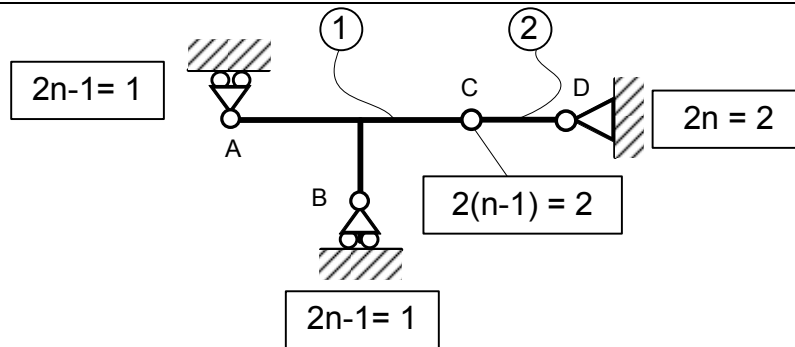
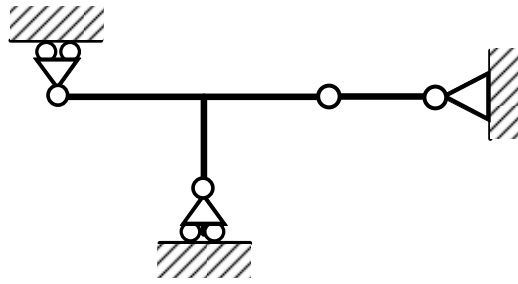


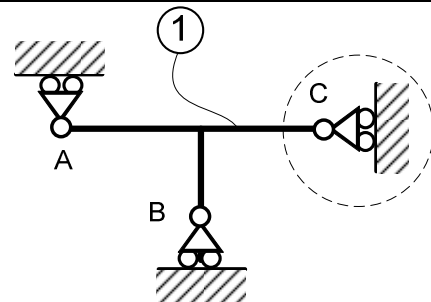
ESERCIZI SVOLTI O CON TRACCIA DI SOLUZIONE SU

# **LABILITA' DI STRUTTURE**

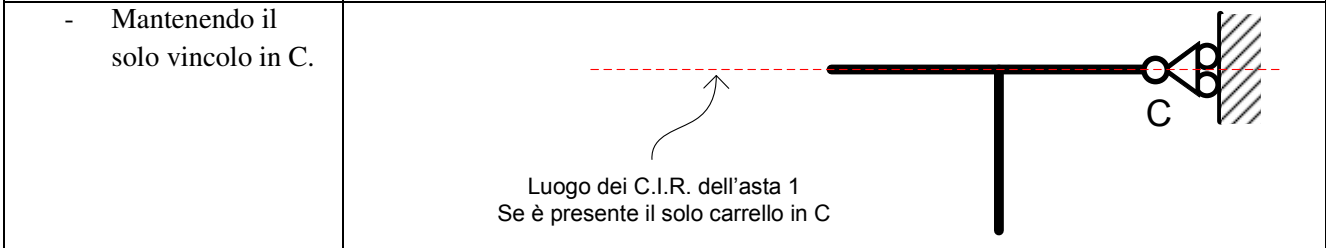
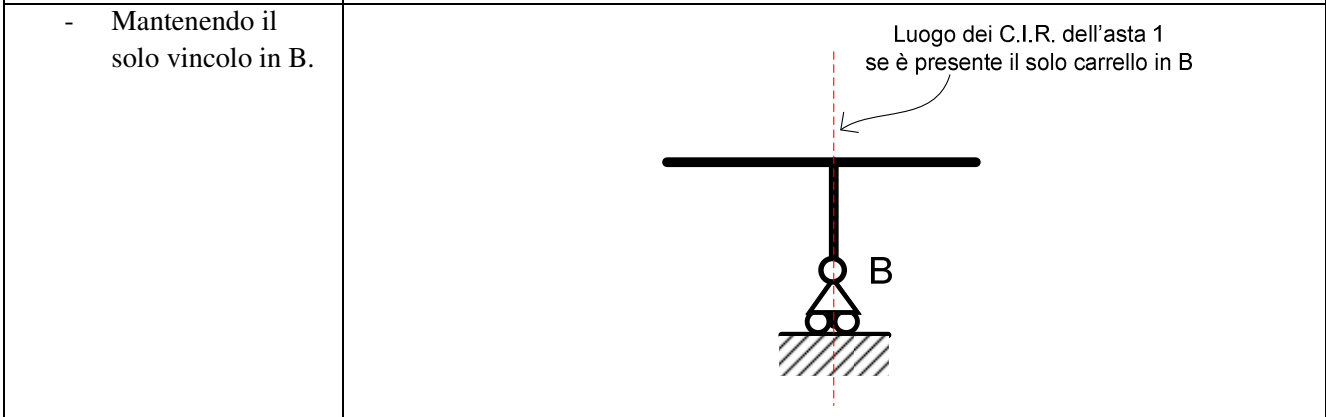
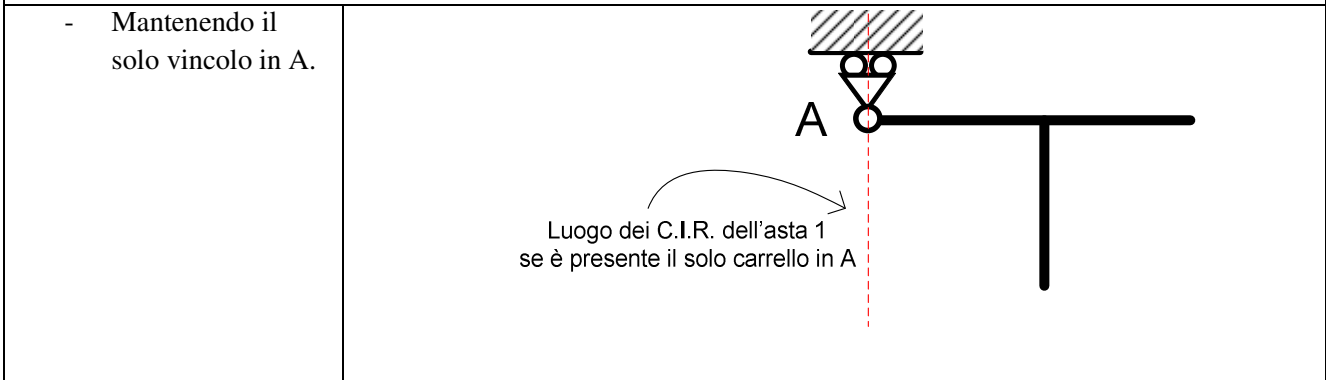


Numero totale di aste  $N = 2$   
 GdL (gradi di libertà aste libere)  $= N \cdot 3 = 6$   
 GdV (gradi di vincolo imposti)  $= 1+1+2+2 = 6$   
**STRUTTURA ISOSTATICA**

Dal punto di vista delle possibilità di moto dell'asta 1, la parte di struttura CD può essere sostituita con un carrello avente direzione di traslazione ortogonale alla direzione CD.

