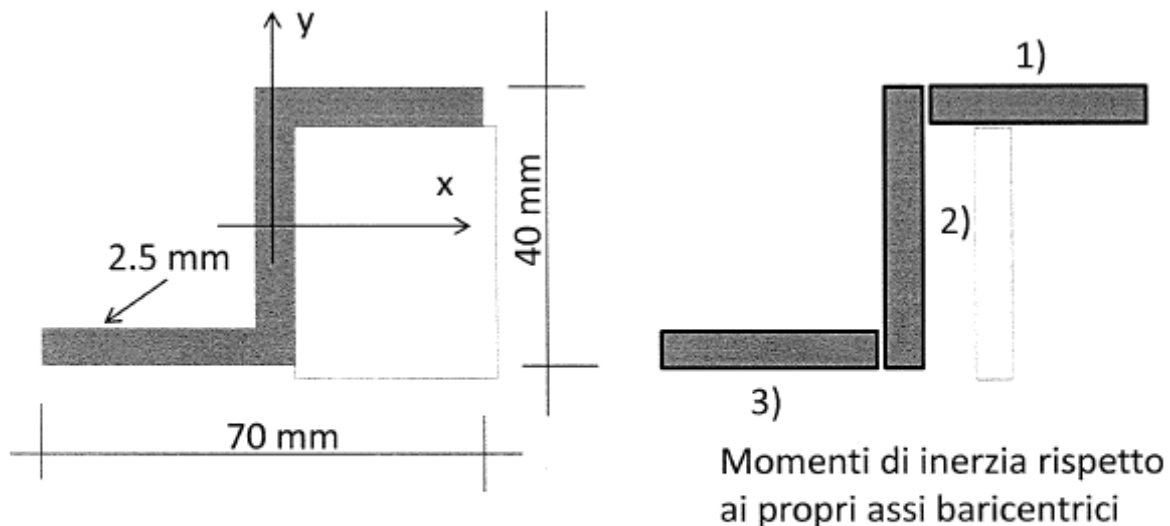


# Soluzione esercizi “Costruzione di macchine” - Capitolo 5

## Esercizio 5.1:



Momenti di inerzia rispetto  
agli assi baricentrici generali

Momenti di inerzia rispetto  
ai propri assi baricentrici

**Figura 5.1**

$$a_1 = 2.5 \cdot 33.75 = 84.37 \text{ cm}^2$$

$$a_2 = 2.5 \cdot 40 = 100 \text{ cm}^2$$

$$a_3 = 84.37 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} J_x &= J_{1x} + a_1 d_{1y}^2 + J_{2x} + a_2 d_{2y}^2 + J_{3x} + a_3 d_{3y}^2 = \\ &= 43.94 + 84.37 \cdot 18.75^2 + 13333.3 + 100 \cdot 0 + 43.94 + 84.37 \cdot 18.75^2 = 72744 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_{1y} + a_1 d_{1x}^2 + J_{2y} + a_2 d_{2x}^2 + J_{3y} + a_3 d_{3x}^2 = \\ &= 8009 + 84.37 \cdot 18.12^2 + 52 + 100 \cdot 0 + 8009 + 84.37 \cdot 18.12^2 = 71473 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$J_{xy} = J_{1xy} + a_1 d_{1x} d_{1y} + J_{2xy} + a_2 d_{2x} d_{2y} + J_{3xy} + a_3 d_{3x} d_{3y} =$$

$$= 0 + 84.37 \cdot 18.12 \cdot 18.75 + 0 + 100 \cdot 0 \cdot 0 + 0 + 84.37(-18.12)(-18.75) = 57329 \text{ cm}^4$$

$$J_{1x} = J_{3x} = \frac{33.75 \cdot 2.5^3}{12} = 43.94 \text{ cm}^4$$

$$J_{1y} = J_{3y} = \frac{2.5 \cdot 33.75^3}{12} = 8009 \text{ cm}^4$$

$$J_{2x} = \frac{2.5 \cdot 40^3}{12} = 13333.3 \text{ cm}^4$$

$$J_{2y} = \frac{40 \cdot 2.5^3}{12} = 52 \text{ cm}^4$$

### Esercizio 5.2:

$$J_x = \frac{1}{64} \pi d_e^4 - \frac{1}{64} \pi d_i^4 = \frac{\pi(50^4 - 15^4)}{64} =$$
$$= 304311 \text{ mm}^4$$

$$J_y = \frac{1}{64} \pi d_e^4 - \left( \frac{1}{64} \pi d_i^4 + \frac{\pi d_i^2 d_i^2}{4} \right) = \frac{\pi \cdot 50^4}{64} - \left( \frac{\pi \cdot 15^4}{64} + \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 15^2}{4} \right) =$$
$$= 306796 - (2485 + 9940) = 294371 \text{ mm}^4$$

$$J_{xy} = 0 \quad (\text{perché } x \text{ è un asse di simmetria})$$

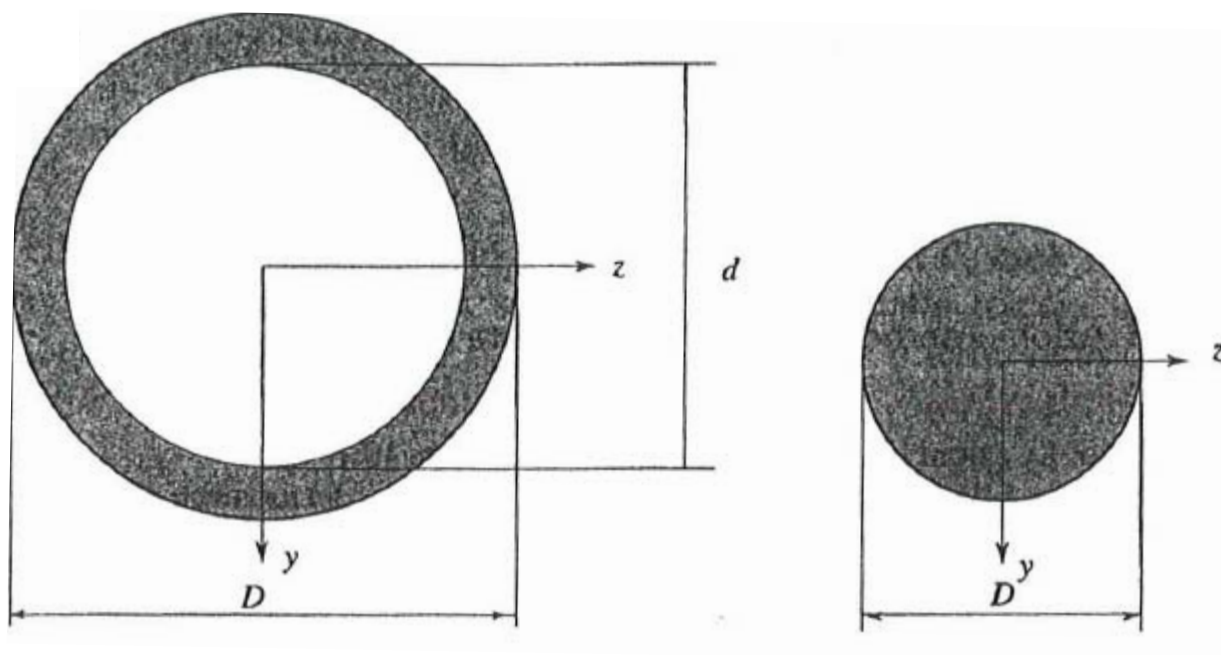
### Esercizio 5.3:

$$J_x = \frac{1}{64} \pi d_e^4 - \frac{l^4}{12} = \frac{\pi 50^4}{64} - \frac{20^4}{12} = 293462 \text{ mm}^4$$

$$J_{a-a} = J_x + ad^2 = 293462 + \left( \frac{\pi \cdot 50^2}{4} - 20^2 \right) 10^2 =$$
$$= 293462 + 156349 = 449811 \text{ mm}^4$$

### Esercizio 5.5:

Si confronti il valore degli sforzi di flessione a pari momento flettente  $M$ , per le due sezioni di Figura 5.2, aventi la stessa area  $A$ . Per la sezione cava inoltre si assuma  $d = \frac{4}{5} D'$ .



