Per la soluzione del problema é necessario calcolare l'angolo β tra DE e la verticale o un angolo equivalente (ad esempio γ) della Figura.

Modo 1. Se si analizza il triangolo ADE si trova che:

$$L_1 \sin\gamma = 75 \sin\alpha$$

da cui si ricava γ. L'angolo β é poi $\alpha + \gamma$. Ad esempio, nel caso $L = 75$ mm si ottiene $\beta = 20°$ (triangolo isoscele).





Modo 2 (macchinoso). Se fissiamo l'origine del sistema di riferimento in A, il punto E giace necessariamente sulla retta (di AB):

$$x + y \tan \alpha$$

Inoltre le coordinate di E possono essere espresse come:

$$x_E = -L_1 \sin \beta, \qquad y_E = 75 + L_1 \cos \beta$$

Inserendo queste coordinate nell'equazione della retta si ottiene:

$$-L_1 \sin \beta = \tan \alpha \, (75 + L_1 \cos \beta)$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \tan \alpha \left(\frac{75}{L_1} + \cos \beta \right)$$
$$\Downarrow$$
$$1 - (\cos \beta)^2 = \tan^2 \alpha \left(\frac{75}{L_1} + \cos \beta \right)^2$$

da cui si ottiene un'equazione di secondo grado in $\cos \beta$ di cui una sola soluzione é geometricamente ammissibile.

Sottosistema AB

Calcolato β il problema é di immediata soluzione.
Agiscono le forze $\underline{F}_E$ ortogonale a AB e di modulo pari ad F, la forza incognita in A e la forza in E $\underline{F}_E$ di direzione parallela a DE. Si scrive l'equazione del momento rispetto a A (conveniva traslare in D la forza $\underline{F}_E$):

$$-200F + 75 F_E \sin \beta = 0 \quad \rightarrow \quad F_E = \frac{200F}{75 \sin \beta}$$

Sottosistema CG

Agiscono le forze $\underline{F}_G$ ortogonale a CG (per l'assenza di attrito), la forza in C e la forza in D $\underline{F}_D = -\underline{F}_E$. Si scrive l'equazione del momento rispetto a C

$$-100F_E \cos\beta + (100 + L_2)F_G = 0 \quad \rightarrow \quad F_G = \frac{100\cos\beta}{100 + L_2}F_E$$

La forza esercitata da G sul blocco sottostante è la forza opposta a quella esercitata dal blocco su G che si é appena calcolata

21.2 Esercizio 2

Per la struttura dell'esercizio precedente, supponendo i) che la velocità di avanzamento del pistone P dentro R abbia modulo pari ad U e ii) che non ci sia alcun blocco sotto G a limitare il movimento di G stesso, trovare:

1. l'atto di moto generico del pistone P, di AB di ED e di CG
2. il CIR del pistone P
3. il CIR di ED

Si osservi che R può ruotare attorno ad F! Si impongano le equazioni di vincolo a cominciare da quelle associate alle cerniere a terra e alla cerniera B.

Traccia di soluzione

L'atto di moto generico del pistone P é dato dalla somma di una rotazione attorno a F e di una traslazione lungo la direzione del versore $\underline{e}_{FB}$. È come se fosse vincolato a terra da un carrello! Atti di moto delle aste dopo aver imposto i vincoli cerniera a terra:

$$\begin{aligned}
P: &\quad \underline{U}^{(1)} = U\underline{e}_{FB} + \omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge \underline{FP} \\
AB: &\quad \underline{U}^{(2)} = \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{AP} \\
CG: &\quad \underline{U}^{(3)} = \omega^{(3)}\underline{e}_z \wedge \underline{CP} \\
ED: &\quad \underline{U}^{(4)} = \underline{U}_E + \omega^{(4)}\underline{e}_z \wedge \underline{EP}
\end{aligned}$$

Come il testo consiglia adesso di imporre adesso il vincolo cerniera B:

$$\underline{U}^{(1)}(B) = \underline{U}^{(2)}(B)$$
$$\Downarrow$$
$$U\underline{e}_{FB} + \omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge \underline{FB} = \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{AB}$$

da cui si ottiene (esplicitando le due componenti in direzione di $\underline{e}_{FB}$ ed in quella ortogonale) che:

$$\omega^{(1)} = 0, \qquad \omega^{(2)} = -\frac{U}{200}$$

Quindi il C.I.R. del pistone è un punto all'infinito in direzione ortogonale a FE. Il pistone infatti trasla.

Si impone adesso il vincolo cerniera in E:

$$\underline{U}^{(4)}(E) = \underline{U}^{(2)}(E)$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{U}_E = \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{AE} = -\omega^{(2)}(75 + L_1 \cos\beta)\underline{e}_x - \omega^{(2)} L_1 \sin\beta \underline{e}_y$$

Ultimo vincolo (cerniera in D):

$$\underline{U}^{(3)}(D) = \underline{U}^{(4)}(D)$$
$$\Downarrow$$
$$\omega^{(3)}\underline{e}_z \wedge \underline{CD} = \underline{U}_E + \omega^{(4)}\underline{e}_z \wedge \underline{ED}$$
$$\Downarrow$$
$$100\omega^{(3)}\underline{e}_y = \underline{U}_E + \omega^{(4)} L_1 \cos\beta \underline{e}_x + \omega^{(4)} L_1 \sin\beta \underline{e}_y$$

Dalla prima componente si ottiene:

$$\omega^{(4)} L_1 \cos\beta = \omega^{(2)}(75 + L_1 \cos\beta)$$

per cui $\omega^{(4)}$ é nota in funzione di U. Dalla seconda componente:

$$100\omega^{(3)} = -\omega^{(2)} L_1 \sin\beta + \omega^{(4)} L_1 \sin\beta$$

da cui anche $\omega^{(3)}$ é nota in funzione di U. Quindi il sistema ammette un'infinità semplice di atti di moto determinati dal valore di U.
Per il calcolo del CIR di ED conviene porre l'origine del sistema di riferimento in E. Il CIR é il punto H tale che:

$$\underline{U}^{(4)}(C) = \underline{U}_E + \omega^{(4)}\underline{e}_z \wedge \underline{CH} = \underline{0}$$

con $\underline{CH} = x_F\underline{e}_x + y_F\underline{e}_y$. Dalle due componenti si trovano i valori della incognite x, y:

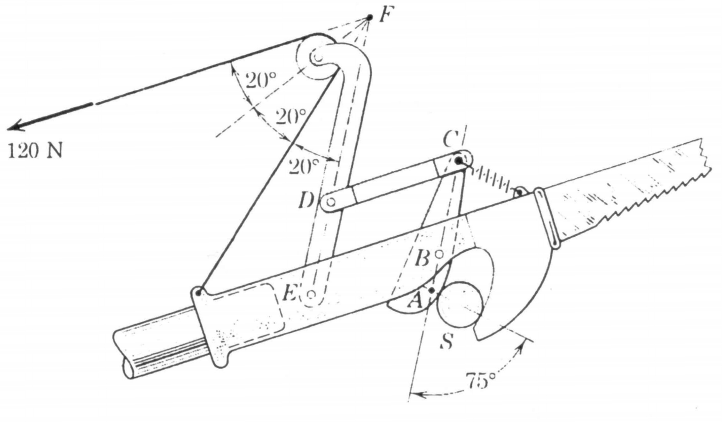
$$x_H = -\frac{U_{E2}}{\omega^{(4)}} = \frac{L_1^2 \sin\beta\cos\beta}{75 + L_1\cos\beta}$$
$$y_H = \frac{U_{E1}}{\omega^{(4)}} = -L_1\cos\beta$$

A conti fatti il CIR è sull'intersezione di CG ed AB.

22 Tema esame febbraio 2005

22.1 Esercizio 1

L'utensile da taglio di Figura viene utilizzato per tagliare il ramo circolare S.



$\overline{AB} = 25$ mm, $\overline{BC} = \overline{ED} = 75$ mm, $\overline{EB} = \overline{DC} = 112.5$ mm, $\overline{DF} = 150$ mm

L'utensile è costituito da vari corpi rigidi. Il corpo P è incastrato a terra. L'utensile è attuato mediante il file in alto a sinistra al quale viene applicata la forza indicata. Si trascura il peso di S. La forza esercitata dalla molla di richiamo attaccata in C è piccola e può essere trascurata. Il filo è parallelo a EB.
Per risolvere il problema assumere un sistema di riferimento con l'asse x parallelo a EB.
Calcolare:

1a. Il vettore forza che S trasmette a BC

1b. Il vettore forza che ED trasmette a E

Cosa cambia se il peso di S non può essere trascurato (massa M)?