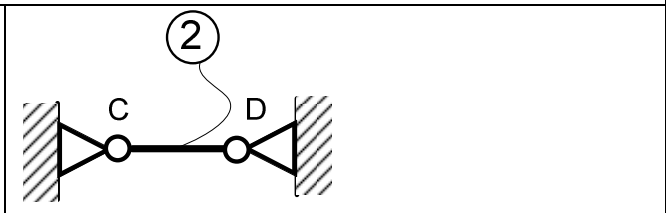


I possibili centri di istantanea rotazione (C.I.R.) dell'asta 1 schematizzata nella figura precedente, se si eliminano volta per volta tutti i vincoli a terra tranne uno, sono i seguenti:

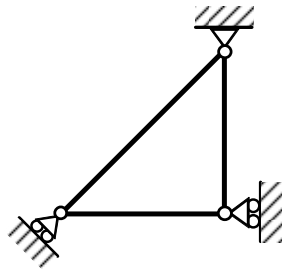


Se si considera l'azione contemporanea di tutti i tre vincoli, poiché non esiste un punto in comune alle tre rette, si giunge alla conclusione che l'asta 1 è NON labile e tutti i suoi punti, compresa la cerniera C, si possono considerare fissi.

Anche l'asta 2 e' quindi NON labile, poiché si può considerare vincolata nella maniera seguente:



Poiché tutte le aste del sistema (aste 1 e 2) sono non labili, la struttura è NON LABILE.



$2n = 4$   
 (n = numero di aste che convergono nella cerniera)

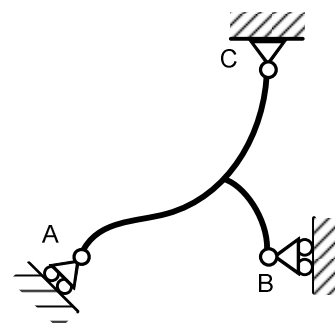
$2n-1 = 3$

$2n-1 = 3$

Numero totale di aste  $N = 3$   
 GdL (gradi di libertà aste libere) =  $N \cdot 3 = 9$   
 GdV (gradi di vincolo imposti) =  $3+3+4 = 10$   
**STRUTTURA 1 VOLTA IPERSTATICA**

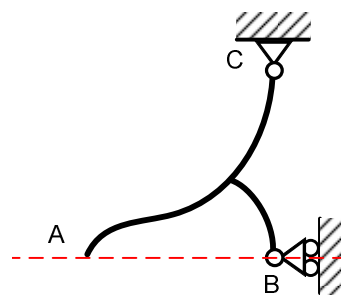
Il sistema ABC è un arco a tre cerniere chiuso con le cerniere non allineate. Si può dunque considerare un unico corpo rigido

Dal punto di vista cinematico la struttura è quindi equivalente ad un unico corpo rigido vincolato a terra dai carrelli a terra in A e B e dalla cerniera a terra in C.

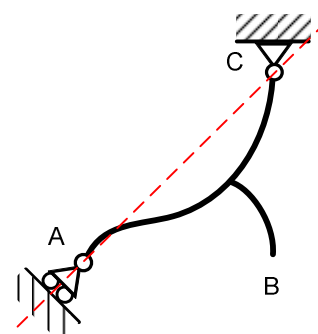


Si vede che i movimenti del corpo rigido sono completamente bloccati dalla sola presenza della cerniera a terra in C e del carrello a terra in B. (sistema cerniera + carrello ben posto; la retta tratteggiata non passa per la cerniera C).

La struttura è quindi NON LABILE.



Si noti che se si considera il corpo rigido vincolato solamente dalla cerniera a terra in C e dal carrello a terra in A, il sistema è LABILE (il luogo dei C.I.R. del corpo rigido vincolato dal solo carrello in A e' una retta che passa per la cerniera C; il corpo rigido ammette quindi il punto C come centro di istantanea rotazione). Ovviamente, la presenza anche del carrello a terra in B rende la struttura reale NON LABILE.

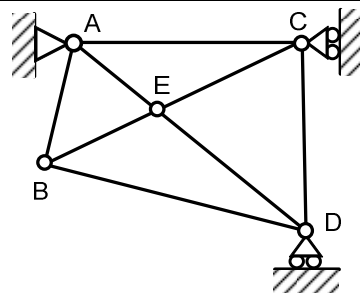


La struttura riportata a fianco si esamina con una procedura sostanzialmente analoga a quella sopra illustrata.

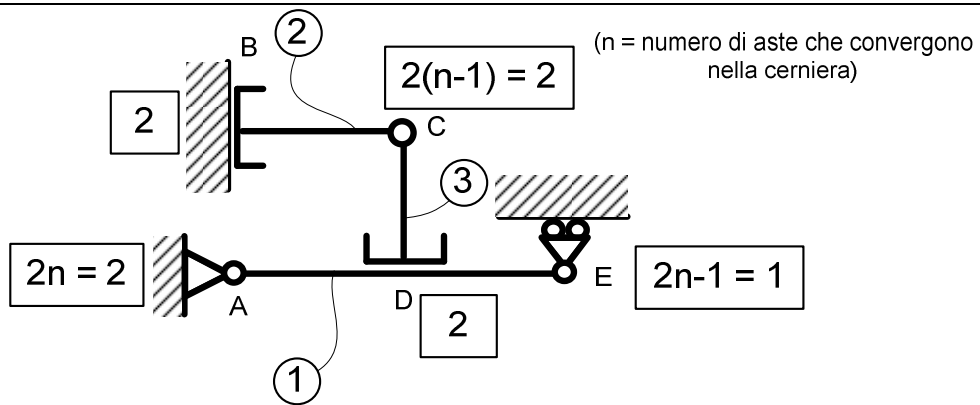
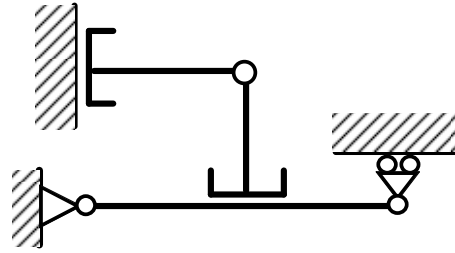
Il sistema ABCD è composto dall'assemblaggio di più archi a tre cerniere chiusi ed aventi le cerniere non allineate (ad esempio AEB; EBD; EDC; AEC). Si tratta quindi di un unico corpo rigido vincolato con una cerniera a terra in A, un carrello a terra in C ed un carrello a terra in D.

La cerniera a terra in A ed il carrello a terra in D vincolano in maniera completa il corpo rigido.