**Figura 5.2** Due sezioni di pari area.

**Soluzione:**

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} (D'^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} \left( D'^2 - \frac{16}{25} D'^2 \right) = \frac{\pi}{4} D'^2 \frac{9}{25}$$

da cui

$$D' = \frac{5}{3} D; \quad d = \frac{4}{3} D$$

I momenti di inerzia sono:

$$J_{\text{piena}} = \frac{\pi}{64} D^4$$

$$J_{\text{cava}} = \frac{\pi}{64} (D'^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} \left[ \left( \frac{5}{3} D \right)^4 - \left( \frac{4}{3} D \right)^4 \right]$$

Quindi gli sforzi sono, rispettivamente:

$$\sigma_{\text{piena}} = \frac{32M}{\pi D^3}$$

$$\sigma_{\text{cava}} = \frac{32MD^{5/3}}{\pi \left[ \left( \frac{5}{3}D \right)^4 - \left( \frac{4}{3}D \right)^4 \right]}$$

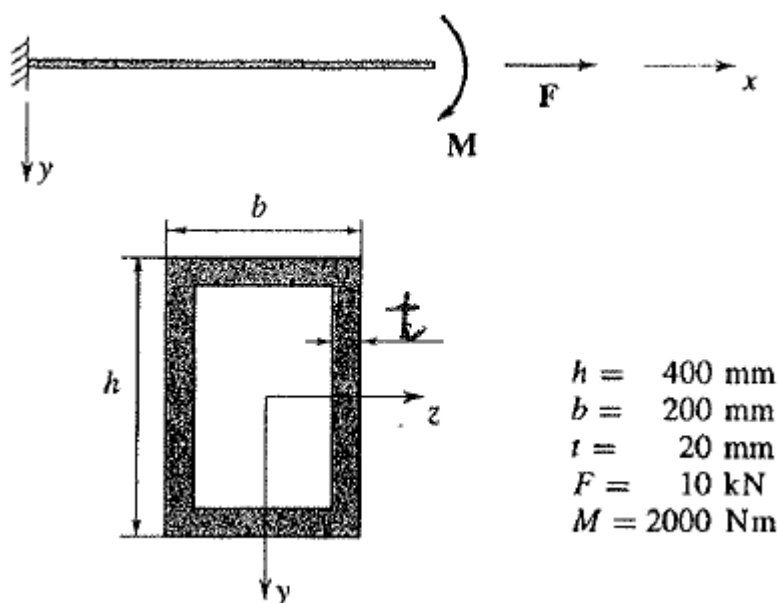
Il rapporto:

$$\frac{\sigma_{\text{piena}}}{\sigma_{\text{cava}}} = 2,7$$

Mostra che, a pari volume di materiale, questo è utilizzato al meglio se distribuito lontano dall'asse neutro, in modo da aumentare il valore di J.

### Esercizio 5.6:

Trovare la posizione dell'asse neutro in una sezione della struttura di Figura 5.3, soggetta alla forza trazione F e momento flettente M, i cui dati sono riportati a fianco.



**Figura 5.3** Sezione di cui si deve trovare la posizione dell'asse neutro.

**Soluzione:** La sovrapposizione degli effetti dell'azione assiale e del momento flettente porta all'espressione

$$\sigma_x = \frac{F}{A} - \frac{M}{J}y$$

dove

$$A = bh - (b - 2t)(h - 2t) = 22\,400 \text{ mm}^2$$

$$J = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{12}(b - 2t)(h - 2t)^3 = 444,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

L'asse neutro si trova imponendo  $\sigma_x(y_0) = 0$ :

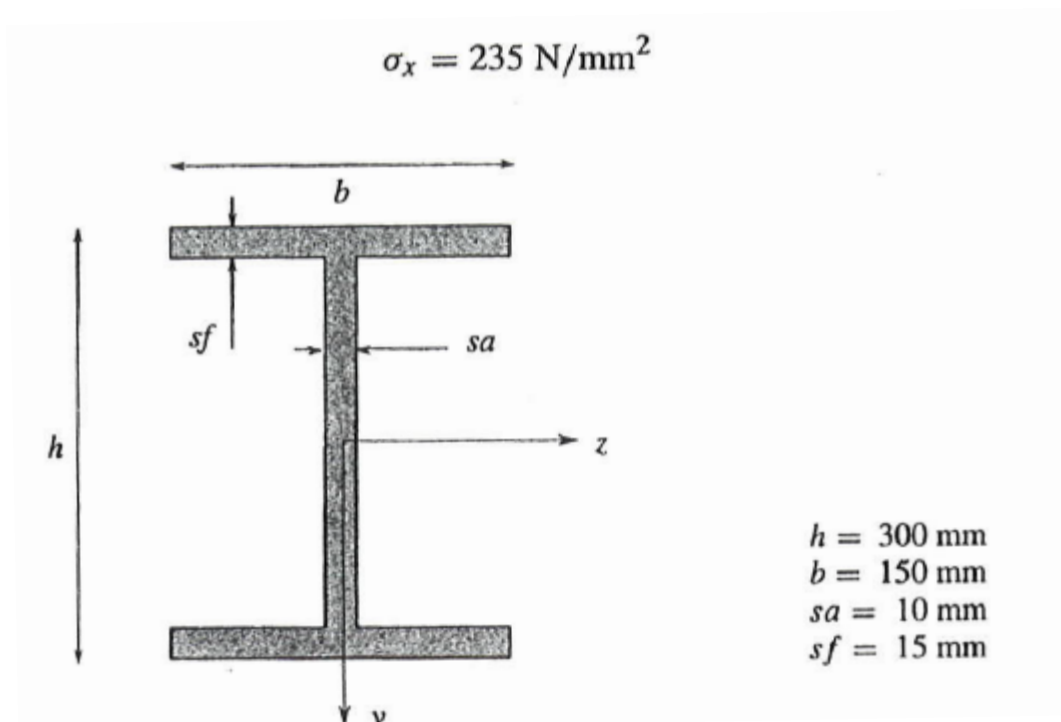
$$\frac{F}{A} - \frac{M}{J}y_0 = 0$$

da cui

$$y_0 = \frac{JF}{MA} = 99 \text{ mm}$$

### Esercizio 5.7:

Data la sezione di Figura 5.4 e i dati riportati in essa, trovare il valore del momento flettente  $M$  che dia



**Figura 5.4** Trave a doppio T.

**Soluzione:** Il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro (asse z) è

$$J = \frac{1}{12}bh^3 - 2\frac{1}{12}\left(\frac{b}{2} - \frac{sa}{2}\right)(h - 2sf)^3$$

Dall'espressione degli sforzi

$$\sigma_x = \frac{M h}{J} \frac{z}{2}$$

si ricava allora

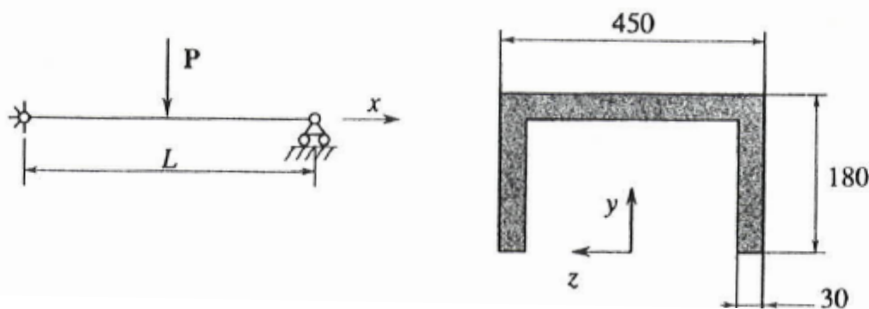
$$M = \frac{2\sigma J}{h} = 169 \text{ kN m}$$

### Esercizio 5.8:

Calcolare gli sforzi massimo e minimo nella sezione maggiormente sollecitata della struttura di Figura 5.5, dati  $P= 30$ , kN e  $L= 30$  m.