1c. Ricalcolare in tal caso il vettore forza che S trasmette a BC (EB è inclinato di $20°$ rispetto all'orizzontale)

ATTENZIONE: A non è il punto di contatto ma l'intersezione della retta per BC con la retta che unisce i due punti di contatto di S con la struttura (che sono allineati con il centro di S)

Traccia di soluzione

Sia $\alpha = 20°$, $\beta = 75°$, L_{ED} la lunghezza di $\underline{EC}$, L_{DF} la lunghezza di $\underline{DF}$, L_{AB} la lunghezza di $\underline{BA}$, d la distanza tra A ed il punto di contatto di S con BC e R il raggio del ramo S.
Si lavora nel sistema allineato a P come imposto dal problema.

Sottosistema ramo. Si analizzi la Figura 13. Sul ramo agiscono a priori due forze qualunque nei punti di contatto, scomposte in componente tangente e normale al contatto. Scrivendo l'equazione del momento rispetto al centro di S la componenti tangenziali delle forze nei punti di contatto sono necessariamente uguali. Imponendo l'annullarsi del risultante in questa direzione si ottiene che le due forze sono nulle in assenza di peso: $F_{A2} = 0$. Altrimenti, poiché la congiungente il centro di S con i punti di contatto è inclinata di $\gamma = 25°$ rispetto all'orizzontale:

$$F_{A2} = \frac{1}{2} M g \cos(\gamma)$$

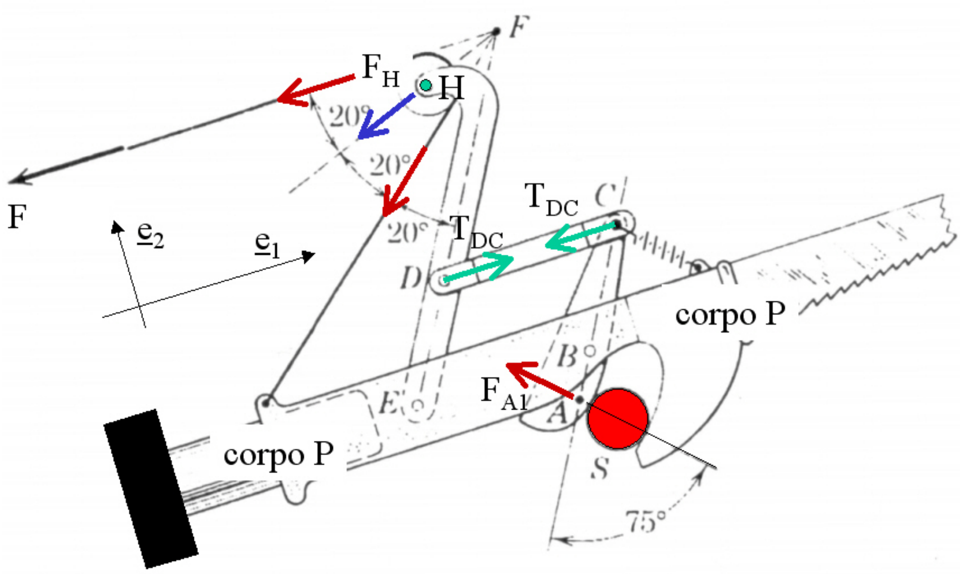


Figura 12: Sistema globale in assenza di peso

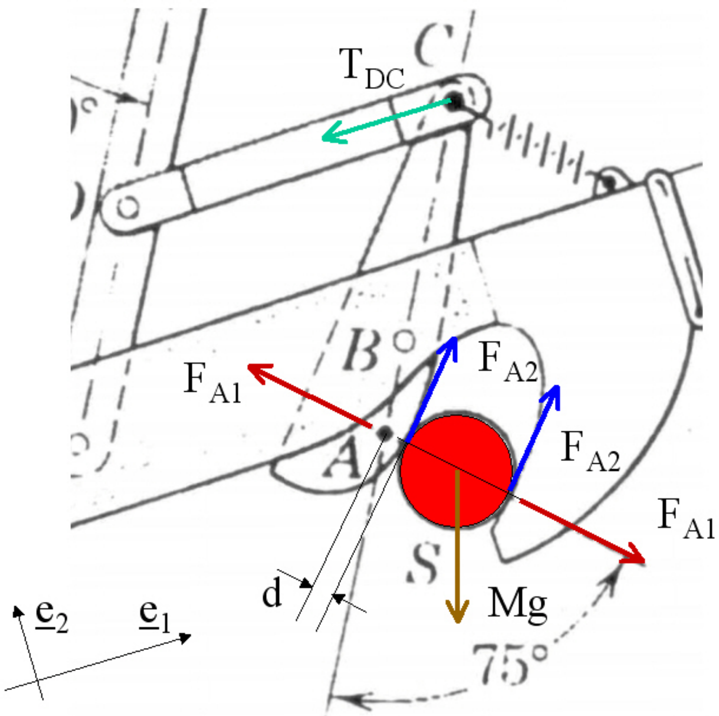


Figura 13: Sistema ramo con peso

In entrambe le situazioni F_{A2} è noto. Si ottiene poi che le due componenti normali sono sempre uguali.

Sottosistema puleggia. Sulla puleggia agiscono i due (!) tiri del filo e la forza del perno. Imponendo la nullità del risultante si ottiene che la forza che la puleggia esercitata sul perno ha la direzione e verso indicata in Figura e modulo:

$$F_H = 2F\cos\alpha$$

L'espressione della forza è dunque:

$$\underline{F}_H = -F_H\cos\alpha\underline{e}_x - F_H\sin\alpha\underline{e}_y$$

Sottosistema corpo ED. Equazione del momento rispetto a E:

$$T_{DC}L_{ED}\sin(3\alpha) = F_H L_{FE}\sin(2\alpha)$$
$$\Downarrow$$
$$T_{DC} = \frac{L_{ED}+L_{DF}}{L_{ED}\sin(3\alpha)}F_H\sin(2\alpha)$$

T_{DC} è quindi nota. Si noti si è traslata $\underline{F}_H$ in F e si considerata la componente di F_H ortogonale a $\underline{EF}$, cioè $F_H\sin(2\alpha)$. Altrimenti, scomponendo $\underline{F}_H(F)$ in direzione degli assi e calcolando il momento:

$$L_{EF}F_H\left(\cos\alpha\sin(2\alpha) - \sin\alpha\cos(2\alpha)\right) = F_H\sin(2\alpha)$$

risultato identico a prima.
L'equazione del risultante permette di calcolare $\underline{F}_E$:

$$\underline{F}_E = (-T_{DC} + F_H\cos\alpha)\underline{e}_x + F_H\sin\alpha\underline{e}_y$$

Sottosistema corpo BC. Caso di assenza peso. Equazione del momento rispetto a B:

$$F_{A1}L_{AB}\sin\beta = T_{DC}\sin(3\alpha)L_{ED}$$
$$\Downarrow$$
$$F_{A1} = \frac{T_{DC}\sin(3\alpha)L_{ED}}{L_{AB}\sin\beta}$$

Il problema è dunque risolto.
In presenza di peso nell'equazione del momento si deve considerare anche la forza nota F_{A2}:

$$F_{A1} = \frac{1}{L_{AB}\sin\beta}\left(F_{A2}(d + L_{AB}\sin\beta) + T_{DC}\sin(3\alpha)L_{ED}\right)$$

22.2 Esercizio 2

Si consideri la struttura dell'esercizio precedente in assenza del corpo S e della molla in C. Come sopra il corpo P è incastrato. Studiare la cinematica del sistema indicando con ω_x la velocità di rotazione di ED. Determinare gli atti di moto di ED, DC, BC.

Traccia di soluzione

Se si considerano le cerniere a terra (cioé le cerniere sul corpo P incastrato a terra e quindi fisso) gli atti di moto dei corpi rigidi risultano essere come segue.
Atto di moto del corpo ED:

$$\underline{U}^{(1)}(P) = \omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge \underline{EP}$$

Atto di moto corpo DC:

$$\underline{U}^{(2)}(P) = \underline{U}_D + \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{DP}$$

Atto di moto corpo BC:

$$\underline{U}^{(3)}(P) = \omega^{(3)}\underline{e}_z \wedge \underline{BP}$$

Vincolo cerniera in D. Si ottiene:

$$\underline{U}_D = \omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge \underline{ED}$$

Vincolo cerniera in C. Si ottiene:

$$\omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge \underline{ED} + \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{DP} = \omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge \underline{BC}$$

con $\underline{BC} = \underline{ED}$. Se si moltiplica scalarmente a destra e sinistra per $\underline{ED}$ si ottiene: $\omega^{(2)} = 0$. Il corpo DC trasla dunque in direzione ortogonale a ED. Inserendo $\omega^{(2)} = 0$ nell'equazione precedente si ottiene anche $\omega^{(3)} = \omega^{(1)}$.
Gli atti di moto sono completamente determinati.

23 Tema esame maggio 2006

23.1 Esercizio 1

Si consideri il sistema di Figura. Le cerniere in D sono a terra. La struttura è geometricamente simmetrica rispetto all'asse DA. A è una cerniera interna. S è un perno attaccato al corpo 2 su cui il corpo 3 si appoggia ed impedisce i movimenti relativi tra il corpo 2 ed il corpo 3 in direzione y (ed è quindi in grado di esercitare solo una forza che ha direzione e verso come l'asse y positivo). Il perno S si rompe se la forza che trasmette arriva a 800 N. Calcolare il valore della forza T in corrispondenza del quale il perno si rompe. Le dimensioni sono in millimetri. Il raggio delle ruote in E ed F è 5 mm. Ogni affermazione sulla simmetria delle forze deve essere dimostrata.

