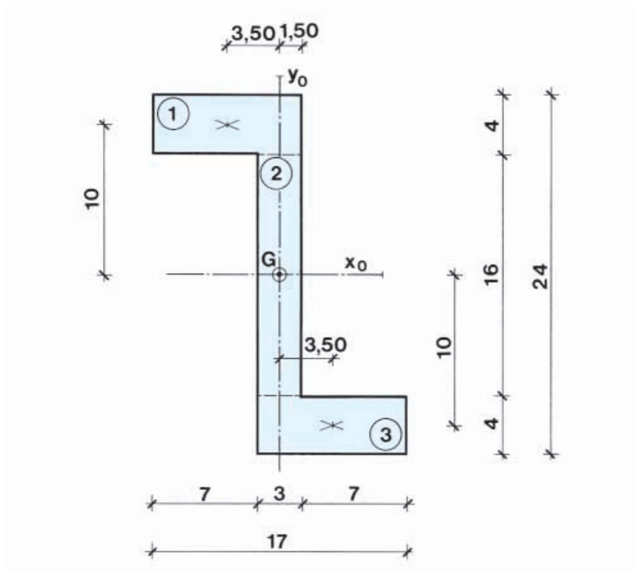
ESERCIZI SVOLTI

3.2.1 Momenti di inerzia assiali di superfici piane regolari

1 Data la sezione a **Z** rappresentata in **figura**, determinare la posizione del baricentro e calcolare i momenti d'inerzia rispetto agli assi x_0 e y_0.



Poiché la figura ammette due assi di emisimmetria, il loro punto di intersezione rappresenta il baricentro.

Momento d'inerzia rispetto all'asse x_0

Si applica il teorema di trasposizione ai rettangoli uguali ① e ③, mentre per il rettangolo ② l'asse x_0 è baricentrico:

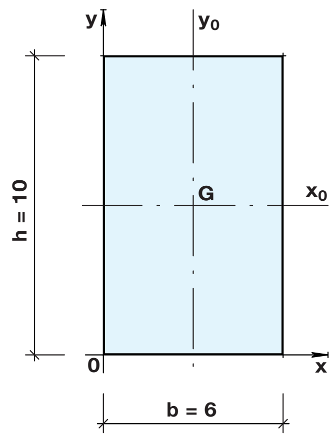
$$I_{x_0} = 2 \times \left(\frac{1}{12} \times 10 \times 4^3 + 10 \times 4 \times 10^2 \right) + \frac{1}{12} \times 3 \times 16^3 =$$
$$= 9130{,}67 \text{ cm}^4$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse y_0

Con procedimento analogo al precedente si ha:

$$I_{y_0} = 2 \times \left(\frac{1}{12} \times 4 \times 10^3 + 4 \times 10 \times 3{,}50^2 \right) + \frac{1}{12} \times 16 \times 3^3 =$$
$$= 1682{,}67 \text{ cm}^4$$

2 Dato il rettangolo in **figura** con le dimensioni di 6×10 cm^2, calcolare analiticamente il momento d'inerzia centrifugo rispetto agli assi x e y e il momento d'inerzia polare rispetto al baricentro G.



Momento d'inerzia centrifugo

Considerando l'area del rettangolo concentrata nel suo baricentro G si ha:

$$I_{xy} = b \cdot h \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} = 6 \times 10 \times 3 \times 5 = 900 \text{ cm}^4$$

Momento d'inerzia polare rispetto al baricentro G

È dato dalla somma dei momenti d'inerzia assiali baricentrici:

$$I_{p(G)} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h \cdot (h^2 + b^2) = \frac{1}{12} \times 6 \times 10 \times (10^2 + 6^2) = 680 \text{ cm}^4$$

3 Una sezione a doppio **T** è stata realizzata con lamiere saldate e rinforzate in corrispondenza degli angoli con profilati a **L** a lati uguali 40×4, le cui caratteristiche geometriche sono riportate in **figura**.
Determinare il momento d'inerzia della sezione rispetto agli assi baricentrici x_0 e y_0.