**Soluzione:** Il problema può essere risolto seguendo la procedura seguente.

- Tracciare il diagramma del momento flettente e individuare la sezione maggiormente sollecitata.
- Trovare le coordinate del baricentro della sezione.
- Individuare l'asse neutro.
- Calcolare il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro.



**Figura 5.5** Sforzi in un profilo a C.

- Calcolare gli sforzi

Scelto il sistema di riferimento y, z non baricentrico, le coordinate del baricentro  $y_g$ ,  $z_g$ ,  $S_g$ .

$$z_g=0$$

per simmetria della sezione rispetto all'asse  $y$ ,

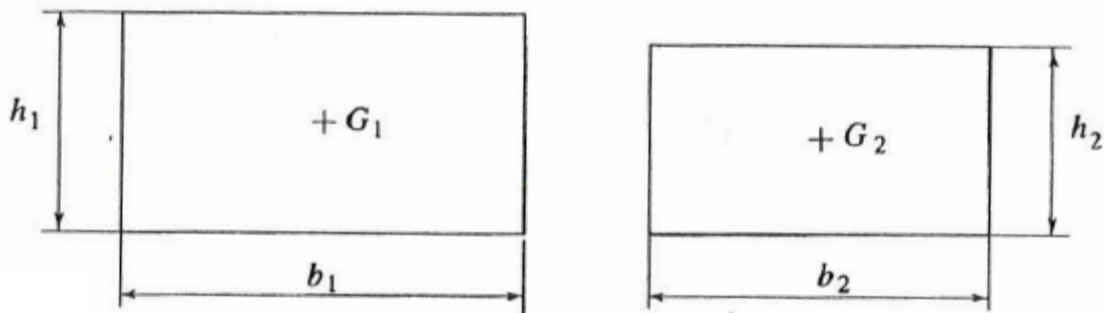
$$y_G = \frac{y_{G1} \cdot A_1 - y_{G2} \cdot A_2}{A_1 - A_2}$$

Per definizione di momento statico, dove  $A_1$  e  $A_2$  sono le aree dei rettangoli riportati nella Figura 5.6.

e dove

$$A_1 = 81\,000 \text{ mm}^2 \quad A_2 = 58\,500 \text{ mm}^2$$

$$y_{G1} = 90 \text{ mm} \quad y_{G2} = 75 \text{ mm}$$



**Figura 5.6**

Si ha quindi

$$y_G = 129 \text{ mm}$$

Il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro, scelto un riferimento  $y'$ ,  $z'$  con origine nel baricentro della sezione, è dato dalla

$$J = J_1 - J_2$$

dove

$$J_1 = \frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 (y_G - y_{G1})^2 = 341\,901\,000 \text{ mm}^4$$

$$J_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 (y_G - y_{G2})^2 = 280\,273\,500 \text{ mm}^4$$

$$J = 61\,627\,500 \text{ mm}^4$$

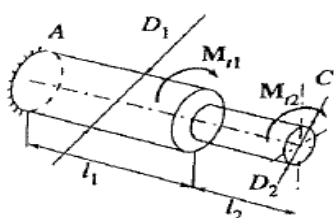
Gli sforzi sono dati dalla

$$\sigma = \frac{M}{J} y' = \frac{PL^2}{4J} y'$$

e quindi

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J} y_g = 471 \text{ N/mm}^2$$

### Esercizio 5.9:



$$M_{t1} = 1000 \text{ Nm}$$

$$M_{t2} = 700 \text{ Nm}$$

$$l_1 = 600 \text{ mm}$$

$$D_1 = 64 \text{ mm}$$

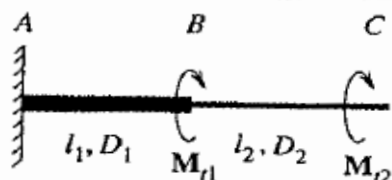
$$l_2 = 450 \text{ mm}$$

$$D_2 = 50 \text{ mm}$$

$$G = 80\,000 \text{ MPa}$$

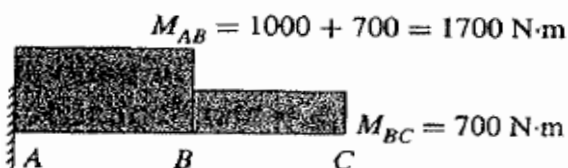
Figura 5.7

**Soluzione:** Lo schema strutturale è il seguente:



dove  $M_{t1}$  e  $M_{t2}$  sono azioni *esterne*.

L'azione interna, momento torcente, ha la seguente distribuzione



dove invece  $M_{AB}$  e  $M_{BC}$  sono azioni *interne*.

$$\tau_{\max 1} = \frac{16 M_{AB}}{\pi D_1^3} = 33,0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{16 M_{BC}}{\pi D_2^3} = 28,52 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max AC} = \max(\tau_{\max 1}, \tau_{\max 2}) = 33,0 \text{ MPa}$$

$$\Delta\varphi_{\text{tot}AC} = \frac{32 M_{AB} \cdot l_1}{\pi G D_1^4} + \frac{32 M_{BC} \cdot l_2}{\pi G \cdot D_2^4} = 0,01416 \text{ rad} = 0,811^\circ$$



### Esercizio 5.10:

Calcolare lo sforzo tangenziale massimo  $\tau_{MAX}$  e la torsione relativa totale tra le sezioni A e D.

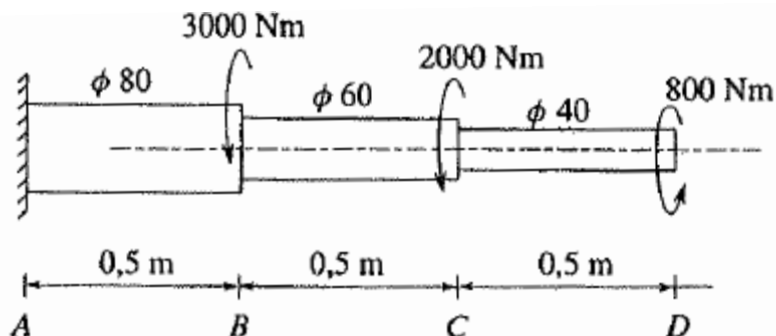


Figura 5.8

**Soluzione:** L'azione interna *momento torcente* ha il seguente diagramma:

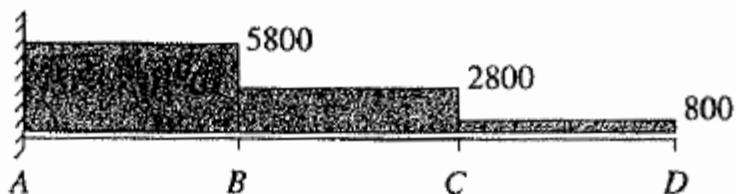


Figura 5.9

$$\tau_{max} = \max \left( \frac{16M_{AG}}{\pi d_{AB}^3}; \frac{16M_{BC}}{\pi d_{BC}^3}; \frac{16M_{CD}}{\pi d_{CD}^3} \right) = \max(57,7; 66,0; 63,6) = 66,0 \text{ MPa}$$

Quindi il massimo sforzo tangenziale si raggiunge nel tratto BC.