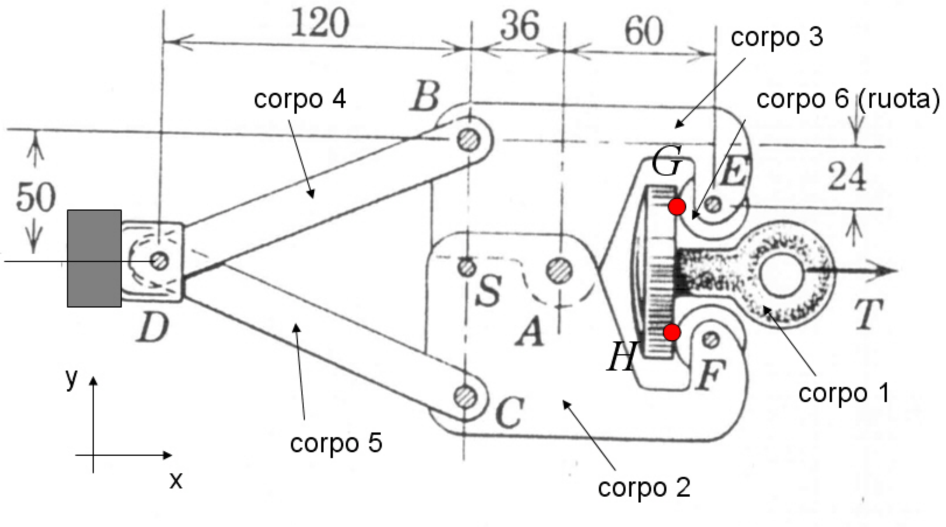


Figura 14: Struttura

Traccia di soluzione

Sottosistema ruote. Si analizzano dapprima le ruote. Poiché nelle loro cerniere non vi è attrito, nei punti di contatto G ed H con il corpo 1 possono essere soggette solo a forze orizzontali $F_G \underline{e}_x$ e $F_H \underline{e}_x$ (ciò si deduce scrivendo il momento rispetto al centro della ruota per il sistema ruota).

Sottosistema corpo 1. È soggetto a $T\underline{e}_x$, $-F_G\underline{e}_x$ e $-F_H\underline{e}_x$. Scrivendo il momento rispetto all'asse di simmetria si ottiene che $F_G = F_H$; per l'equilibrio orizzontale:

$$F_G = F_H = \frac{T}{2}$$

Sottosistema struttura completa tranne 4 e 5. Se si eliminano le due bielle si devono mettere in evidenza le loro azioni assiali. Imponendo $R_x = 0$ e $M_{AD} = 0$ si ottiene che sul sottosistema considerato, in B agisce la forza:

$$\underline{F}_B = -\frac{1}{2}T\underline{e}_x - \frac{5}{24}T\underline{e}_y$$

Sottosistema corpo 3. Scrivendo il momento rispetto ad A si ottiene:

$$M(A) = \frac{T}{2}50 + 36\frac{5}{24}T - \frac{T}{2}26 - 800 \times 36 = 0$$

da cui (in Newton):

$$T = 1476.92$$

23.2 Esercizio 2

Si consideri il sistema dell'esercizio precedente senza il vincolo in S. Si immagini che il corpo 1 trasli verso destra con velocità U. Determinare l'atto di moto del corpo 3 ed il suo CIR. Per lo svolgimento dell'esercizio di cinematica è lecito (e consigliato) assumere a priori che la risposta della struttura sia simmetrica rispetto all'asse DA. Le ruote in E ed F rotolano senza strisciare sul corpo 1.

Traccia di soluzione

Atti di moto. Detto 6 il corpo *ruota* incernierato in E e considerando le cerniere a terra ed in B:

$$\begin{aligned}
&\underline{U}^{(4)}(P) = \omega^{(4)}\underline{e}_z \wedge \underline{DP} \\
&\underline{U}^{(3)}(P) = \omega^{(4)}\underline{e}_z \wedge \underline{DB} + \omega^{(3)}\underline{e}_z \wedge \underline{BP} = 120\omega^{(4)}\underline{e}_y - 50\omega^{(4)}\underline{e}_x + \omega^{(3)}\underline{e}_z \wedge \underline{BP} \\
&\underline{U}^{(6)}(P) = U\underline{e}_x + \omega^{(6)}\underline{e}_z \wedge \underline{GP}
\end{aligned}$$

dove si è già anche imposto che la ruota 6 abbia la stessa velocità di 1 nel punto di contatto.
A causa della simmetria il punto A non può che muoversi in orizzontale e quindi, se si vuole considerare solo la parte superiore si deve imporre il vincolo addizionale $\underline{U}^{(3)}(A) \cdot \underline{e}_y = 0$, da cui:

$$\omega^{(3)} = -\frac{10}{3}\omega^{(4)}$$

A questo punto su può già cercare il CIR C di 3 tale che

$$\underline{U}^{(3)}(C) = 120\omega^{(4)}\underline{e}_y - 50\omega^{(4)}\underline{e}_x + \omega^{(3)}\underline{e}_z \wedge \underline{BC} = 0$$

si trova che $\underline{BC} = 36\underline{e}_x + 15\underline{e}_y$
Rimane da imporre l'ultimo vincolo: la cerneira in E.

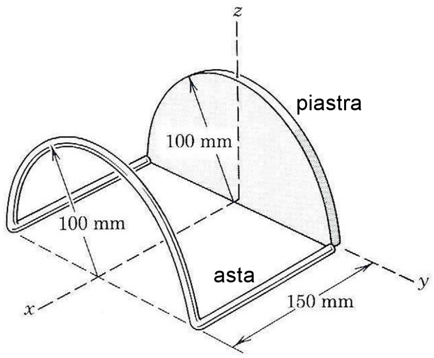
$$\underline{U}^{(6)}(E) = \underline{U}^{(3)}(E) \quad \rightarrow \quad U\underline{e}_x + 5\omega^{(6)}\underline{e}_y = 60\omega^{(3)}\underline{e}_y + 39\omega^{(3)}\underline{e}_x$$

da cui si ricavano immediatamente tutte le ω in funzione di U.

24 Tema esame settembre 2006

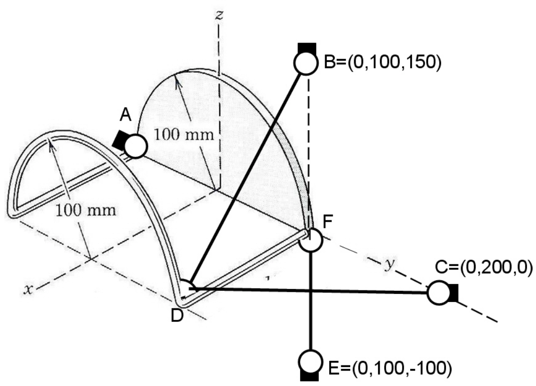
24.1 Esercizio 1

Calcolare la posizione del baricentro per la struttura di Figura. La densità per unità di area della piastra è $\rho_a = 30\,\mathrm{Kg/m^2}$; La densità per unità di lunghezza delle travi è $\rho_l = 0.5\,\mathrm{Kg/m}$. La posizione del baricentro delle componenti piastra ed asta (parte curva) deve essere valutata a partire dalla definizione di baricentro (tramite integrali)



24.2 Esercizio 2

La struttura dell'esercizio precedente (soggetta al peso) viene vincolata a terra tramite la cerniera sferica in A e tramite le bielle a cerniere sferiche BD, DC ed EF. In particolare si sottolinea che le bielle BD e CD sono vincolate all'asta tramite la cerniera sferica D. La cerniera F non e' a terra direttamente. Calcolare le azioni nelle bielle e la reazione in A. Si RICHIEDE di risolvere il problema mediante la scrittura e soluzione in successione di equazioni con una sola incognita.