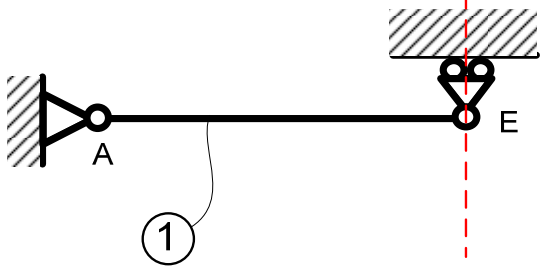
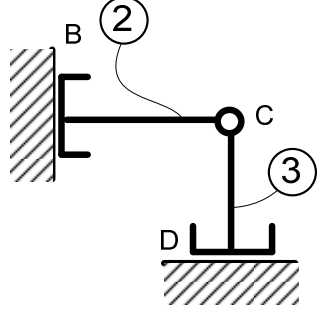
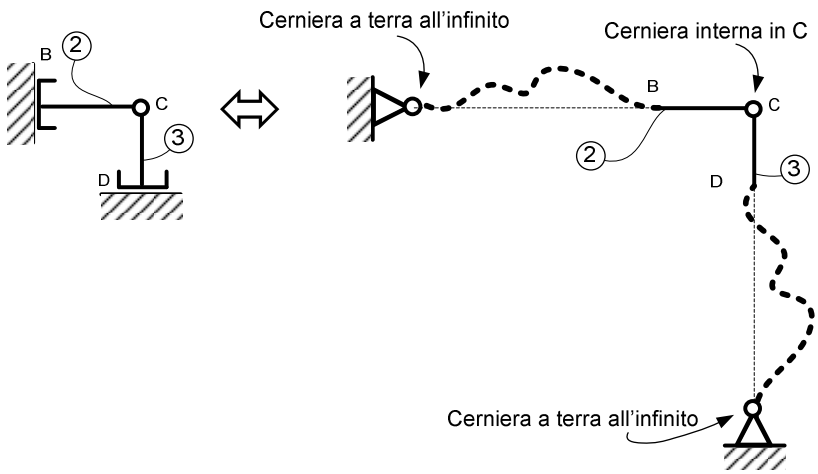
La struttura è NON LABILE.



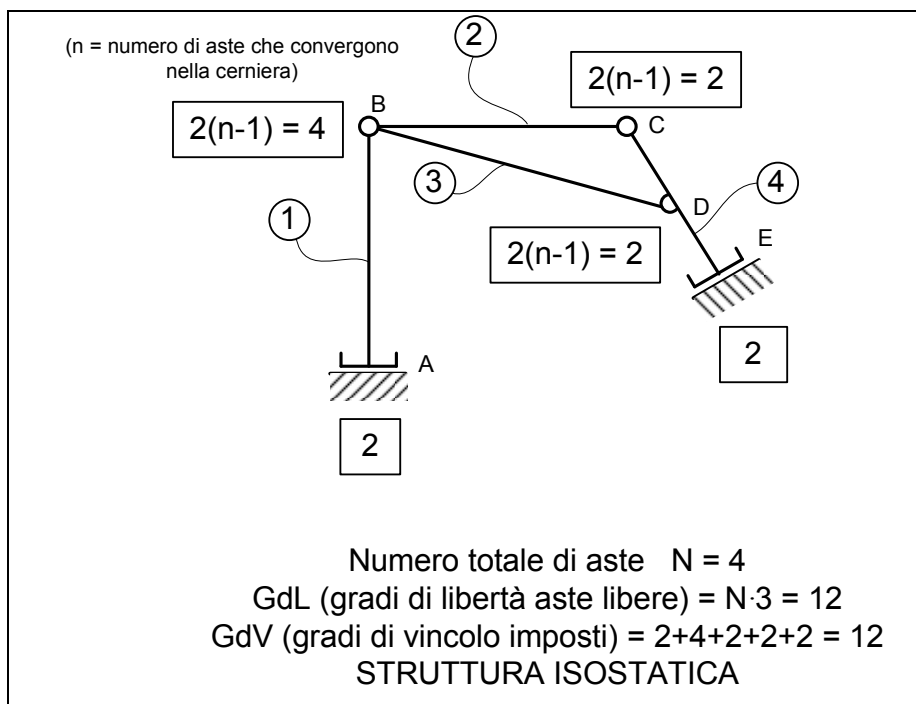
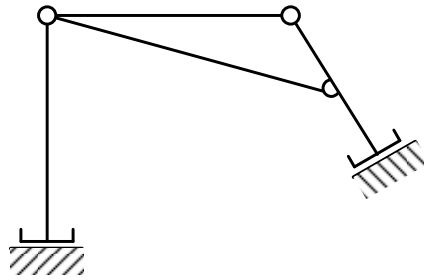
Prova intermedia 15 Novembre 2012



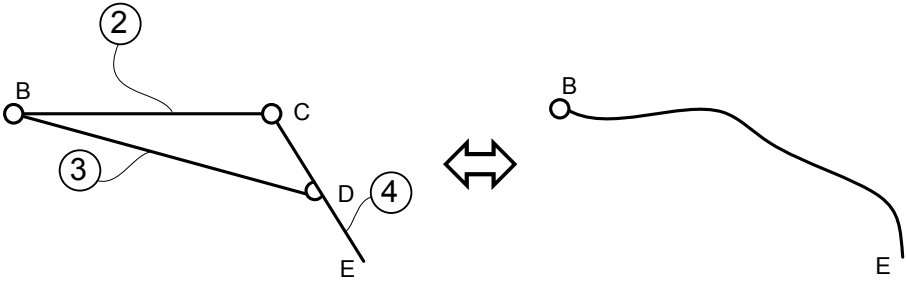
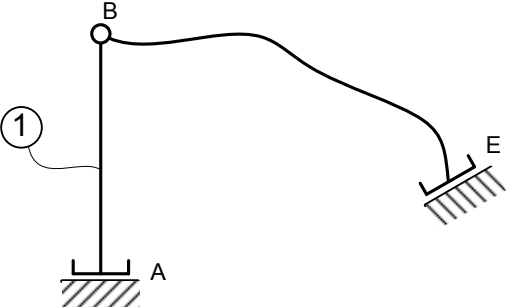
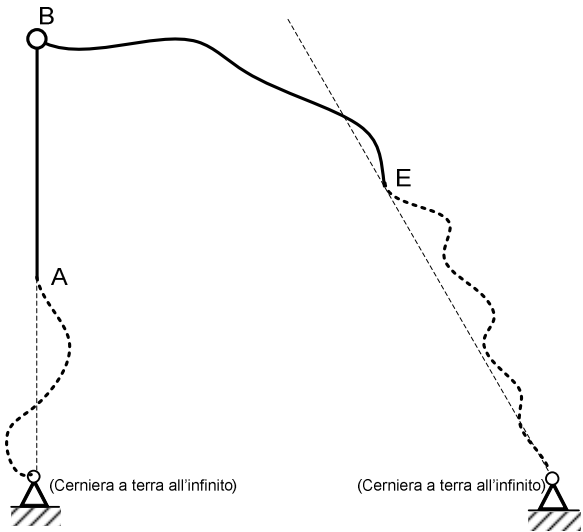
Numero totale di aste  $N = 3$   
 GdL (gradi di libertà aste libere)  $= N - 3 = 9$   
 GdV (gradi di vincolo imposti)  $= 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9$   
**STRUTTURA ISOSTATICA**