È necessario innanzitutto definire la posizione del baricentro G della sezione che giace sull'asse di simmetria y_0 per cui occorre calcolare unicamente y_G, in quanto, con il sistema cartesiano x_0, y_0 assunto, risulta $x_G = 0$.
Dal *Manuale* si ricava che l'area di ogni angolare è di 3,08 cm^2, il suo baricentro g dista dai bordi esterni 1,12 cm e il suo momento d'inerzia baricentrico è $I_x = I_y = 4{,}47$ cm^4.

1. Calcolo dei momenti statici rispetto all'asse x e determinazione del baricentro G

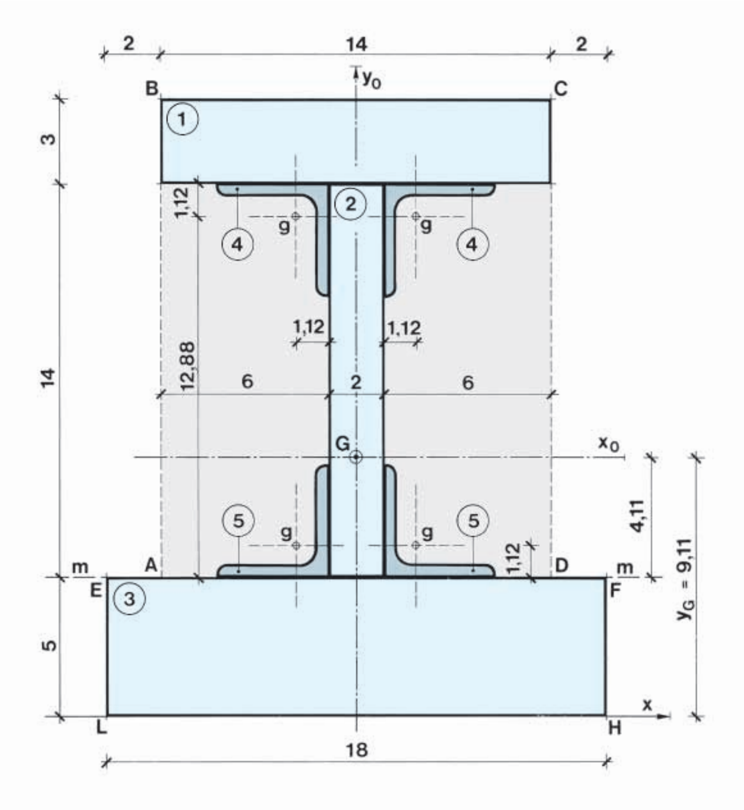
I momenti statici rispetto all'asse x assumono i valori riportati in **tabella**.
L'asse y è di simmetria e quindi su di esso giace il baricentro G, le cui coordinate sono:

$$x_G = 0 \qquad y_G = \frac{\Sigma(a \cdot y)}{\Sigma a} = \frac{1569{,}84}{172{,}32} = 9{,}11 \text{ cm}$$

3.2.1 Momenti di inerzia assiali di superfici piane regolari

Tabella

Figura	Area a (cm²)	y (cm)	$a \cdot y$ (cm³)
Rettangolo ①	14,00 × 3 = 42,00	20,50	861,00
Rettangolo ②	2,00 × 14 = 28,00	12,00	336,00
Rettangolo ③	18,00 × 5 = 90,00	2,50	225,00
Angolari ④	3,08 × 2 = 6,16	17,88	110,14
Angolari ⑤	3,08 × 2 = 6,16	6,12	37,70
	$\Sigma\, a = 172{,}32$		$S_x = \Sigma\,(a \cdot y) = 1569{,}84$



2. Calcolo del momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico x_0

Per facilità di calcolo, assumiamo un asse m di comodo tale che coincida con le basi dei rettangoli *ABCD*, *EFHL* e dei due rettangoli (grigio in figura) che devono essere sottratti; per gli angolari si dovrà applicare il teorema di trasposizione.
Si ha quindi:

$$I_m = \frac{1}{3} \times 14 \times 17^3 + \frac{1}{3} \times 18 \times 5^3 - 2 \times \frac{1}{3} \times 6 \times 14^3 + $$
$$+ 2 \times (4{,}47 + 3{,}08 \times 12{,}88^2) +$$
$$+ 2 \times (4{,}47 + 3{,}08 \times 1{,}12^2) = 13\,748{,}85 \text{ cm}^4$$