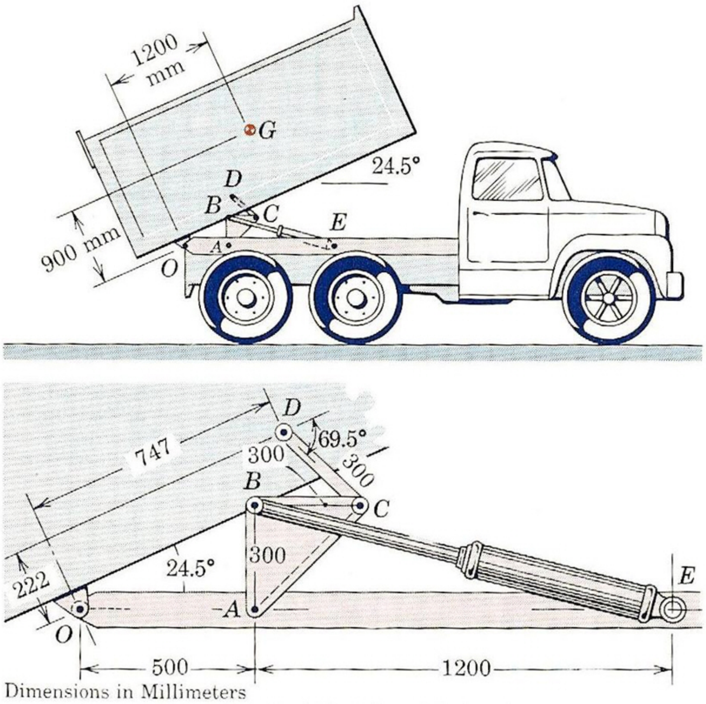
24.3 Esercizio 3

Nella struttura del problema precedente si descrivano gli atti di moto possibili del corpo rigido "piastra più asta" se viene eliminata la biella DB.

25 Tema esame gennaio 2007 (parte)

25.1 Esercizio 2

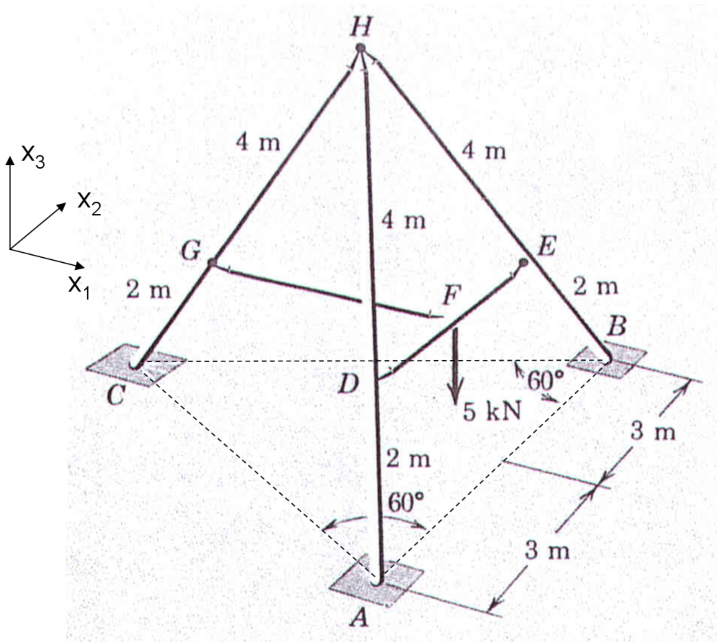
Se la massa del carico è pari a Q con baricentro in G, calcolare la forza in A ed il valore della compressione nel pistone. Attenzione: B non è attaccato al cassone del camion!



26 Tema esame luglio 2007

26.1 Esercizio 1

Si consideri la struttura di Figura. Le tre aste CH, AH e BH appoggiano semplicemente sul piano liscio (senza attrito) che contiene i punti A,B e C. In G, E, F, D, H le aste sono collegate tra loro tramite cerniere perfette. La struttura è simmetrica rispetto al piano che passa per l'asta CH e per l'asta GF. E' lecito (e consigliato) assumere la simmetria delle forze e delle reazioni rispetto a tale piano. a) Calcolare le reazioni esercitate dal terreno sulle aste nei punti A,B,C. b) Calcolare la forza trasmessa da ADH a EFD in D



Traccia di soluzione

Si immagini il sistema di riferimento centrato in H.
Il fatto che il piano sia liscio implica che le forze del terreno sulle aste hanno solo le componente verticali, indicate con R_A, R_B, R_C. La simmetria delle forze implica, in particolare, $R_A = R_B$
Si consideri la struttura completa.
Il momento rispetto all'asse AB delle forze esterne permette di calcolare R_C:

$$R_C 3\sqrt{3} = 5\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad R_C = \frac{5}{9}$$

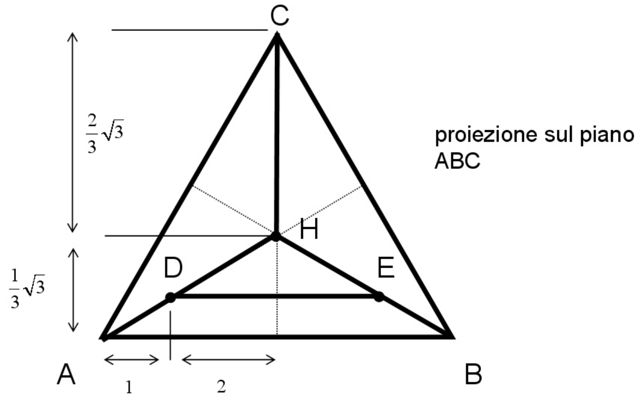
La risultante, componente R_z:

$$R_C + 2R_A = 5 \qquad R_A = \frac{20}{9}$$

Si consideri il sistema DFE e si imponga la condizione necessaria di equilibrio $R_z = 0$:

$$D_z + E_z = 5$$

dove E_z, D_z sono le forze verticali (uguali per simmetria) trasmesse a DFE. Si noti che la biella GF non trasmette forze in direzione verticale. Quindi $D_z = E_z = 5/2$.



Si consideri il sistema asta ADH. Se $\underline{D}$ è la forza incognita, DFE trasmette $-\underline{D}$ a ADH, e $-\underline{D} = -D_x\underline{e}_x - D_y\underline{e}_y - 5/2\underline{e}_z$. Secondo semplici calcoli l'elevazione di H sul piano ABC è $2\sqrt{6}$. Quindi: $\underline{HA} = \sqrt{3}\underline{e}_x - 3\underline{e}_y - 2\sqrt{6}\underline{e}_z$, $\underline{HD} = 2/3\underline{HA}$. Si imponga la condizione necessaria di equilibrio $\underline{M}(H) = \underline{0}$, sapendo che:

$$\underline{M}(H, R_A\underline{e}_z) = -3R_A\underline{e}_x - \sqrt{3}R_A\underline{e}_y$$

$$\underline{M}(H, -\underline{D}) = \frac{2}{3}\left[(3\frac{5}{2} - 2\sqrt{6}D_y)\underline{e}_x + (\frac{5}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{6}D_x)\underline{e}_y - (\sqrt{3}D_y + 3D_x)\underline{e}_z\right]$$

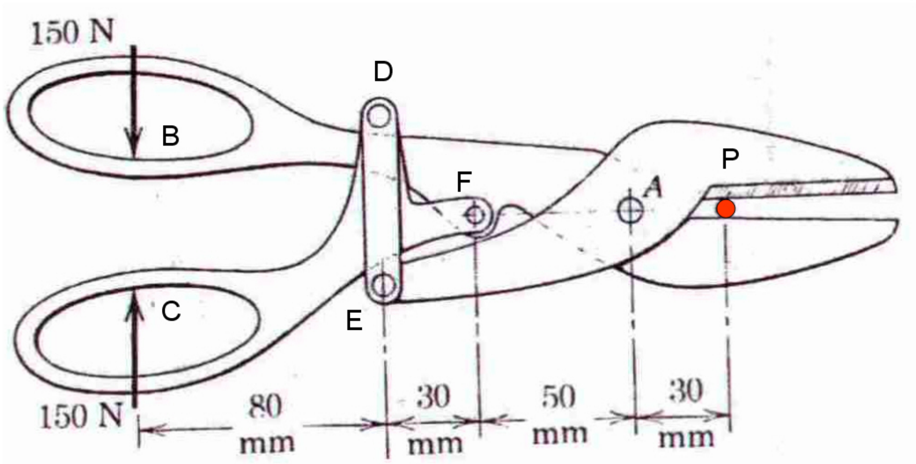
Poiché $\underline{M}_H$ è la somma dei due momenti si ottiene un sistema di tre equazioni in due incognite (!) che ammette la soluzione $D_y = -\sqrt{3}D_x$ e $D_x = ...$

Il motivo per cui il sistema tre equazioni in due incognite è risolvibile è che tutte la forze passano per HDA e quindi la componente del momento rispetto a quest'asse è automaticamente nulla.

27 Appello Settembre 2007

27.1 Esercizio 1

Calcolare le forze trasmesse dal corpo CDF (parte inferiore della pinza) alle cerniere D ed F e le forze trasmesse dalla pinza al perno P senza trascurare l'attrito (le lame della pinza sono orizzontali). E' obbligatorio procedere risolvendo equazioni in una sola incognita



Traccia di soluzione

Il corpo DE è una biella. Il corpo CDF esercita su DE una forza pari a $550\underline{e}_y$ (equazione momento rispetto ad F per corpo CDF). La pinza superiore esercita sul perno una forza pari a $-550 \times 8/3 \times \underline{e}_y$ (equazione momento per pinza superiore rispetto ad A).