<p>La parte di struttura composta dalla sola asta 1, vincolata in A con una cerniera a terra ed in E con un carrello a terra. È NON labile (sistema cerniera + carrello ben posto). Tutti i suoi punti, incluso il punto D in cui è presente il pattino interno dell'asta 3, sono quindi fissi.</p>	
<p>La parte di struttura composta dalle aste 2 e 3 può quindi essere così schematizzata dal punto di vista delle possibilità di moto.</p>	
<p>I pattini a terra possono essere considerati equivalenti a due cerniere a terra poste all'infinito (nelle direzioni ortogonali alle direzioni di scorrimento dei pattini).  Il sistema composto dalle aste 2 e 3 è pertanto equivalente ad un arco a tre cerniere, con due cerniere a terra (poste all'infinito) ed una cerniera interna (cerniera C).  Poiché <u>le tre cerniere non sono allineate</u>, anche le aste 2 e 3 sono fisse.   La struttura completa (composta dalle aste 1, 2 e 3) è pertanto NON LABILE.</p>	

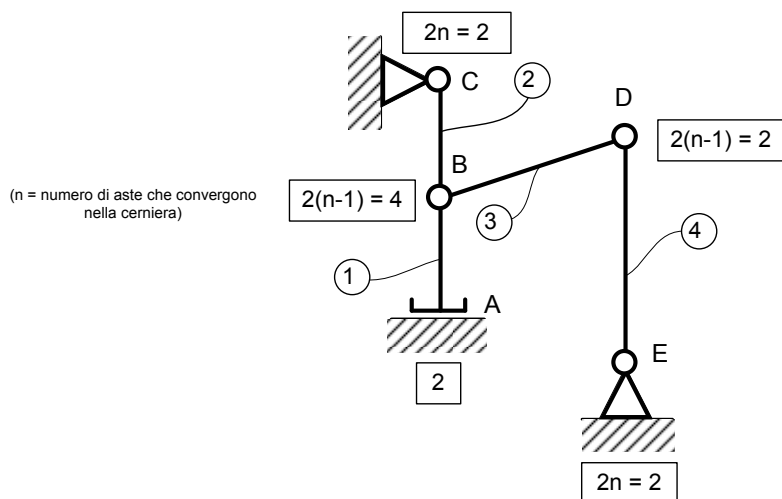
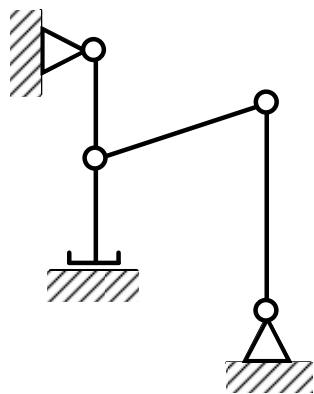
**Prova intermedia del 15 Novembre 2012**



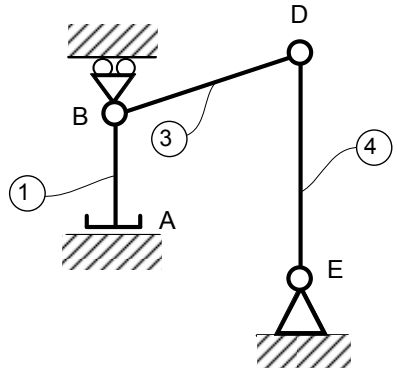
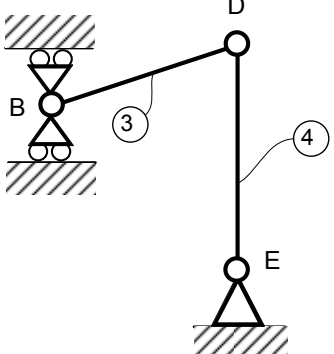
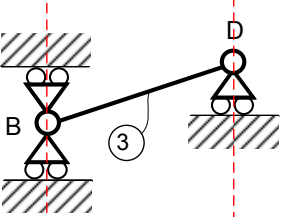


<p>La parte di struttura BCDE composta dalle aste 2,3 e 4 costituisce un arco a tre cerniere chiuso con le tre cerniere non allineate. L'insieme delle tre aste 2,3 e 4 può essere quindi considerato come un unico corpo rigido.</p>	
<p>Dal punto di vista delle possibilità di moto, la struttura può allora essere schematizzata nella maniera riportata a fianco, vincolata a terra con due pattini.</p>	
<p>Ricordando che un pattino è cinematicamente equivalente ad una cerniera all'infinito (nella direzione ortogonale al piano di scorrimento del pattino), il sistema è equivalente ad un arco a tre cerniere con due cerniere a terra (all'infinito) ed una cerniera interna (in B). Poiché le cerniere non sono allineate, il sistema, così come tutta la struttura, è <b>NON LABILE</b>.</p>	

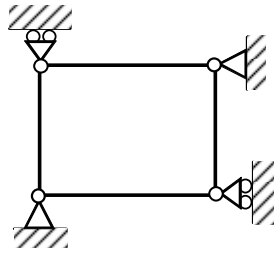
## Prova intermedia del 15 Novembre 2012



Numero totale di aste  $N = 4$   
 GdL (gradi di libertà aste libere)  $= N - 3 = 12$   
 GdV (gradi di vincolo imposti)  $= 2 + 4 + 2 + 2 + 2 = 12$   
**STRUTTURA ISOSTATICA**

<p>Il vincolo esercitato dall'asta CB sull'asta 3 può essere sostituito da un carrello scorrevole su un piano orizzontale.</p>	
<p>Il vincolo esercitato dall'asta AB sull'asta 3 può essere sostituito da un carrello scorrevole su un piano orizzontale (ricordando che il pattino è equivalente ad una cerniera all'infinito nella direzione ortogonale al piano di scorrimento del pattino)</p>	
<p>Il vincolo esercitato dall'asta ED sull'asta 3 può essere sostituito da un carrello scorrevole su un piano orizzontale. Si vede quindi che l'asta 3 può traslare in direzione orizzontale. La struttura è LABILE</p> <p>Il C.I.R. dell'asta 3 è il punto all'infinito in direzione verticale (e' l'intersezione delle rette tratteggiate di figura)</p> <p>Il C.I.R. dell'asta 1 è il punto all'infinito in direzione verticale (l'asta infatti può traslare in direzione orizzontale).</p> <p>Il C.I.R. dell'asta 2 è la cerniera C.</p> <p>Il C.I.R. dell'asta 4 è la cerniera E.</p>	 <p>Le rette si incontrano nel punto all'infinito in direzione verticale. Tale punto è il C.I.R. dell'asta 3</p>