Applicando ora la formula di trasposizione in senso inverso si ottiene:

$$I_{x_0} = I_m - (y_G - 5)^2 \cdot \Sigma a = 13\,748{,}85 - 4{,}11^2 \times 172{,}32 \approx$$
$$\approx 10\,838{,}00 \text{ cm}^4$$

3. Calcolo del momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico di simmetria y_0

Tale asse è baricentrico ai tre rettangoli che compongono la sezione, per cui è possibile applicare la formula relativa, mentre dovrà essere applicato il teorema di trasposizione per i quattro angolari; si ha quindi:

$$I_{y_0} = \frac{1}{12} \times 3 \times 14^3 + \frac{1}{12} \times 14 \times 2^3 + \frac{1}{12} \times 5 \times 18^3 +$$
$$+ 4 \times [4{,}47 + 3{,}08 \times (1{,}12 + 1)^2] = 3198{,}58 \text{ cm}^4$$

4 Una sezione è costituita di tre profilati metallici le cui caratteristiche in tipo e dimensioni sono riportate in **figura**.
Si richiede il calcolo dei momenti d'inerzia assiali rispetto agli assi baricentrici x_0 e y_0.

Dal *Manuale* si ricavano le caratteristiche geometriche e statiche dei profilati.

Profilato UPN 140:

- Area: $A_1 = 20{,}40 \text{ cm}^2$
- Momenti d'inerzia baricentrici:

  $I_{x_1} = 605 \text{ cm}^4$ $\quad I_{y_1} = 62{,}5 \text{ cm}^4$
- Posizione del baricentro:

  $e = 1{,}76$ cm

Profilato IPE 160:

- Area: $A_2 = 20{,}10 \text{ cm}^2$
- Momenti d'inerzia baricentrici:

  $I_{x_2} = 869 \text{ cm}^4$ $\quad I_{y_2} = 68{,}30 \text{ cm}^4$

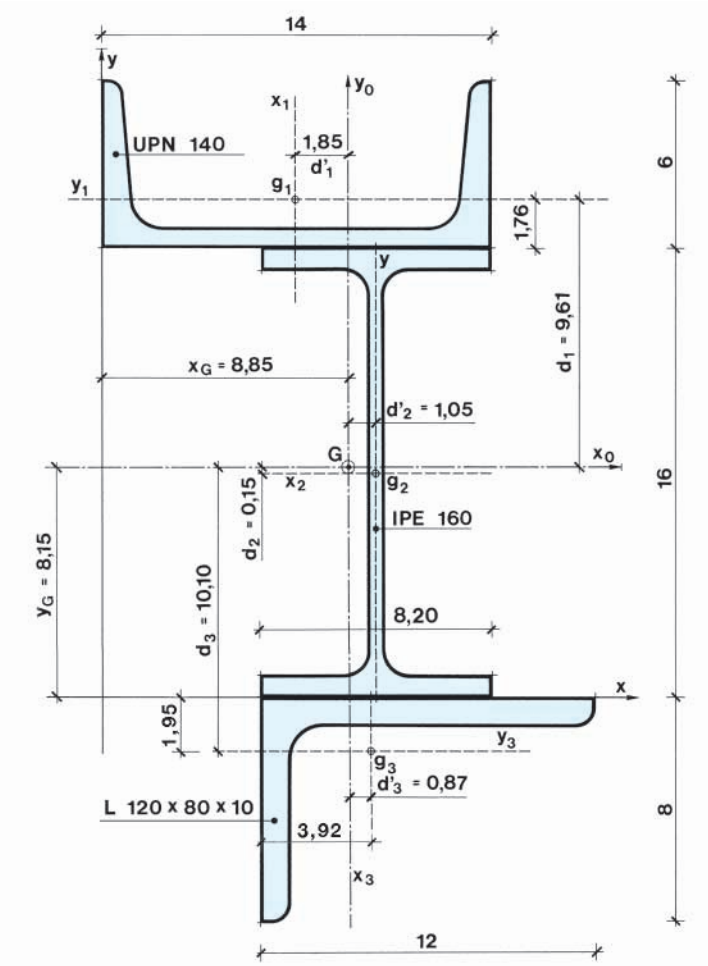
Angolare a lati disuguali: **L** 120 × 80 × 10