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{tot} &= \Delta\varphi_{AB} + \Delta\varphi_{BC} + \Delta\varphi_{CD} = \\ &= \frac{32M_{AB} \cdot l_{AB}}{\pi G \cdot d_{AB}^4} + \frac{32M_{BC} \cdot l_{BC}}{\pi G \cdot d_{BC}^4} + \frac{32M_{CD} \cdot l_{CD}}{\pi G \cdot d_{CD}^4} = \\ &= 0,00901 + 0,01375 + 0,01989 = 0,04266 \text{ rad} \end{aligned}$$

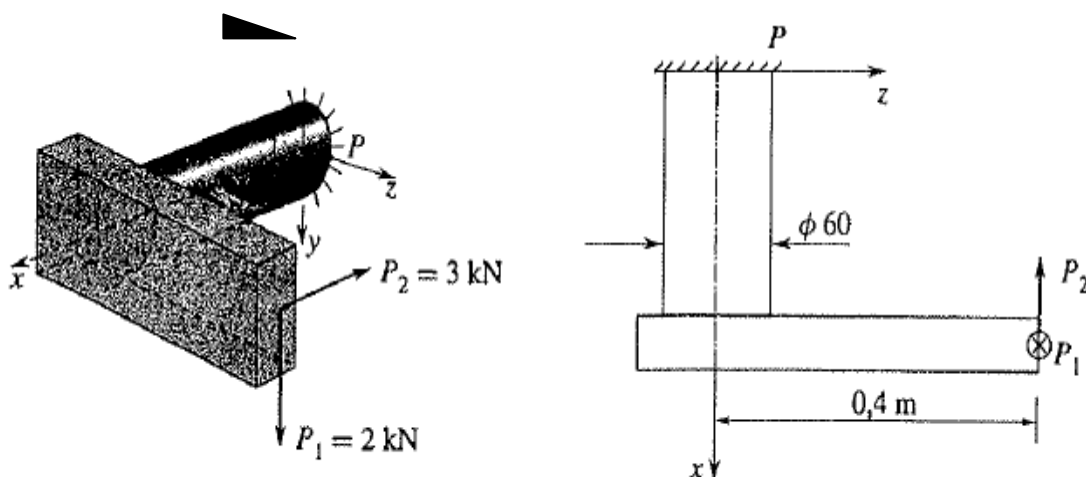
$$\Delta\varphi_{tot} = 2,44^\circ$$

## Esercizio 5.11:

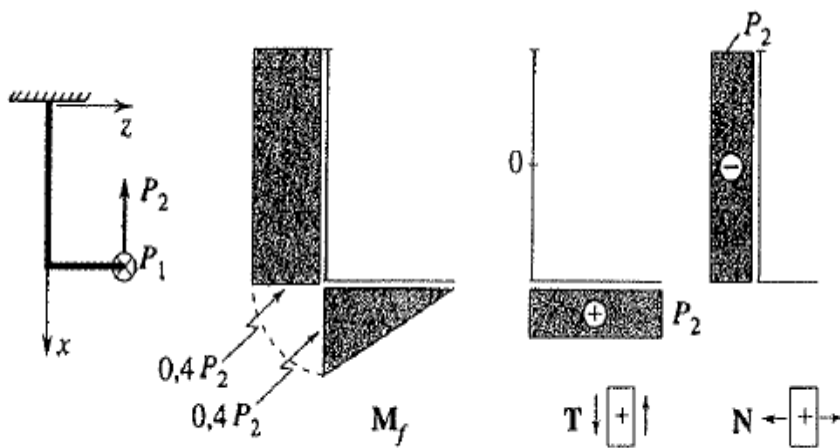
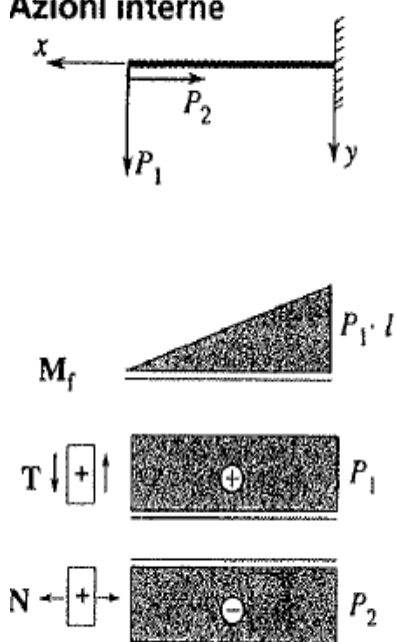
Determinare lo stato di sforzo nel punto P della struttura riportata in Figura 5.10.

**Figura 5.10**

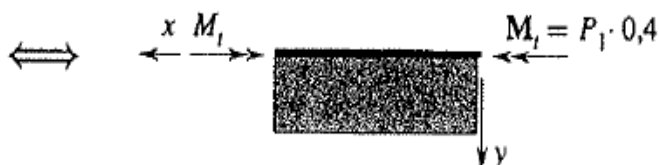
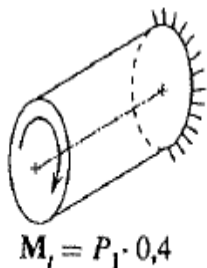




**Soluzione:  
Azioni interne**

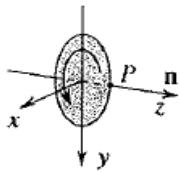


Si osservi che l'azione interna normale è riportata 2 volte. Alle azioni interne è necessario aggiungere la componente torcente, dovuta a  $P_1$ ; costante lungo l'asse dell'elemento di sezione circolare.



Per determinare lo stato di sforzo nel punto  $P$  è conveniente considerare l'effetto delle azioni interne separatamente:

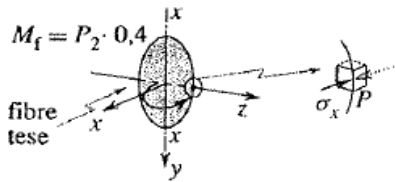
• *Momento flettente dovuto a  $P_1$*




Il punto  $P$  si trova esattamente sull'asse neutro: quindi il momento flettente  $M_f = P_1 \cdot l$  non dà alcun contributo allo sforzo in  $P$

$$\sigma_{xP} = 0$$

• *Momento flettente dovuto a  $P_2$*

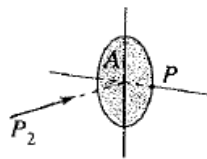


Il momento  $M_f = P_2 \cdot 0,4$  fa tendere le fibre che si trovano dalla parte negativa dell'asse  $Z$ . Quindi il punto  $P$  si troverà dalla parte delle fibre compresse.

Se si assume la convenzione  sugli sforzi:

$$\Rightarrow \sigma_{xP} = -\frac{32M_f}{\pi d^3} = -\frac{32 \cdot 3000 \cdot 400}{\pi \cdot 60^3} = -56,59 \text{ MPa}$$

• *Azione normale dovuta a  $P_2$ .*



L'azione normale  $N = P_2$  comprime la sezione alla quale appartiene il punto  $P$ , quindi, utilizzando la medesima convenzione



$$\sigma_x = -\frac{P_2}{A} = -\frac{4P_2}{\pi d^2} = -\frac{4 \cdot 3000}{\pi \cdot 60^2} = -1,06 \text{ MPa}$$

• *Sovrapponendo gli effetti:*

$$\sigma_x = -\frac{32 \cdot M_f}{\pi d^3} - \frac{4P_2}{\pi d^2} = -57,65 \text{ MPa}$$

Si osservi che il contributo dell'azione normale è trascurabile rispetto a quello determinato dall'azione flettente.