27.2 Esercizio 2

Supponendo che la cerniera A sia bloccata a terra (cerniera a terra) calcolare gli atti di moto possibili per i corpi BFA, CDF ed EA

Traccia di soluzione

Si indichino i corpi BFA, CDF ed EA con gli indici $1, 2, 3$, rispettivamente. Poiché il corpo (1) è incernierato a terra:

$$\underline{U}^{(1)}(F) = -50\omega^{(1)}\underline{e}_y$$

ed inoltre:

$$\underline{U}^{(2)}(P) = -50\omega^{(1)}\underline{e}_y + \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{AP}$$
$$\underline{U}^{(3)}(P) = \omega^{(3)}\underline{e}_z \wedge \underline{AP}$$

Imponendo il vincolo biella:

$$\underline{e}_y \cdot \left[\underline{U}^{(2)}(D) - \underline{U}^{(3)}(E) \right] = 0$$

da cui:

$$-50\omega^{(1)} - 30\omega^{(2)} + 80\omega^{(3)} = 0$$

Non vi sono altri vincoli da rispettare e quindi tutti gli atti di moto che rispettano le equazioni scritte sono ammissibili.

28 Sistema di sollevamento

28.1 Parte di Statica

LIBRO ESERCIZIO 4.5.2

28.2 Parte di Cinematica

Per la struttura dell'esercizio precedente, si supponga adesso che il pistone si accorci con velocità pari a U in modulo. Questa velocità rappresenta una traslazione relativa tra i corpi (3) e (4) del pistone. Trovare le velocità di rotazione di tutti i corpi in funzione del parametro U. Si osservi che le coordinate di E non sono note e non sono necessarie per lo svolgimento del problema. Si trovi il CIR del corpo (2).

Traccia di soluzione Si scrivono dapprima gli atti di moto dei corpi imponendo immediatamente la presenza della cerniera A:

$$\begin{aligned}
\underline{U}^{(1)}(P) &= \omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge \underline{AP} \\
\underline{U}^{(2)}(P) &= \underline{U}_C^{(2)} + \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{CP} \\
\underline{U}^{(4)}(P) &= \omega^{(4)}\underline{e}_z \wedge \underline{AP} \\
\underline{U}^{(3)}(P) &= \underline{U}_E^{(2)} + \omega^{(3)}\underline{e}_z \wedge \underline{EP}
\end{aligned}$$

Si impone il vincolo cerniera C:

$$\underline{U}^{(2)}(C) = \underline{U}^{(1)}(C)$$
$$\downarrow$$
$$\underline{U}_C^{(2)} = \omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge \underline{AP} = -\omega^{(1)}\sqrt{3}H\underline{e}_y$$

La ruota è in tutto assimilabile ad un carrello applicato nel punto F, centro della ruota stessa:

$$\underline{U}^{(2)}(F) \cdot \underline{e}_y = 0$$
$$\downarrow$$
$$(-\omega^{(1)}\sqrt{3}H\underline{e}_y + \omega^{(2)}H\underline{e}_y + \omega^{(2)}H\underline{e}_x) \cdot \underline{e}_y = 0$$

da cui $\omega^{(2)} = \sqrt{3}\omega^{(1)}$.
Il vincolo tra i corpi (3) e (4) è un manicotto che permette lo scorrimento, impedisce le rotazioni. In particolare il problema assegna la velocità di scorrimento che è pari a U ed è diretta in modo da accorciare il pistone. Detto $\underline{\tau}$ un versore tangente al pistone, diretto da D ad A, oltre ad $\omega^{(3)} = \omega^{(4)}$, si ha:

$$\underline{U}^{(3)}(E) = \underline{U}^{(4)}(E) + U\underline{\tau} \quad \text{con} \quad \underline{\tau} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\underline{e}_x + \frac{1}{2}\underline{e}_y$$

da cui:

$$\underline{U}_E^{(3)} = \omega^{(4)}\underline{e}_z \wedge \underline{AE} + U\underline{\tau}$$

e quindi:

$$\underline{U}^{(3)}(P) = U\underline{\tau} + \omega^{(4)}\underline{e}_z \wedge \underline{AP}$$

Le coordinate di E non sono necessarie per esprimere l'atto di moto del corpo!

Si impone il vincolo cerniera D.

$$\underline{U}^{(2)}(D) = \underline{U}^{(3)}(D)$$

con

$$\begin{aligned}
\underline{U}^{(2)}(D) &= -\sqrt{3}H\omega^{(1)}\underline{e}_y + \sqrt{3}H\omega^{(1)}\underline{e}_x \\
\underline{U}^{(3)}(D) &= U\underline{\tau} - \omega^{(4)}H\sqrt{3}\underline{e}_y + \omega^{(4)}H\underline{e}_x
\end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza delle componenti:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}H\omega^{(1)} &= \frac{U}{2}\sqrt{3} + H\omega^{(4)} \\
-\sqrt{3}H\omega^{(1)} &= \frac{U}{2} - \sqrt{3}H\omega^{(4)}
\end{aligned}$$

da cui si ottengono $\omega^{(1)}$ ed $\omega^{(4)}$ in funzione di U.
Si calcola ora la posizione del CIR del corpo rigido indicando con $H(x\underline{e}_x + y\underline{e}_y)$ la sua posizione relativa rispetto a C.
Dai calcoli appena svolti si sa che l'atto di moto del corpo (2) è:

$$\begin{aligned}
\underline{U}^{(2)}(P) &= -\sqrt{3}H\omega^{(1)}\underline{e}_y + \sqrt{3}H\omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge (x\underline{e}_x + y\underline{e}_y) \\
&= -\sqrt{3}H\omega^{(1)}\underline{e}_y + \sqrt{3}H\omega^{(1)}(x\underline{e}_y - y\underline{e}_x)
\end{aligned}$$

Imponendo che la velocità di P si annulli si ottiene:

$$x = 1, \qquad y = 0$$

cioè il CIR giace sul corpo (1) sulla verticale per F. Mostrare che si arriva alla stessa conclusione con la cinematica grafica.

29 Punzonatrice

29.1 Parte di Statica

LIBRO ESERCIZIO 4.5.3

29.2 Parte di Cinematica

Per la struttura dell'esercizio precedente si supponga che la velocità orizzontale del punto M sia $-U\underline{e}_x$ (cioè verso sinistra). Determinare la velocità di avvicinamento (o allontanamento) tra F e G in direzione verticale in funzione di U.

Traccia di soluzione. Siano MDL il corpo (1) e DEF il corpo (2). Considerando il manicotto in A e la cerniera D i due atti di moto hanno necessariamente la forma:

$$\begin{aligned}\underline{U}^{(1)}(P) &= -U\underline{e}_x \\ \underline{U}^{(2)}(P) &= -U\underline{e}_x + \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{DP}\end{aligned}$$

Il corpo BE è cinematicamente una biella che impone ad E di avere velocità nulla in direzione della biella stessa:

$$\underline{U}^{(2)}(E) \cdot (3\underline{e}_x + \underline{e}_y) = 0$$
$$\downarrow$$
$$\left(-U\underline{e}_x + \omega^{(2)}a\underline{e}_z \wedge (\underline{e}_x + \underline{e}_y)\right) \cdot (3\underline{e}_x + \underline{e}_y) = 0$$

da cui:

$$\omega^{(2)} = -\frac{3}{2}\frac{U}{a}$$

e la velocità verticale di F è $-15U$. Ripetendo i calcoli per il corpo inferiore si ottiene che la velocità verticale di G vale $15U$ e quindi la velocità di avvicinamento totale è $30U$.
Come ulteriore esercizio si mostri, sia con la cinematica analitica, sia con quella grafica, che il CIR del corpo (2) giace su BE sulla verticale per D.

30 Carrello di atterraggio

30.1 Parte di Statica

LIBRO ESERCIZIO 4.5.4

30.2 Parte di Cinematica

Si consideri la struttura dell'esercizio precedente. All'improvviso il corpo rigido a cui D è incastrato comincia a ruotare attorno a D con velocità angolare pari a $-b\underline{e}_z$. La ruota non può strisciare e non può staccarsi da terra. Determinare gli atti di moto possibili. Con che velocità si avvicinano/allontanano A e D?