**Prova intermedia del 23 Novembre 2011**



$2(n-1) = 2$   
 $n = \text{numero di aste che convergono nella cerniera}$

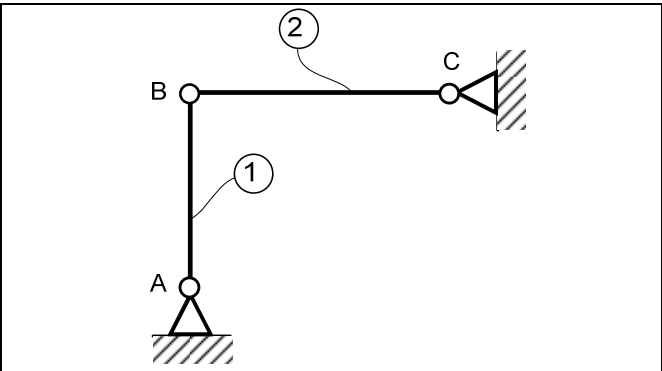
$2n = 4$

$2(n-1) = 2$

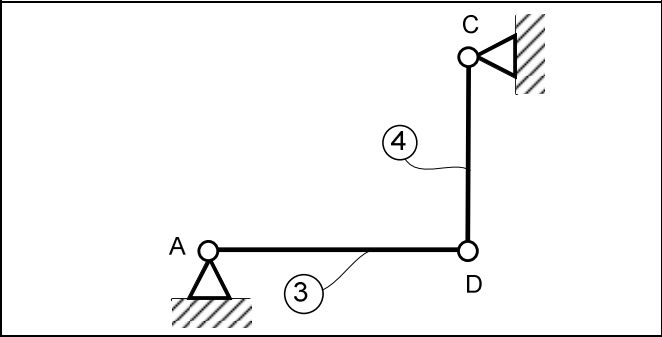
$2n = 4$

Numero totale di aste  $N = 4$   
 GdL (gradi di libertà aste libere)  $= N \cdot 3 = 12$   
 GdV (gradi di vincolo imposti)  $= 2+4+2+2 = 12$   
**STRUTTURA ISOSTATICA**

Il sistema costituito dalle aste 1 e 2, considerando le sole cerniere a terra in A e C, è un arco a tre cerniere non allineate (2 cerniere fisse in A e C; una cerniera interna in B) e quindi non labile. Tutti i punti delle aste 1 e 2 sono quindi fissi, inclusa la cerniera B.

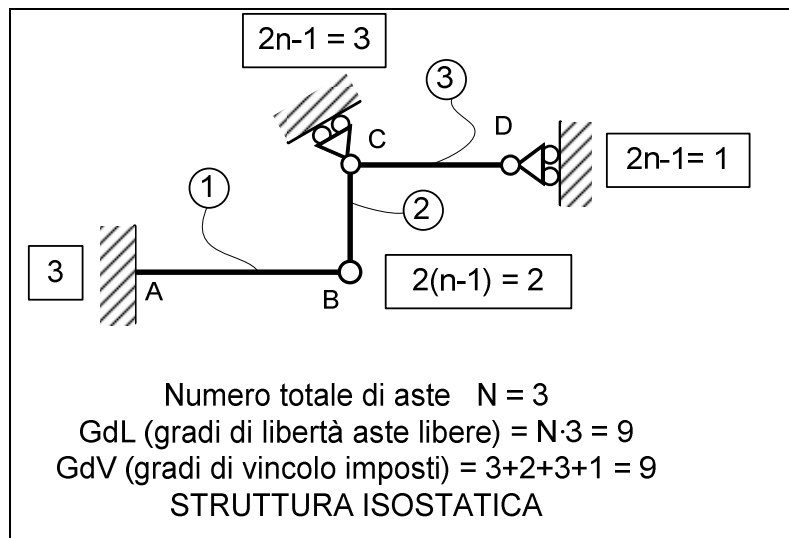
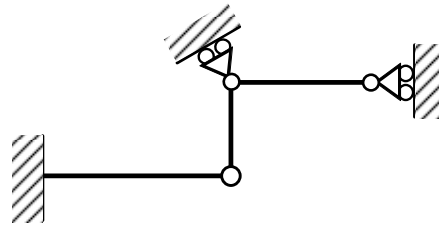


Il sistema costituito dalle aste 3 e 4, considerando le sole cerniere a terra in A e C, è un arco a tre cerniere non allineate (2 cerniere fisse in A e C; una cerniera interna in D) e quindi non labile.



Tutti i punti delle aste 1,2,3 e 4 sono fissi e pertanto la struttura e' **NON LABILE**.

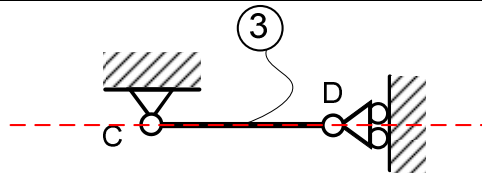
## Prova intermedia del 23 Novembre 2011



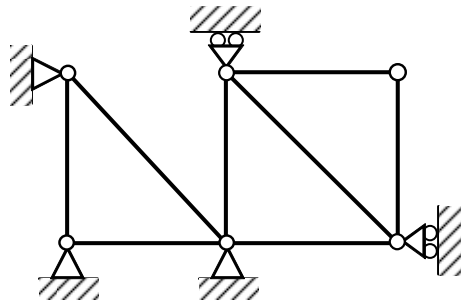
<p>L'asta 1 è incastrata in A; tutti i suoi punti (inclusa la cerniera B) sono quindi fissi.</p>	
<p>Dal punto di vista cinematico, la cerniera B può quindi essere considerata come una cerniera a terra. Anche l'asta 2 è dunque non labile essendo vincolata in B da una cerniera fissa ed in A da un carrello ben posto (la retta che rappresenta i possibili C.I.R. dell'asta 2 nel caso fosse vincolata dal solo carrello in C non passa per la cerniera B. Essendo l'asta 2 non labile anche il carrello C può essere considerato fisso (e quindi schematizzato come una cerniera fissa).</p>	

Le possibilità di moto dell'asta 3 sono allora quelle schematizzate nella figura riportata a fianco, e cioè quelle di un'asta vincolata mediante cerniera a terra in C e carrello in D. Il carrello in D ha tuttavia un piano di scorrimento tale che il luogo dei C.I.R. dell'asta 3, se questa fosse vincolata dal solo carrello in D, è una retta che passa per la cerniera C. L'asta 3 ammette come C.I.R. il punto C, cioè può ruotare, sia pure con rotazione infinitesima, attorno alla cerniera C.

La struttura è quindi **LABILE**, poiché, seppure le aste 1 e 2 non ammettano alcun C.I.R. (e quindi siano non labili), l'asta 3 può invece ruotare attorno alla cerniera del carrello in C (C.I.R. dell'asta 3).