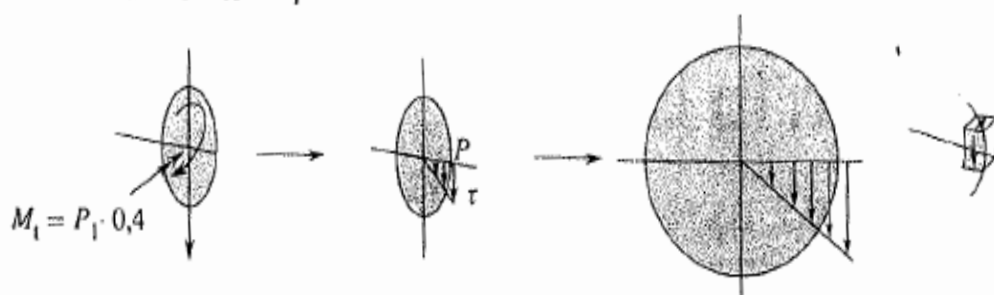
• *Azione tagliante dovuta a  $P_1$*



L'azione tagliante  $V = P_1$  produce sulla sezione una distribuzione di sforzi tangenziali che raggiungono il massimo sulla corda diametrale. In questa posizione è possibile applicare la formula di Jourawski:

$$\tau_{vP} = \frac{4}{3} \frac{V}{A} = \frac{16P_1}{3\pi d^2} = \frac{16 \cdot 2000}{3 \cdot \pi \cdot 60^2} = 0,94 \text{ MPa}$$

- *Momento torcente dovuto a  $P_1$*



Il momento torcente  $M_t = P_1 \cdot 0,4$  produce sulla sezione una distribuzione di sforzi tangenziali che variano linearmente dall'asse del solido verso le fibre esterne. Lo sforzo tangenziale raggiunge il massimo in corrispondenza della superficie esterna:

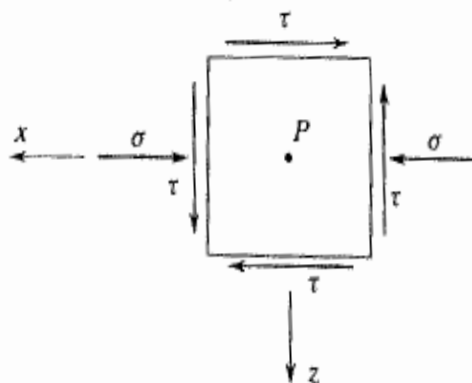
$$\tau_{M_t P} = \frac{16M_t}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot P_1 \cdot 0,4}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 2000 \cdot 400}{\pi 60^3} = 18,86 \text{ MPa}$$

- Anche in questo caso si può applicare la *sovrapposizione degli effetti*:

$$\tau_P = \frac{4}{3} \frac{v}{A} + \frac{16M_t}{\pi d^3} = 19,80 \text{ MPa}$$

Si osservi che il contributo dell'azione tagliante è trascurabile rispetto a quello causato dall'azione torcente.

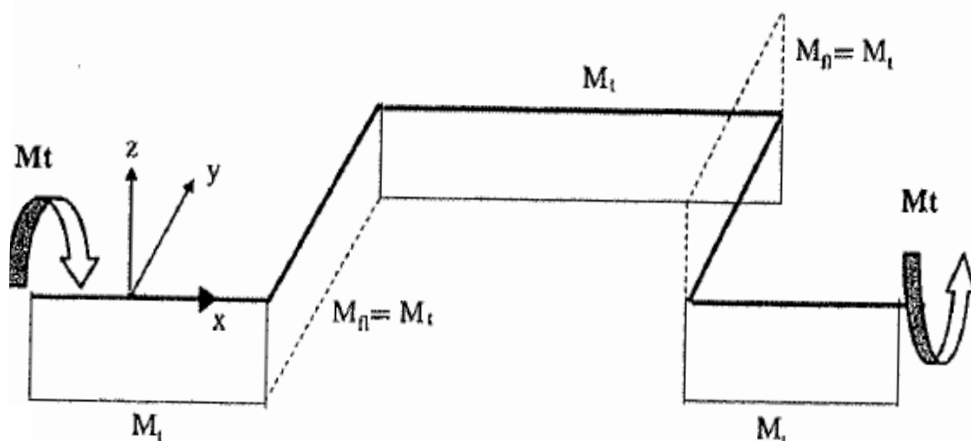
È conveniente dare una rappresentazione grafica dello stato di sforzo (ausilio visivo):



Questo modo di rappresentare lo stato di sforzo sta a indicare che nel punto  $P$  sono presenti sforzo longitudinale  $\sigma$  di *compressione* e lo sforzo tangenziale  $\tau$ . Poiché tutti gli sforzi agiscono nel piano  $xz$  e non vi sono sforzi nella direzione di  $y$ , questa particolare condizione definisce *stato di sforzo piano*.

Pur trattandosi di un caso particolare, è questa una situazione molto comune negli organi macchine e nelle strutture impiegate nella meccanica.

Esercizio 5.12:



**Figura 5.11** Diagrammi del momento flettente e del momento torcente.

Valori delle componenti degli sforzi:

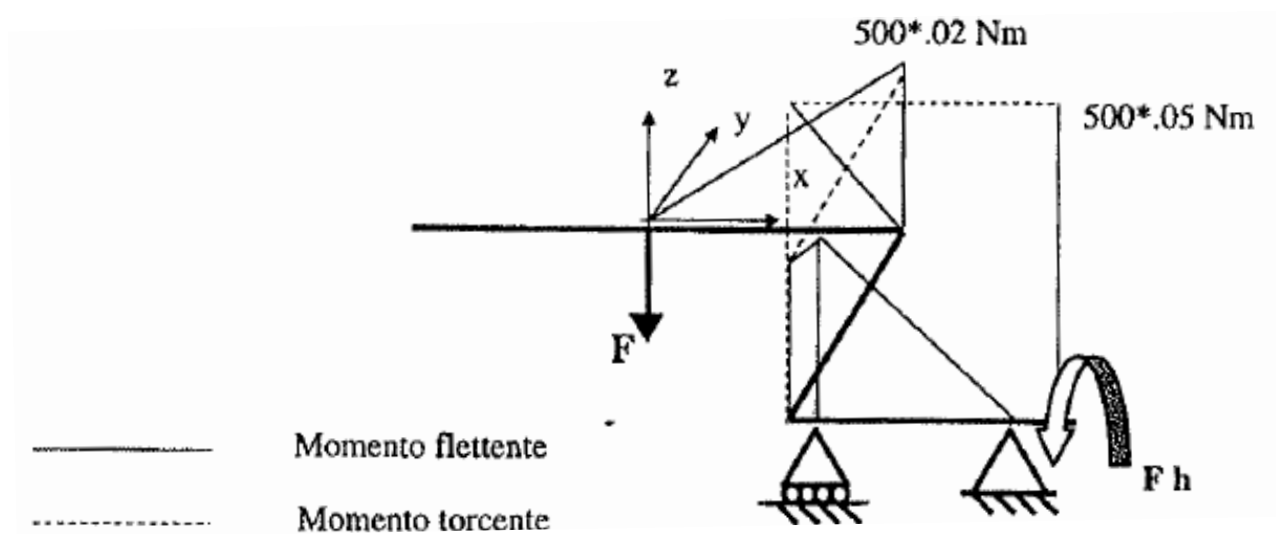
Sez. a-a  $\tau_k = \tau_h = \frac{16M_t}{\pi d^3} =$

Sez. b-b  $\sigma_k = \frac{6M_f}{10 \cdot 15^2} = 266.6$   
 $\sigma_h = 0$

Sez. a-a= 63.6 N/mm<sup>2</sup>

Sez. b-b= 266.6 N/mm<sup>2</sup>

Esercizio 5.13:



**Figura 5.12**

**Diagrammi delle azioni interne.**

Valori delle componenti degli sforzi:

$$\text{Sez. a-a} \quad \tau_k = \tau_h = \frac{16M_t}{\pi d^3} = 15.91 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_k = \frac{32M_f}{\pi d^3} = 12.73 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_h = 0$$

$$\text{Sez. b-b} \quad \sigma_k = \frac{6M_f}{10 \cdot 15^2} = 66.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_h = 0$$

$$\tau_k = \frac{9}{2} \frac{M_t}{10 \cdot 15^2} = 20 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_h = \frac{9}{2} \frac{M_t}{15 \cdot 10^2} = 30 \text{ N/mm}^2$$

### Esercizio 5.14:

Momenti interni.