Traccia di soluzione. Siano DM il corpo (1), BE il corpo (2), la ruota il corpo (3), AM il corpo (4). BC è una biella e quindi viene considerato come vincolo.
L'atto di moto di (1) è completamente noto:

$$\underline{U}^{(1)}(P) = -b\underline{e}_z \wedge \underline{DP}$$

Se si prende come polo per (4) proprio il punto M (coordinate incognite!) e si impone il vincolo manicotto si ottiene:

$$\omega^{(4)} = \omega^{(1)} = -b\underline{e}_z \qquad \underline{U}^{(4)}(M) = \underline{U}^{(1)}(M) + W\underline{e}_y$$

dove $W\underline{e}_y$ rappresenta proprio lo scorrimento verso l'alto di (4) rispetto a (1). Quindi:

$$\underline{U}^{(4)}(P) = -b\underline{e}_z \wedge \underline{DP} + W\underline{e}_y$$

La ruota con centro in E "ruota" intorno ad F (non intorno a E!):

$$\underline{U}^{(3)}(P) = \omega^{(3)}\underline{e}_z \wedge \underline{FP}$$

Per il corpo (2) si sceglie polo E, e considerando la cerniera:

$$\underline{U}^{(2)}(P) = -\omega^{(3)}\frac{H}{2}\underline{e}_x + \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{EP}$$

I parametri liberi sono dunque $W, \omega^{(3)}, \omega^{(2)}$, mentre i vincoli rimanenti sono la biella e la cerniera in A. Sembra dunque possibile esprimere tutti i parametri in funzione del dato assegnato b.
La cerniera A impone:

$$-\omega^{(3)}\frac{H}{2}\underline{e}_x + \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge (-H\underline{e}_x + \frac{H}{2}\underline{e}_y) = -b\underline{e}_z \wedge (-2H\underline{e}_y) + W\underline{e}_y$$

da cui:

$$-\omega^{(3)}\frac{H}{2}\underline{e}_x - \omega^{(2)}H\underline{e}_y - \omega^{(2)}\frac{H}{2}\underline{e}_y = -2Hb\underline{e}_x + W\underline{e}_y$$

e quindi

$$\omega^{(2)}H = -W \qquad \omega^{(3)}H = W + 4Hb$$

La biella impone il vincolo:

$$(\underline{U}^{(2)}(B) - \underline{U}^{(1)}(C)) \cdot (\underline{e}_x + \underline{e}_y) = 0$$

da cui:

$$\left(b\frac{H}{2}\underline{e}_x - \omega^{(3)}\frac{H}{2}\underline{e}_x - \omega^{(2)}(2H\underline{e}_y + H\underline{e}_x)\right)\cdot(\underline{e}_x + \underline{e}_y) = 0$$

e:

$$W = \frac{3}{5}Hb$$

Il pistone dunque si accorcia, in accordo con l'intuizione fisica dell'atto di moto.

31 Sistema di travi in 3D

31.1 Parte di Statica

LIBRO ESERCIZIO 4.5.5

31.2 Parte di Cinematica

Si consideri la struttura dell'esercizio precedente. Si elimini la biella GC e si studino gli atti di moto possibili con la tecniche della cinematica analitica. Si aggiunga poi la biella GC e si discuta se il sistema è adesso ben vincolato.

Traccia di soluzione Si indichi con l'apice (1) il corpo $ANBG$ e con l'apice (2) il corpo $BMCD$
Considerando il vincolo cerniera in A gli atti di moto dei due corpi diventano:

$$\underline{U}^{(1)}(P) = U\underline{e}_y + \omega^{(1)}\underline{e}_y \wedge \underline{AP}$$
$$\underline{U}^{(2)}(P) = \underline{U}_B + \underline{\omega}^{(2)} \wedge \underline{BP}$$

La biella BP impone:

$$\underline{U}^1(B) \cdot \underline{BP} = 0$$

da cui:

$$(2\underline{e}_x + 3\underline{e}_z) \cdot (U\underline{e}_y + \omega^{(1)}\underline{e}_y \wedge 3\underline{e}_z) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega^{(1)} = 0$$

La cerniera in B impone:

$$\underline{U}_B = U\underline{e}_y$$

Nel seguito si indica $\underline{\omega}^2$ con $\underline{\omega}$.
La biella CF impone:

$$\underline{U}^2(C) \cdot \underline{CF} = 0$$

da cui:

$$\left[(\omega_x\underline{e}_x + \omega_y\underline{e}_y + \omega_z\underline{e}_z) \wedge (\underline{e}_x + \underline{e}_z)\right] \cdot (\underline{e}_x - 4\underline{e}_z) = 0$$
$$\downarrow$$
$$\omega_y = 0$$

La biella DG impone:

$$(\underline{U}^2(D) - \underline{U}^1(G)) \cdot \underline{DG} = 0$$

da cui:

$$[(\omega_x\underline{e}_x + \omega_z\underline{e}_z) \wedge (-\underline{e}_x + \underline{e}_z)] \cdot (\underline{e}_x - \underline{e}_y - 2\underline{e}_z) = 0$$
$$\downarrow$$
$$\omega_x = -\omega_z$$

La biella DE impone:

$$\underline{U}^2(D) \cdot \underline{ED} = 0$$

da cui:

$$\left[U\underline{e}_y + h\omega_x(\underline{e}_x - \underline{e}_z) \wedge (-\underline{e}_x + \underline{e}_z)\right] \cdot (\underline{e}_x + \underline{e}_y + 4\underline{e}_z) = 0$$
$$\downarrow$$
$$U = 0$$

Il parametro ω_x è quindi libero.
È poi possibile verificare che aggiungendo la biella CG anche $\omega_x = 0$. Infatti la biella impone:

$$(\underline{U}^2(C) - \underline{U}^1(G)) \cdot \underline{CG} = 0$$

da cui:

$$h\left[\omega_x(\underline{e}_x - \underline{e}_z) \wedge (\underline{e}_x + \underline{e}_z)\right] \cdot (\underline{e}_x + \underline{e}_y + 2\underline{e}_z) = 0$$
$$\downarrow$$
$$-2h\omega_x = 0$$

32 Sistema di sollevamento

32.1 Parte di Statica

LIBRO ESERCIZIO 4.5.7

32.2 Parte di Cinematica

Si consideri la struttura dell'esercizio precedente con le seguenti modifiche:

1. Si toglie il corpo e si bloccano a terra le cerniere A e B.
2. Il pistone diventa un semplice manicotto.
3. Il vincolo in E subisce infine un cedimento verso l'alto con velocità pari a $U\underline{e}_y$, con U parametro noto (la velocità di E è quindi nota e vale appunto $U\underline{e}_y$).

Determinare tutti i possibili atti di moto della struttura.

Traccia di soluzione. Il problema si semplifica notevolmente se si riconosce che le aste FE ed EC sono bielle e le si trattano come vincoli.
Sia AF l'asta (1) e CB l'asta (2). Peri vincoli cerniera a terra i loro atti di moto sono:

$$\underline{U}^{(1)}(P) = \omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge \underline{AP}$$
$$\underline{U}^{(2)}(P) = \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{BP}$$

Poiché si conosce la velocità di E e l'asta FE è una biella:

$$(\underline{U}^{(1)}(F) - U\underline{e}_y) \cdot \underline{FE} = 0$$
$$\downarrow$$
$$(\omega^{(1)}2h\underline{e}_x - U\underline{e}_y) \cdot (-2\underline{e}_x + \underline{e}_y) = 0$$

da cui:

$$\omega^{(1)} = \frac{U}{4h}$$

In maniera analoga per la biella EC:

$$(\underline{U}^{(2)}(C) - U\underline{e}_y) \cdot \underline{EC} = 0$$
$$\downarrow$$
$$(\omega^{(2)}2h\underline{e}_x - U\underline{e}_y) \cdot (2\underline{e}_x + \underline{e}_y) = 0$$

da cui:

$$\omega^{(2)} = -\frac{U}{4h}$$

Sia GH l'asta (3) e sia HD l'asta (4). Per via del manicotto le loro velocità angolari sono identiche, e quindi, indicandole con ω:

$$\underline{U}^{(3)}(P) = \underline{U}_G^{(3)} + \omega\underline{e}_z \wedge \underline{GP}$$
$$\underline{U}^{(4)}(P) = \underline{U}_D^{(4)} + \omega\underline{e}_z \wedge \underline{DP}$$

Il manicotto impone anche che la velocità relativa in direzione $\underline{e}_y$ in H sia nulla:

$$[\underline{U}^{(3)}(H) - \underline{U}^{(4)}(H)] \cdot \underline{e}_y = 0$$

da cui si ricava che $\omega = 0$. Le due aste traslano quindi con velocità:

$$\underline{U}^{(3)}(P) = -\frac{U}{4}\underline{e}_x \qquad \underline{U}^{(4)}(P) = \frac{U}{4}\underline{e}_x$$

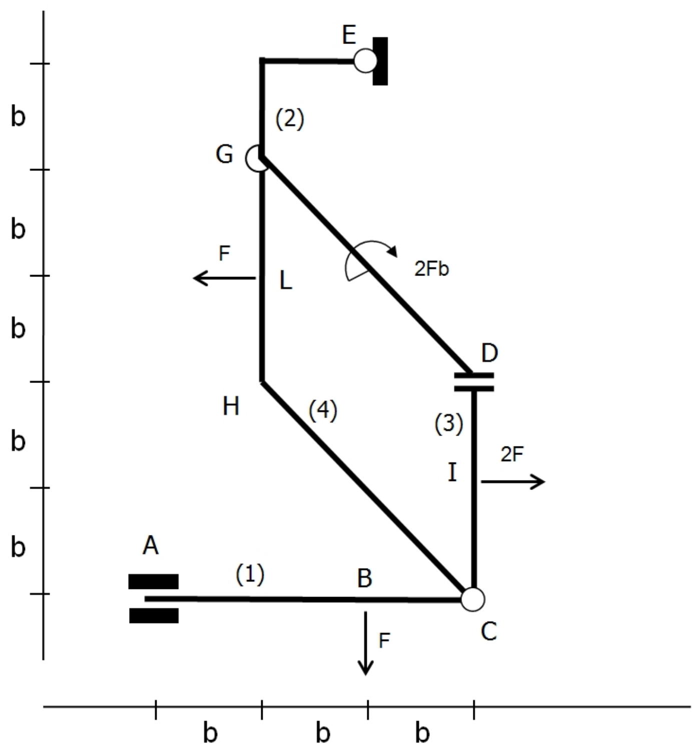
33 Compitino gennaio 2009

LIBRO ESERCIZIO 5.5

34 Appello 06 febbraio 2009

LIBRO ESERCIZIO 5.4

35 Appello 24 febbraio 2009



35.1 Esercizio 1

Per la struttura del disegno:

1. calcolare dapprima le reazioni vincolari a terra.
2. calcolare le azioni esercitate dal corpo (3) sul corpo (2)

La semplicità del procedimento scelto è importante criterio di valutazione al pari della correttezza dei calcoli.