Prova intermedia del 23 Novembre 2011



$2n-1 = 5$      $n = \text{numero di aste che convergono nella cerniera}$

$2n = 4$

$2n = 4$

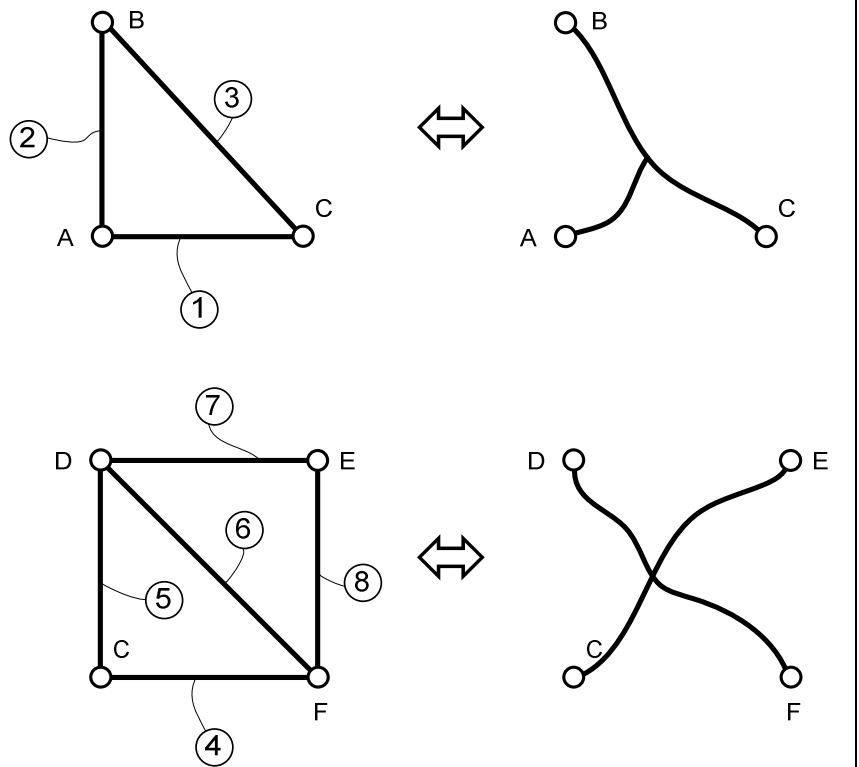
$2n = 8$

$2(n-1) = 2$

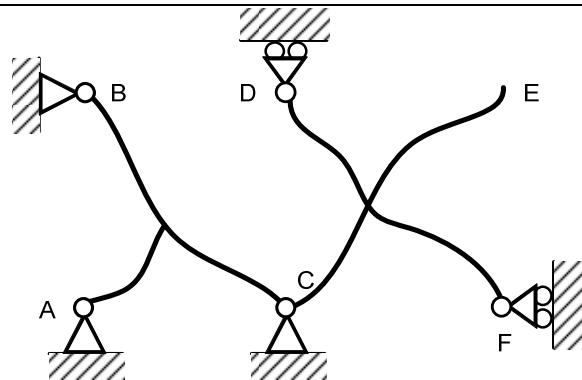
$2n-1 = 5$

Numero totale di aste  $N = 8$   
 GdL (gradi di libertà aste libere)  $= N \cdot 3 = 24$   
 GdV (gradi di vincolo imposti)  $= 4+4+8+5+2+5 = 28$   
**STRUTTURA 4 VOLTE IPERSTATICA**

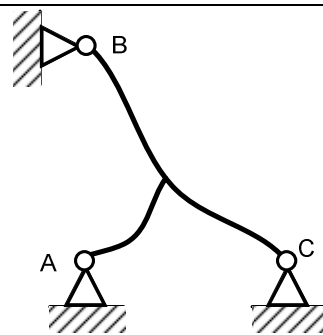
I sistemi costituiti dalle aste 1,2 e 3 e dalle aste 4,5,6,7, e 8 sono archi a tre cerniere chiusi o assemblaggi di archi a tre cerniere chiusi. Entrambi possono essere quindi considerati corpi rigidi (come nella schematizzazione riportata a lato).



La cinematica della struttura può essere quindi rappresentata dalla seguente struttura, costituita da due soli corpi rigidi (ABC e CDEF).



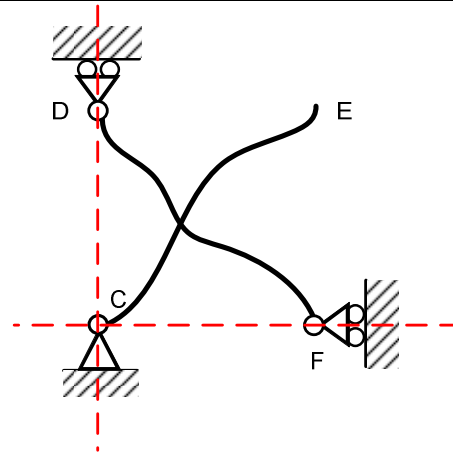
Il corpo rigido ABC è chiaramente non labile essendo vincolato da tre cerniere a terra.





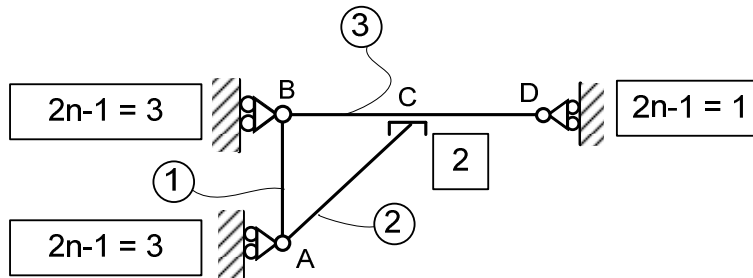
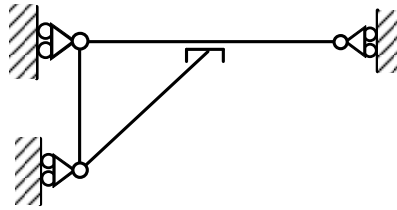
Il corpo rigido CDEF è vincolato a terra con una cerniera a terra in C e con due carrelli, rispettivamente in D ed F. Le rette dei possibili C.I.R. del corpo rigido CDEF, se esso fosse vincolato con il solo carrello in D (retta verticale tratteggiata) o con il solo carrello in F (retta orizzontale tratteggiata) passano per la cerniera C.

Il corpo rigido CDEF ammette quindi il punto C come C.I.R. quando si considera la presenza simultanea di tutti i vincoli. Ciò vuol dire che il corpo rigido CDEF può ruotare (con rotazioni infinitesime) intorno alla cerniera a terra C.



In conclusione, la struttura è LABILE. Le aste 1, 2 e 3 non ammettono alcun C.I.R. ( e quindi sono fisse). Le aste 4,5,6,7,8 ammettono un C.I.R. in C ( e quindi possono ruotare attorno alla cerniera a terra in C).