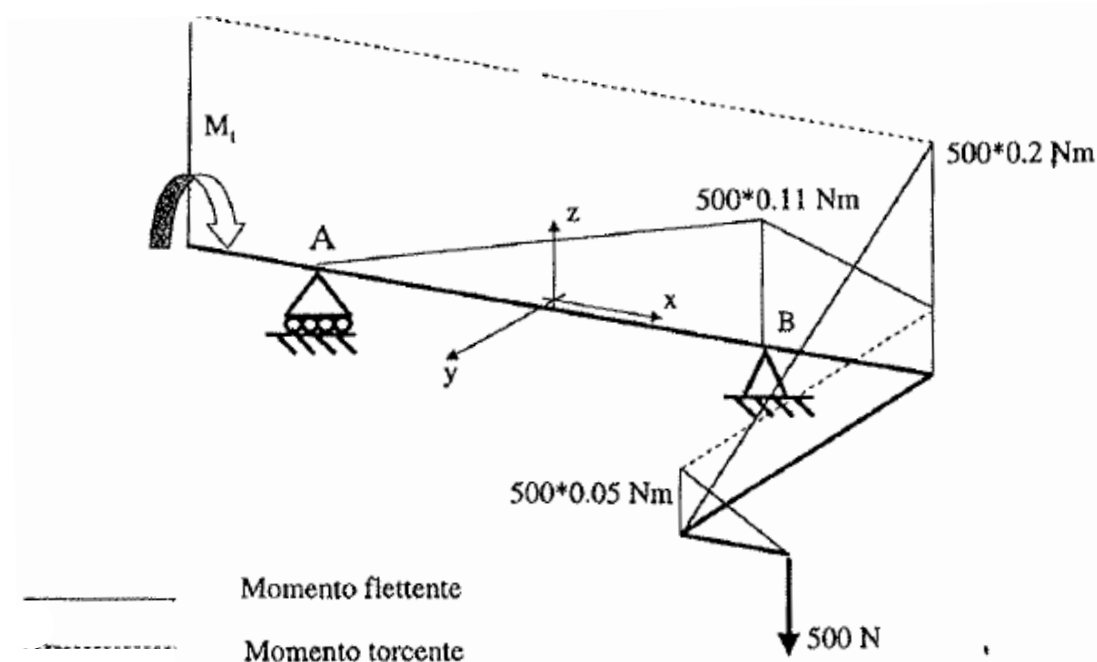


Figura 5.13

Valori delle componenti degli sforzi:

$$\text{Sez. B} \quad \sigma_{\max} = \frac{32 \cdot 55\,000}{\pi \cdot 15^3} = 166 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot 100\,000}{\pi \cdot 15^3} = 151 \text{ N/mm}^2$$

### Esercizio 5.15:

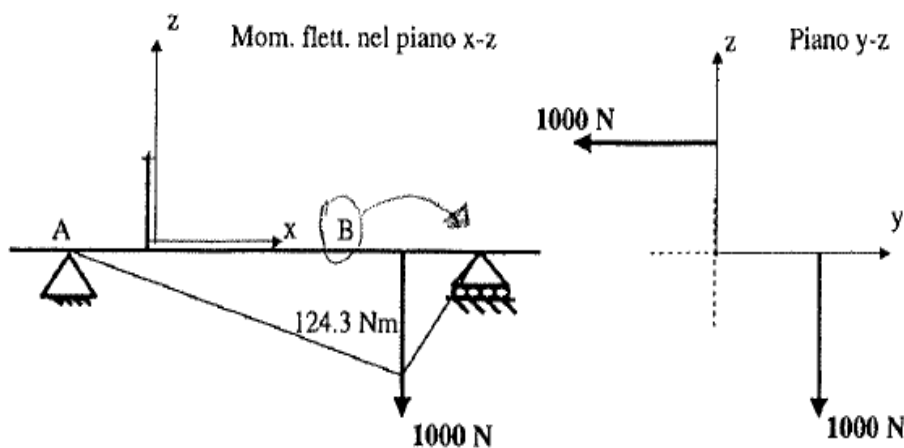
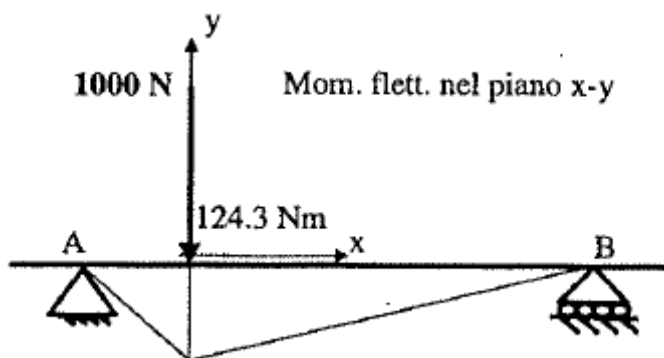


Figura 5.14



$$B_z = 1000 \cdot 560 / 720 = 777 \text{ N}$$

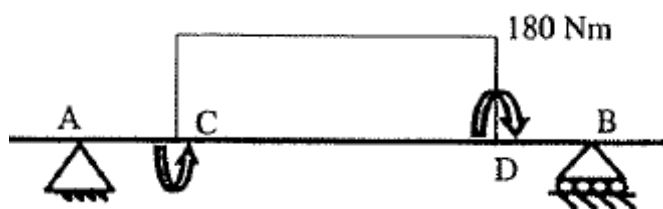
$$A_z = 223 \text{ N}$$

$$B_y = 223 \text{ N}$$

$$A_y = 777 \text{ N}$$

Momenti flettenti.

Figura 5.15



Momento torcente.

Figura 5.16

Le azioni interne nelle sezioni C e D sono di ugual valore

$$M_{fl} = \sqrt{124.3^2 + 35.5^2} = 129.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{32 \cdot 129}{\pi \cdot 0.080^3} = 2\,586\,267 \text{ N/m}^2 = 2.58 \text{ N/mm}^2$$

$$M_{\text{tor}} = 180 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot 180}{\pi \cdot 0.080^3} = 1\,790\,493 \text{ N/m}^2 = 1.79 \text{ N/mm}^2$$