- Area: $A_3 = 19{,}10 \text{ cm}^2$
- Momenti d'inerzia baricentrici:

  $I_{x_3} = 276 \text{ cm}^4$ $\quad I_{y_3} = 98{,}10 \text{ cm}^4$
- Posizione del baricentro:

  $e' = 3{,}92$ cm $\quad e'' = 1{,}95$ cm

3.2.1 Momenti di inerzia assiali di superfici piane regolari



1. Calcolo del baricentro *G* della sezione

Assumendo un sistema di assi come riportato in figura, il momento statico della sezione rispetto a tali assi, indicando con x e y le distanze dei baricentri dei vari profilati dagli assi stessi, ha i valori riportati in **tabella**.

$$x_G = \frac{\Sigma\,(a \cdot x)}{\Sigma\, a} = \frac{527{,}44}{59{,}60} \approx 8{,}85 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\Sigma\,(a \cdot y)}{\Sigma\, a} = \frac{485{,}85}{59{,}60} \approx 8{,}15 \text{ cm}$$

2. Calcolo dei momenti d'inerzia baricentrici

Applicando ora il teorema di trasposizione alle sezioni di ogni profilato vengono calcolati i momenti d'inerzia baricentrici della sezione composta.

$$I_{x_0} = (I_{y_1} + A_1 \cdot d_1^2) + (I_{x_2} + A_2 \cdot d_2^2) + (I_{y_3} + A_3 \cdot d_3^2) =$$
$$= (62{,}50 + 20{,}40 \times 9{,}61^2) + (869 + 20{,}10 \times 0{,}15^2) +$$
$$+ (98{,}10 + 19{,}10 \times 10{,}10^2) = 4862{,}42 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_0} = (I_{x_1} + A_1 \cdot d_1'^2) + (I_{y_2} + A_2 \cdot d_2'^2) + (I_{x_3} + A_3 \cdot d_3'^2) =$$
$$= (605 + 20{,}40 \times 1{,}85^2) + (68{,}30 + 20{,}10 \times 1{,}05^2) +$$
$$+ (276 + 19{,}10 \times 0{,}87^2) = 1055{,}74 \text{ cm}^4$$

Tabella

Figura	Area a (cm²)	x (cm)	y (cm)	$a \cdot x$ (cm³)	$a \cdot y$ (cm³)
UPN 140	20,40	7,00	17,76	142,80	362,30
IPE 160	20,10	9,90	8,00	198,99	160,80
L 120 × 80 × 10	19,10	9,72	– 1,95	185,65	– 37,25
	$\Sigma\, a = 59{,}60$			$S_y = \Sigma\,(a \cdot x) = 527{,}44$	$S_x = \Sigma\,(a \cdot y) = 485{,}85$

5 Data la sezione rappresentata in **figura**, determinare:

a) i momenti d'inerzia rispetto agli assi baricentrici x e y;

b) il momento centrifugo rispetto agli assi x e y;

c) la posizione degli assi principali d'inerzia x_0 e y_0 e i momenti d'inerzia massimo e minimo;

d) i raggi d'inerzia relativi agli assi x, y e x_0, y_0.

La sezione si pensa formata dai due rettangoli ① e ②, le cui aree risultano:

$$A_1 = 20 \times 2 = 40 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 12 \times 2 = 24 \text{ cm}^2$$

1. Determinazione del baricentro

Assumendo un sistema di assi cartesiani x_1 e y_1, come in figura, il momento statico della sezione rispetto a questi assi risulta:

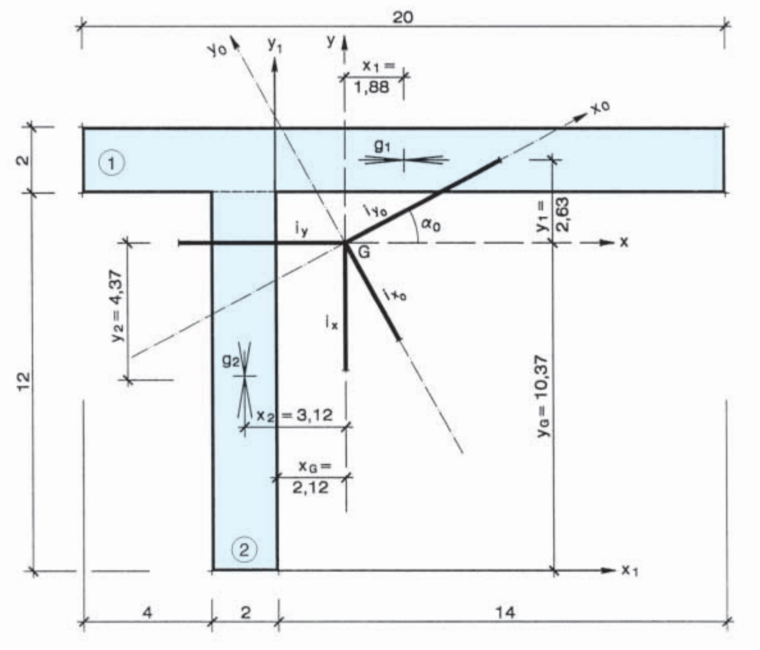
$$S_{y_1} = A_1 \cdot d_1 + A_2 \cdot d_2 = 40 \times 4 + 24 \times (-1) = 136 \text{ cm}^3$$

$$S_{x_1} = A_1 \cdot d_1' + A_2 \cdot d_2' = 40 \times 13 + 24 \times 6 = 664 \text{ cm}^3$$

$$x_G = \frac{S_{y_1}}{A_1 + A_2} = \frac{136}{40 + 24} \approx 2{,}12 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{S_{x_1}}{A_1 + A_2} = \frac{664}{40 + 24} \approx 10{,}37 \text{ cm}$$

3.2.1 Momenti di inerzia assiali di superfici piane regolari



2. Momenti d'inerzia rispetto agli assi baricentrici *x* e *y*

Applicando il teorema di trasposizione si ha:

$$I_x = I_{1,x} + I_{2,x} = \left[\left(\frac{1}{12}\times 20\times 2^3\right) + (20\times 2\times 2{,}63^2)\right] +$$

$$+\left[\left(\frac{1}{12}\times 2\times 12^3\right) + (2\times 12\times 4{,}37^2)\right] = 1036{,}34\ \text{cm}^4$$

$$I_y = I_{1,y} + I_{2,y} = \left[\left(\frac{1}{12}\times 2\times 20^3\right) + (2\times 20\times 1{,}88^2)\right] +$$

$$+\left[\left(\frac{1}{12}\times 12\times 2^3\right) + (12\times 2\times 3{,}12^2)\right] = 1716{,}34\ \text{cm}^4$$

3. Momento centrifugo rispetto agli assi *x* e *y*

$$I_{xy} = A_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot x_2 \cdot y_2 = (40\times 1{,}88\times 2{,}63) +$$

$$+ (24\times 3{,}12\times 4{,}37) = 525{,}01\ \text{cm}^4$$

4. Determinazione degli assi principali d'inerzia

La posizione degli assi principali d'inerzia x_0 e y_0 viene definita dall'angolo α_0 dato dalla relazione:

$$\text{tg}\,2\alpha_0 = -\frac{2\cdot I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2\times 525{,}01}{1036{,}34 - 1716{,}34} \approx +1{,}5441$$

da cui $\alpha_0 \approx +28°{,}54$

5. Momenti d'inerzia massimo e minimo

$$I_{y_0} = I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4\cdot I_{xy}^2} =$$

$$= \frac{1036{,}34 + 1716{,}34}{2} + \frac{1}{2}\times$$

$$\times\sqrt{(1036{,}34 - 1716{,}34)^2 + 4\times 525{,}01^2} = 2001{,}83\ \text{cm}^4$$

$$I_{x_0} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4\cdot I_{xy}^2} = 1376{,}34 - 625{,}49 =$$

$$= 750{,}85\ \text{cm}^4$$

6. Raggi d'inerzia relativi agli assi *x* e *y*

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{1036{,}34}{64}} \approx 4{,}02\ \text{cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1716{,}34}{64}} \approx 5{,}18\ \text{cm}$$

7. Raggi d'inerzia rispetto agli assi x_0 e y_0

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{I_{x_0}}{A}} = \sqrt{\frac{750{,}85}{64}} \approx 3{,}43\ \text{cm}$$

$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{I_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{2001{,}83}{64}} \approx 5{,}59\ \text{cm}$$