Traccia di soluzione

Sistema globale:

$$M(E, \mathbb{S}) = -F_{Ay}2b + C_A + 4Fb = 0 \tag{7}$$

Sottosistema asta (1):

$$M(C, \mathbb{S}^{(1)}) = -F_{Ay}3b + C_A + Fb = 0 \tag{8}$$

Per sottrazione si ottiene:

$$F_{Ay} = -3F, \qquad C_A = -10Fb$$

Poi si procede al calcolo del resto

35.2 Esercizio 2

Per la struttura del disegno si immagini che il vincolo in A venga declassato lasciando libere le rotazioni (blocca solo la velocità verticale). Determinare gli atti di moto possibili.

Traccia di soluzione

Il corpo (4) è una biella (cinematicamente). Si considerano i corpi (2) e (3) vincolati da pattino in D e da biella. la velocità orizzontale relativa permessa dal pattino tra (2) e (3) è bloccata dalla biella (i calcoli sono lasciati come esercizio), per cui (2) e (3) si muovono come un unico corpo rigido:

$$\underline{U}^{(2)}(P) = \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{EP}$$
$$\underline{U}^{(3)}(P) = \omega^{(2)}\underline{e}_z \wedge \underline{EP}$$

Per il corpo (1), scegliendo come polo C ed imponendo il vincolo cerniera:

$$\underline{U}^{(1)}(P) = \underline{U}^{(1)}_C + \omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge \underline{CP} = \omega^{(2)}b(5\underline{e}_x + \underline{e}_y) + \omega^{(1)}\underline{e}_z \wedge \underline{CP}$$

Il vincolo carrello $\underline{U}^{(1)}(A) \cdot \underline{e}_y = 0$ fornisce poi:

$$\omega^{(2)} = 3\omega^{(1)}$$

35.3 Esercizio 3

Usando i risultati dell'esercizio precedente, ripetere il calcolo della coppia esercitata dal vincolo originario A sul corpo (1).

Traccia di soluzione

L'atto di moto virtuale CA è quello calcolato al punto precedente. L'unica differenza è che si deve esprimere anche l'atto di moto del corpo (4) per poter calcolare la potenza della forza ad esso applicata. Si ottiene che il suo atto di moto è identico a quello di (2) e (3). Indicando quindi con $\hat{\omega}$ la velocità angolare virtuale di (1):

$$\underline{\hat{U}}^{(2,3,4)}(P) = 3\hat{\omega}\underline{e}_z \wedge \underline{EP}$$
$$\underline{\hat{U}}^{(1)}(P) = 3\hat{\omega}b(5\underline{e}_x + \underline{e}_y) + \hat{\omega}\underline{e}_z \wedge \underline{CP}$$

La potenza della forza in L è $-6b\hat{\omega}F$; la potenza della coppia su (2) è $-6b\hat{\omega}F$; la potenza della forza su (3) è $24b\hat{\omega}F$; la potenza della forza su (1) è $-2b\hat{\omega}F$.
Quindi la potenza virtuale completa è:

$$\hat{\mathsf{P}} = \hat{\omega}\,(10Fb + C_A) = 0$$

da cui, la condizione $\hat{\mathsf{P}} = 0$, $\forall\hat{\omega}$, fornisce lo stesso risultato di prima: $C_A = -10Fb$

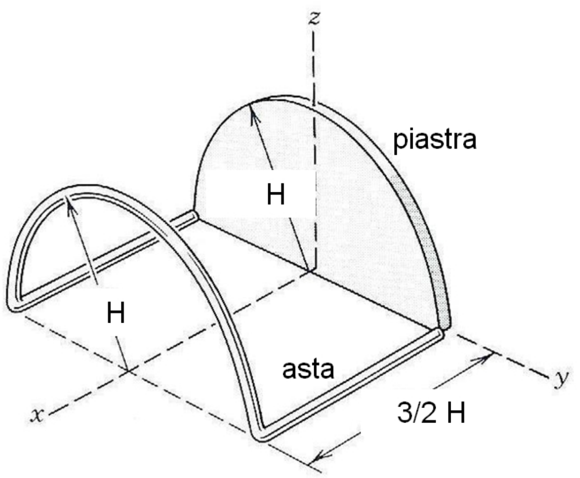
36 Appello 1 luglio 2009

LIBRO ESERCIZIO 5.6

37 Appello 17 luglio 2009

37.1 Esercizio 1

Per la struttura di Figura calcolare il baricentro, sapendo che il peso per unità di area della piastra è $p_A = 10$ Q/H^2 e che il peso per unità di lunghezza delle aste è $p_L = 2$ Q/H. La posizione del baricentro delle componenti piastra ed aste deve essere valutata a partire dalla definizione di baricentro (tramite integrali).



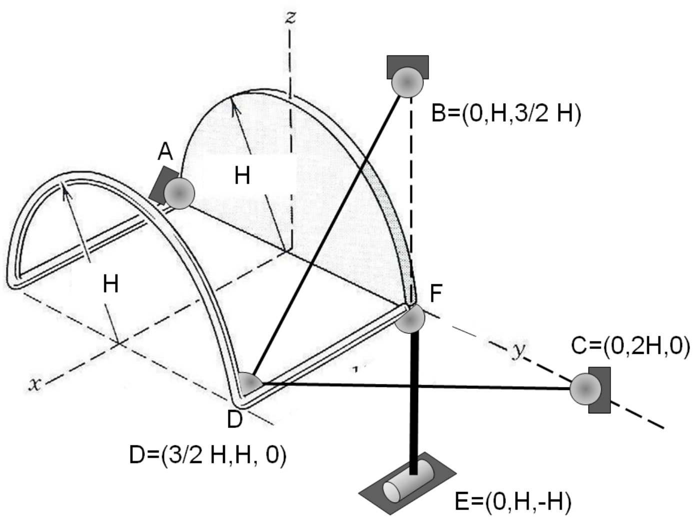
Traccia di soluzione

Ai fini degli esercizi successivi serve solo conoscere la coordinata y del baricentro che è nulla per simmetria e la coordinata x.
Peso semicerchio: $5\pi Q$. Peso delle due aste orizzontali (sommate): $6Q$. Peso dell'asta curva: $2\pi Q$. Peso totale: $(7\pi + 6)Q$ che verrà indicato con bQ.
Coordinata x del baricentro:

$$x_G = \frac{1}{bQ}\left(\frac{3}{2}H \times 2\pi Q + \frac{3}{4}H \times 6Q\right) = \frac{6\pi + 9}{2(7\pi + 6)}H$$

Nel seguito si indicherà $x_G = aH$
Il calcolo della coordinata z_G è lasciato come esercizio (vedere dispense)

37.2 Esercizio 2



La struttura dell'esercizio precedente (soggetta al peso) viene vincolata a terra tramite la cerniera sferica in A e tramite le bielle a cerniere sferiche BD e DC. In particolare si sottolinea che le bielle BD e CD sono vincolate all'asta tramite la cerniera sferica D. Vi è poi il pilone EF vincolato a terra con la cerniera cilindrica E che permette solo le velocità lineari ed angolari in direzione x. Il pilone è collegato al corpo tramite la cerniera sferica F. La cerniera F non è a terra direttamente. In D è applicata anche la coppia esterna $\underline{C} = 3QH\underline{e}_x + 5QH\underline{e}_z$. Calcolare le reazioni vincolari.