## Esercizio 5.16:

Per l'equilibrio alla rotazione dell'albero:

$$Tr_2 = 2Rr_1$$

$$T = R$$

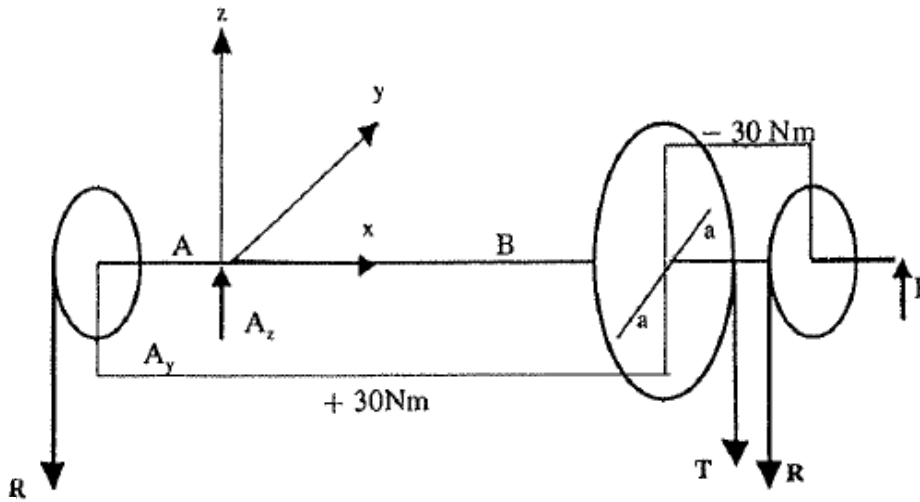
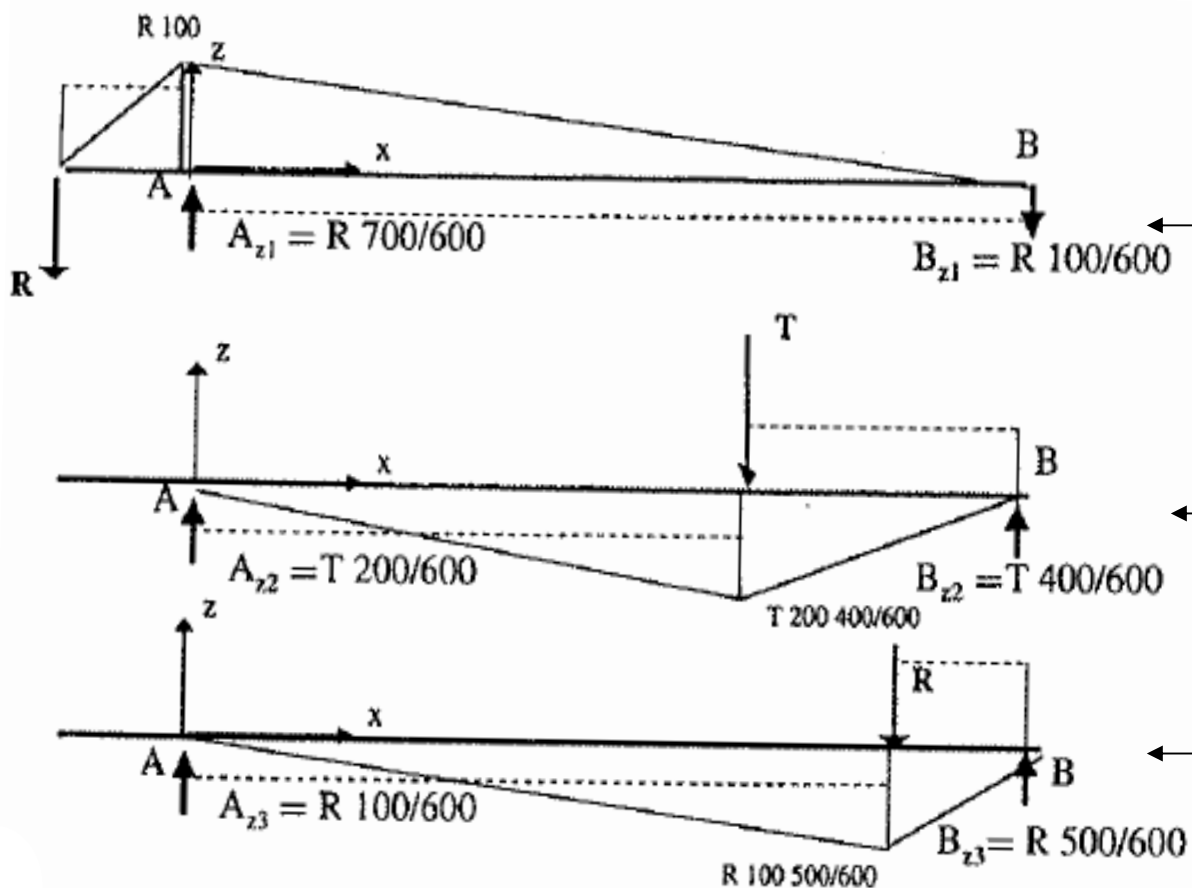


Figura 5.18

Figura 5.17



$$M_{a-a} = R \frac{200 \cdot 100}{600} - T \frac{200 \cdot 400}{600} - R \frac{100 \cdot 400}{600} = -R \frac{1000 \cdot 100}{600} = -166\,666 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_{a-a} = R \frac{100}{600} - T \frac{400}{600} + R \frac{100}{600} = -R \frac{200}{600} = -333 \text{ N}$$

Valori delle componenti degli sforzi:

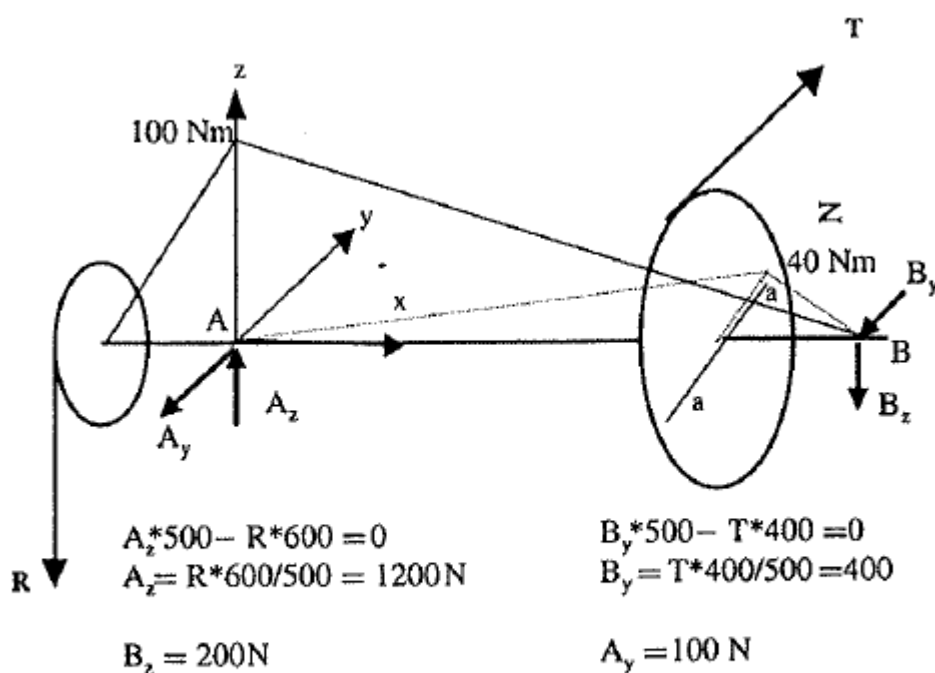
$$\text{Sez. a-a} \quad \sigma_{\max} = \frac{32 \cdot 166\,666}{\pi \cdot 30^3} = 62.87 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\text{tor}} = \frac{16 \cdot 30\,000}{\pi \cdot 30^3} = 5.65 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_T = \frac{16 \cdot 333}{3 \pi \cdot 30^2} = 0.63 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\max} = \tau_{\text{tor}} + \tau_T$$

### Esercizio 5.17:

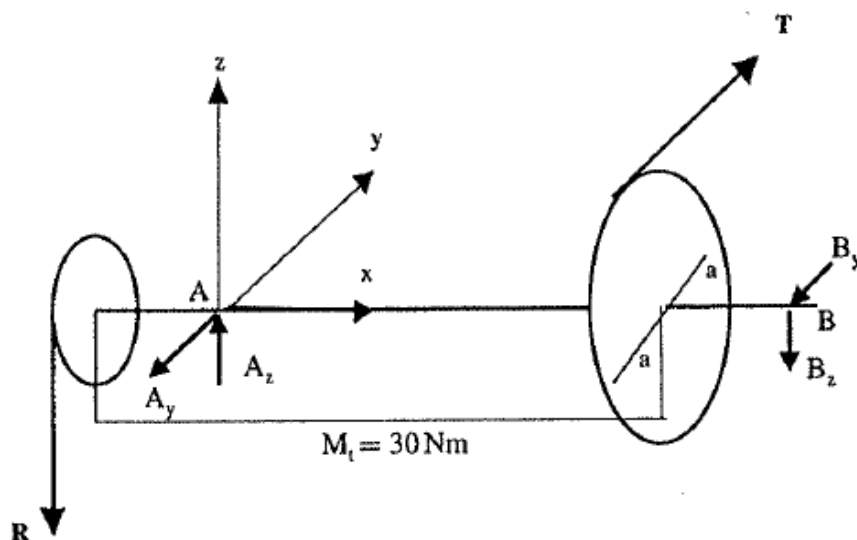


————— Momento flettente nel piano x-z

..... Momento flettente nel piano x-y

Figura 5.19

Momenti flettenti.