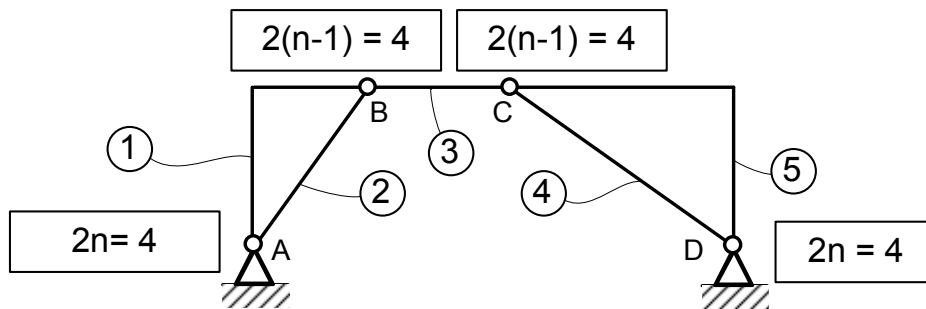
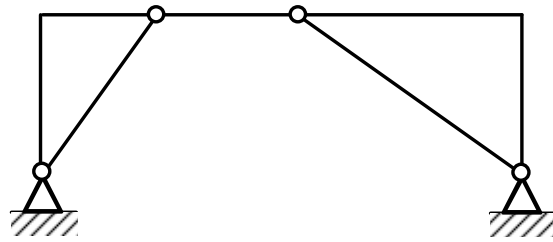
**Prova intermedia del 24 Novembre 2010**



Numero totale di aste  $N = 3$   
 GdL (gradi di libertà aste libere) =  $N \cdot 3 = 9$   
 GdV (gradi di vincolo imposti) =  $3+3+1+1 = 9$   
**STRUTTURA ISOSTATICA**

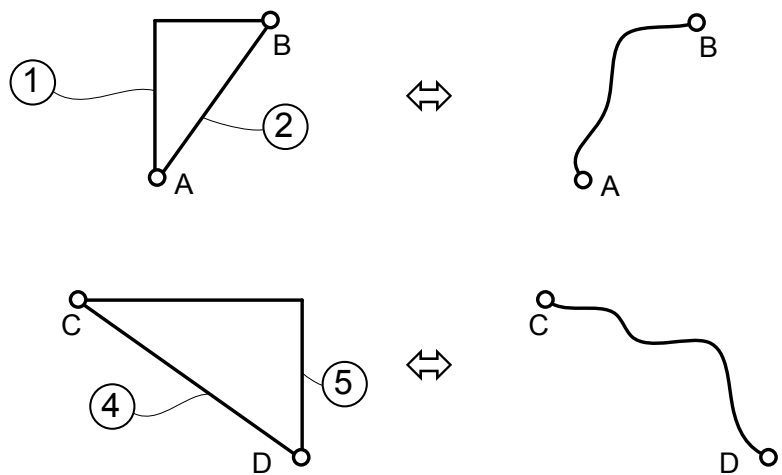
<p>Il sistema costituito dalle aste 1,2 e 3 è un arco a 3 cerniere chiuso, e pertanto si può considerare come un unico corpo rigido.</p>	
<p>Si nota immediatamente che la struttura è vincolata a terra esclusivamente da carrelli aventi piano di scorrimento verticale. La struttura può evidentemente traslare in direzione verticale. Il C.I.R. di tutte le aste è dunque il punto all'infinito in direzione orizzontale.  <b>LA STRUTTURA E' LABILE.</b></p>	<p>Le rette si incontrano nel punto all'infinito in direzione orizzontale</p>

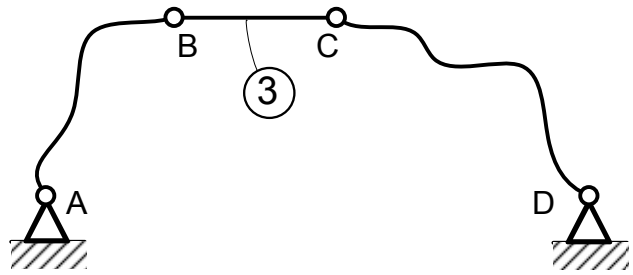
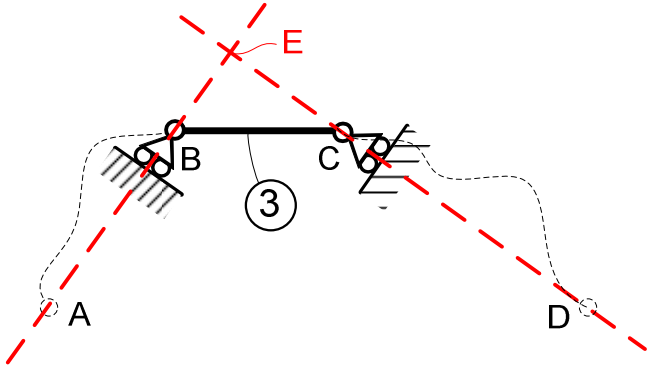
Prova intermedia del 24 Novembre 2010



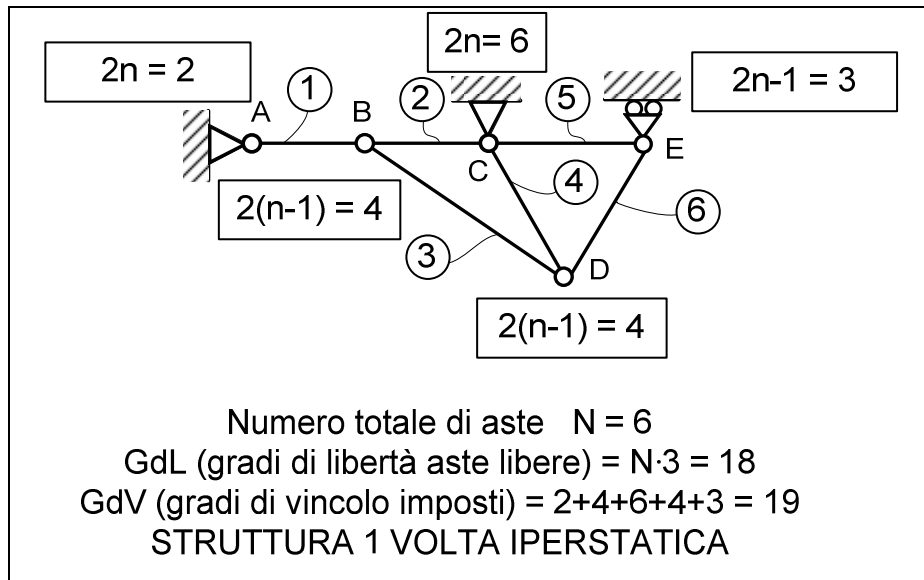
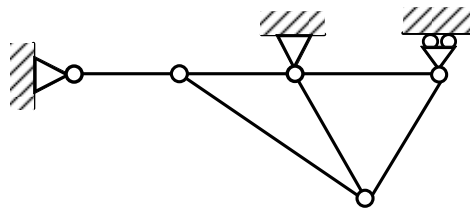
Numero totale di aste  $N = 5$   
 GdL (gradi di libertà aste libere)  $= N \cdot 3 = 15$   
 GdV (gradi di vincolo imposti)  $= 4+4+4+4 = 16$   
**STRUTTURA 1 VOLTA IPERSTATICA**

I sistemi di aste 1,2 e 4,5 sono ovviamente equivalenti a due corpi rigidi.