Traccia di soluzione

L'analisi del sottosistema pilone (ad esempio imponendo $\underline{M}(F) = \underline{0}$) rivela che si comporta come una biella e può trasmettere al corpo rigido solo una forza verticale F_{Ez}.
Per la altre bielle, le azioni esercitate sul corpo sono:

$$\underline{T}_{DC} = \alpha\left(-3\underline{e}_x + 2\underline{e}_y\right)$$
$$\underline{T}_{BD} = \beta\left(-\underline{e}_x + \underline{e}_z\right)$$

Si consideri ora il corpo pesante:

$$M_y(F) = abQH - \beta\frac{3}{2}H = 0 \quad \rightarrow \beta = \frac{2}{3}abQ$$
$$M_x(F) = -F_{Az}2H + bQH + 3QH = 0 \quad \rightarrow F_{Az} = \frac{1}{2}(b+3)Q$$
$$R_z = -bQ + F_{Az} + F_{Ez} = 0 \quad \rightarrow F_{Ez} = \frac{1}{2}(b-3)Q$$

Poi da:

$$M_z(F) = 2\alpha\frac{3}{2}H + 2HF_{Ax} + 5QH = 0$$
$$R_x = F_{Ax} - 3\alpha - \beta = 0$$

si ottengono:

$$\alpha = -\frac{1}{27}(15+4ab)Q, \qquad F_{Ax} = -\frac{1}{9}(15-2ab)Q$$

Infine:

$$R_y = F_{Ay} + 2\alpha = 0 \quad \rightarrow F_{Ay} = \frac{2}{27}(15+4ab)Q$$

37.3 Esercizio 3

Senza usare i risultati dell'esercizio precedente, calcolare l'azione esercitata dalla biella DC sul corpo.

Traccia di soluzione

Per calcolare l'azione della biella con il PPV si elimina la biella e la si sostituisce con l'azione equivalente:

$$\underline{T}_{DC} = \alpha\left(-3\underline{e}_x + 2\underline{e}_y\right)$$

Si analizzi la cinematica della struttura senza la biella, detto (1) il pilone e (2) il corpo pesante:

$$\underline{U}^{(1)}(P) = U\underline{e}_x + \omega\underline{e}_x \wedge \underline{EP}$$
$$\underline{U}^{(2)}(P) = \underline{\omega} \wedge \underline{AP}$$

con $\underline{\omega} = \omega_x\underline{e}_x + \omega_y\underline{e}_y + \omega_z\underline{e}_z$.
Il vincolo cerniera in F $\underline{U}^{(1)}(F) = \underline{U}^{(2)}(F)$ impone

$$\omega_x 2H\underline{e}_z - \omega_z 2H\underline{e}_x = U\underline{e}_x - \omega H\underline{e}_y$$

da cui: $\omega_x = \omega = 0$, $U = -2H\omega_z$ e quindi:

$$\underline{U}^{(1)}(P) = -2H\omega_z\underline{e}_x$$
$$\underline{U}^{(2)}(P) = (\omega_y\underline{e}_y + \omega_z\underline{e}_z) \wedge \underline{AP}$$

Si imponga ora la biella BD, $\underline{U}^{(2)} \cdot \underline{BD} = 0$:

$$\left(-\omega_y\frac{3}{2}H\underline{e}_z - \omega_z 2H\underline{e}_x + \omega_z\frac{3}{2}H\underline{e}_y\right) \cdot (-\underline{e}_x + \underline{e}_z) = 0$$

da cui: $\omega_z = (3/4)\omega_y$.
L'atto di moto virtuale CA è quello appena calcolato per il corpo (2):

$$\underline{\hat{U}}^{(2)}(P) = \hat{\omega}(\underline{e}_y + \frac{3}{4}\underline{e}_z) \wedge \underline{AP}$$

La potenza della coppia esterna è $(3/4)\hat{\omega}\, 5QH$; la potenza del peso è $aH\hat{\omega}\, bQ$. La potenza dell'azione della biella è $\underline{\hat{U}}^{(2)}(D) \cdot \underline{T}_{DC}$, e quindi:

$$\hat{\omega} H \left(-\frac{3}{2}\underline{e}_z - \frac{3}{2}\underline{e}_x + \frac{9}{8}\underline{e}_y \right) \cdot \left(-3\underline{e}_x + 2\underline{e}_y \right) \alpha = \frac{27}{4} \hat{\omega} H \alpha$$

Quindi la potenza virtuale completa è:

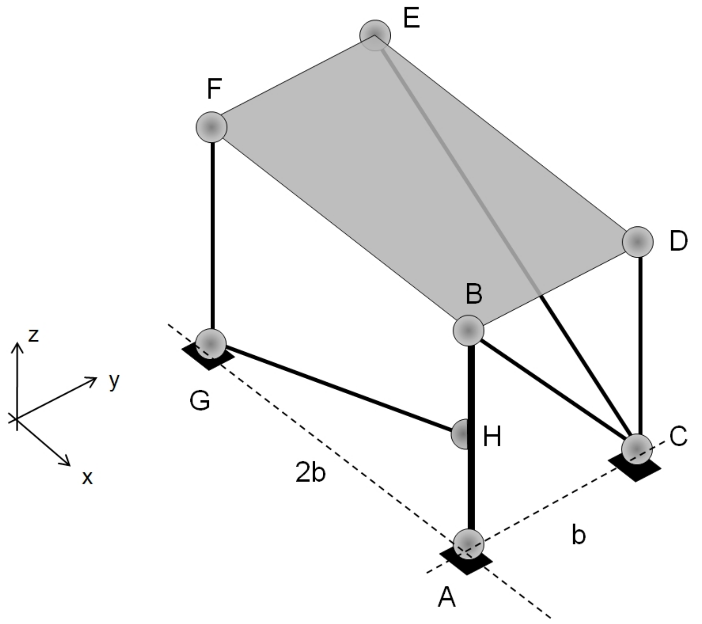
$$\hat{\mathsf{P}} = \hat{\omega} \left(\frac{15}{4} + ab \right) QH + \hat{\omega} \frac{27}{4} H\alpha$$

da cui, la condizione $\hat{\mathsf{P}} = 0$, $\forall \hat{\omega}$, fornisce lo stesso risultato di prima.

38 Appello 7 settembre 2009

38.1 Esercizio 1

La struttura della Figura rappresenta un pannello rettangolare pesante (di peso Q) vincolato a terra tramite aste e cerniere sferiche. GF, AB e DC, di lunghezza $2b$ sono dirette come z. H si trova nella mezzeria di AB. Sul pannello è esercitata anche la coppia esterna $\underline{C} = Qb(\underline{e}_x + \underline{e}_z)$. Calcolare le reazioni vincolari a terra.



Traccia di soluzione

L'asta AB, al contrario di tutte le altre, non è una biella. Scegliendo come sottosistema l'asta AB ed imponendo $M_x(A) = 0$, si trova che la forza che essa esercita sulla cerniera B ha necessariamente la forma:

$$\underline{F} = F_{Bx}\underline{e}_x + F_{Bz}\underline{e}_z$$

cioè la componente y è nulla.
Si considera adesso il sistema pannello e si impone l'equazione del momento usando come polo C. La forza esercitata da FG sul pannello è $F_{Fz}\underline{e}_z$.
Si ottiene:

$$F_{Fz} = \frac{3}{2}Q, \quad F_{Bx} = -Q, \quad F_{Bz} = 0$$

Le azioni nelle tre bielle CB, CD, CE si ottengono imponendo $\underline{R} = \underline{0}$ per il pannello.
L'azione esercitata da GH su AB sia

$$\underline{T}_{GH} = \alpha\,(2\underline{e}_x + \underline{e}_z)$$

Ritornando al sistema asta AB e scrivendo $M_y(A) = 0$, si ottiene $\alpha = -Q$ (la forza esercitata dalla cerniera sull'asta è uguale ed opposta a quella esercitata dall'asta sulla cerniera!).

38.2 Esercizio 2

Senza usare i risultati dell'esercizio precedente, calcolare l'azione esercitata da GH su AB tramite il principio delle potenze virtuali.

Traccia di soluzione

Per calcolare l'azione della biella con il PPV si elimina la biella e la si sostituisce con l'azione equivalente:

$$\underline{T}_{GH} = \alpha\,(2\underline{e}_x + \underline{e}_z)$$

Si analizza la cinematica della struttura senza la biella GH. Sia C il polo scelto per il pannello:

$$\underline{U}(P) = \underline{U}_C + \underline{\omega} \wedge \underline{CP}$$

Le tre bielle CB, CD, CE impongono $\underline{U}_C = \underline{0}$. GF e AB impongono $\omega_x = \omega_y = 0$.
Come atto di moto CA si sceglie dunque:

$$\underline{U}(P) = \hat{\omega}\underline{e}_z \wedge \underline{CP}$$

La velocità virtuale del punto H è poi $\hat{\omega}b\underline{e}_x$. La potenza virtuale della forza esercitata dalla biella GH vale $\hat{\omega}b\alpha$. La potenza virtuale della coppia esercitata sul pannello è $\hat{\omega}Qb$.
Quindi la potenza virtuale completa è:

$$\hat{\mathsf{P}} = \hat{\omega}\,(\alpha b + Qb)$$

da cui la condizione $\hat{\mathsf{P}} = 0$, $\forall\hat{\omega}$, fornisce $\alpha = -Q$.