Momento torcente.

Figura 5.20

Valori delle componenti degli sforzi:

$$\text{Sez. a-a} \quad M_{fl} = \sqrt{M_{xz}^2 + M_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{100 \cdot 100}{500}\right)^2 + 40^2} = 44.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{32 \cdot 44\,700}{\pi \cdot 30^3} = 16.86 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\text{tor}} = \frac{16 \cdot 30\,000}{\pi \cdot 30^3} = 5.65 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_T = \frac{16}{3} \frac{T_{a-a}}{\pi \cdot 30^2} = 0.84 \text{ N/mm}^2 \quad \text{con } T_{a-a} = \sqrt{B_y^2 + B_z^2}$$

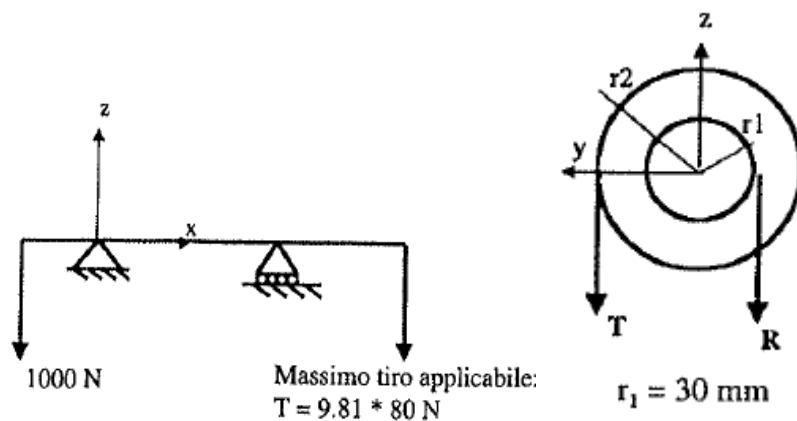
$$\tau_{\max} = \tau_{\text{tor}} + \tau_T$$

## Esercizio 5.18:

Per l'equilibrio alla rotazione dell'albero intorno al suo asse  $x$ :

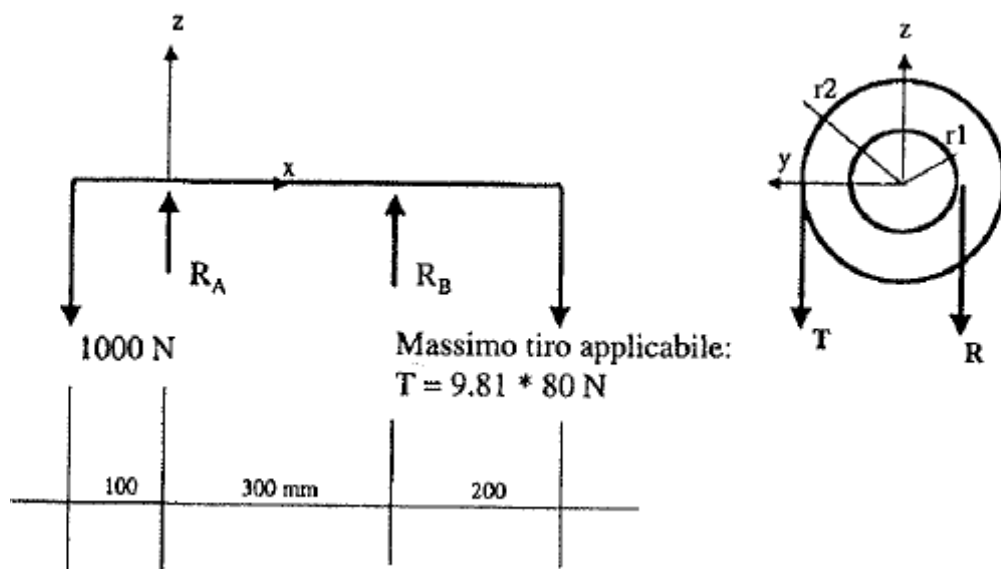
$$Rr_1 = Tr_2$$

$$r_2 = \frac{r_1 R}{T} = \frac{1000}{784.8} 30 = 38.2 \text{ mm}$$



Calcolo del raggio minimo  $r_2$

Figura 5.21



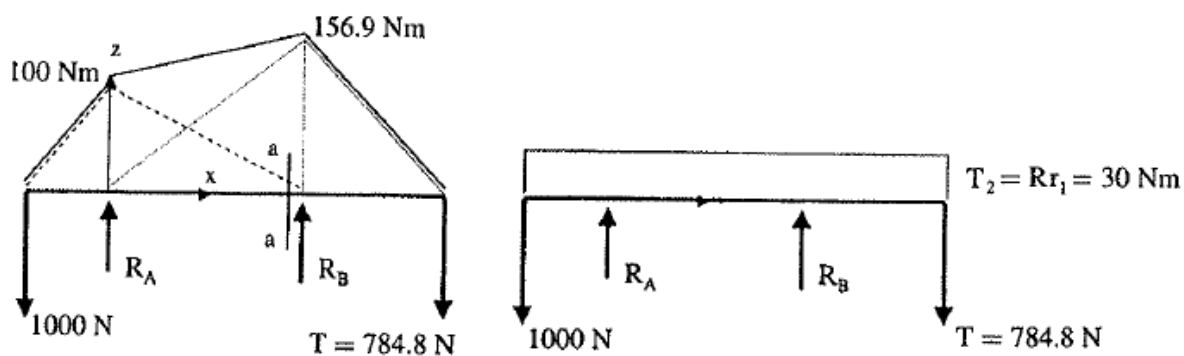
Calcolo delle reazioni.

Figura 5.22

$$R_A 300 + T 200 - R 400 = 0$$

$$R_A = \frac{1000 \cdot 400 - 784.8 \cdot 200}{300} = 810.1 \text{ N}$$

$$R_B = 1000 + 784.8 - 810.1 = 974.7 \text{ N}$$



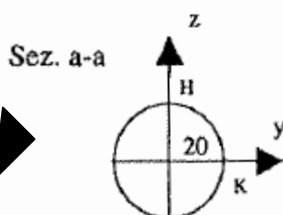
a)

b)

a) momento flettente nel piano  $X-z$ ; b) momento torcente nell'albero.

Figura 5.23

La sezione più sollecitata è la a-a, sulla quale si possono evidenziare queste componenti di sforzo nei punti H e K.



$$M_{fl} = M_{xz} = 156.9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_t = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_H = \frac{32 \cdot 156.900}{\pi \cdot 40^3} = 24.95 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_H = \frac{16 \cdot 30000}{\pi \cdot 40^3} = 2.39 \text{ N/mm}^2$$

Figura 5.24