<p>Dal punto di vista cinematico, la struttura studiata è dunque equivalente alla seguente:</p>	
<p>La quale è a sua volta equivalente alla seguente struttura (le aste AB e DC possono essere sostituite da due carrelli a terra: uno in B, avente piano di scorrimento perpendicolare alla retta AB, l'altro in C, avente piano di scorrimento perpendicolare alla retta CD).</p>	
<p>L'asta 3 può dunque ruotare attorno al punto E intersezione delle rette tratteggiate di figura. La struttura è quindi <b>LABILE</b>. Il C.I.R. dell'asta 1 è la cerniera A; il C.I.R. dell'asta 2 è la cerniera D; il C.I.R. dell'asta 3 è il punto E.</p>	

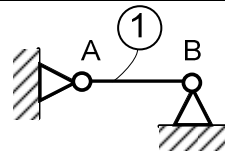
**Prova intermedia del 24 Novembre 2010**



<p>Il sistema di aste 2,3,4,5,6 è composto da un assemblaggio di due archi a tre cerniere chiusi (BDC + CED) e pertanto può essere visto come un unico corpo rigido.</p>	
<p>La struttura può dunque essere schematizzata come nello schema riportato a fianco.</p>	
<p>Le possibilità di moto del corpo rigido BCDE sono le stesse della struttura seguente, dove il vincolo imposto dall'asta AB al corpo rigido ABCD è stato sostituito da un carrello in B avente piano di scorrimento perpendicolare alla direzione congiungente i punti A e B.</p>	

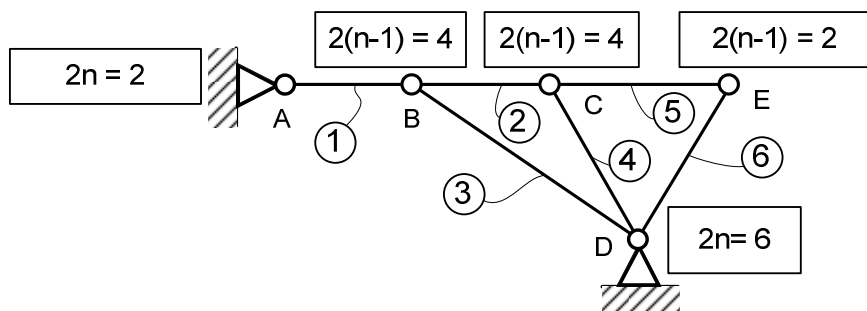
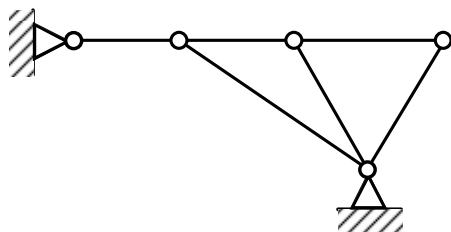
Il corpo rigido BCDE è vincolato a terra con una cerniera in C e due carrelli (in B ed in E). E' evidente come i tre vincoli non ammettano l'esistenza di un possibile C.I.R. del corpo rigido BCDE. Il sistema riportato a fianco è dunque non labile, e tutti i suoi punti sono fissi (incluso il punto B).

Poiché la cerniera B è sicuramente fissa, essa può essere vista come una cerniera a terra. Anche l'asta 1 è dunque non labile.



Poiché nessuna asta ammette alcun C.I.R. la struttura è **NON LABILE**.

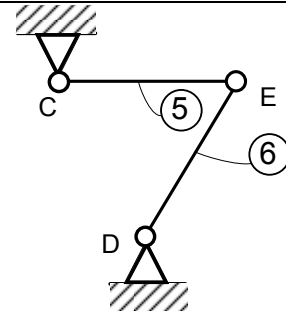
## Prova intermedia del 14 Novembre 2009



Numero totale di aste  $N = 6$   
 GdL (gradi di libertà aste libere)  $= N \cdot 3 = 18$   
 GdV (gradi di vincolo imposti)  $= 2+4+4+6+2 = 18$   
**STRUTTURA ISOSTATICA**

<p>La parte di struttura composta dalle aste 1 e 3 vincolata a terra in A e D è un arco a tre cerniere non labile, in quanto costituito da due aste vincolate da due cerniere a terra (in A ed in D) e da una cerniera interna (in B) non allineate. Tutti i suoi punti sono pertanto fissi (inclusa la cerniera interna B).</p>	
<p>Possiamo dunque considerare il sistema costituito dalla aste 2 e 4 un ulteriore arco a tre cerniere non labile, in quanto vincolato mediante due cerniere fisse (in B ed in D) ed una interna (in C) non allineate. Tutti i suoi punti sono pertanto fissi (inclusa la cerniera interna C).</p>	

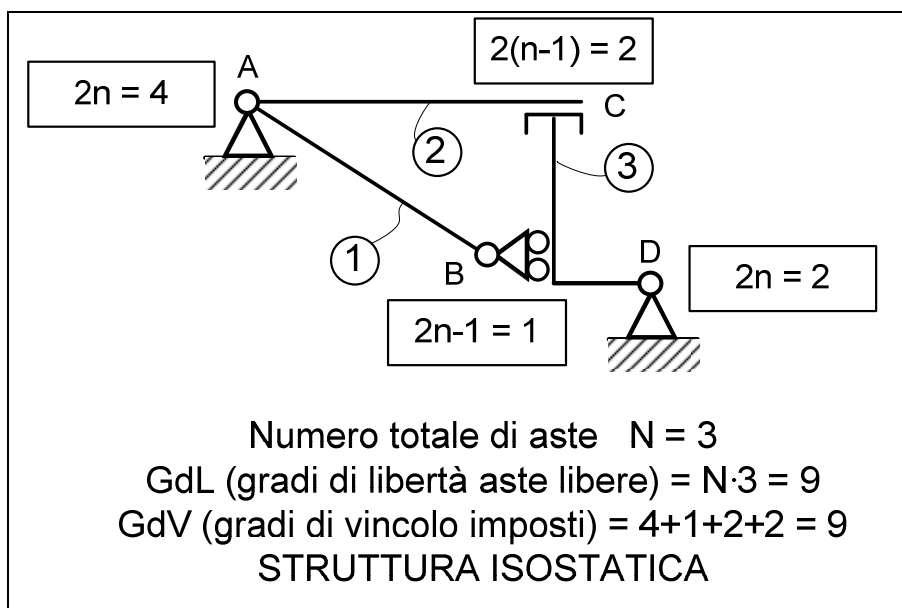
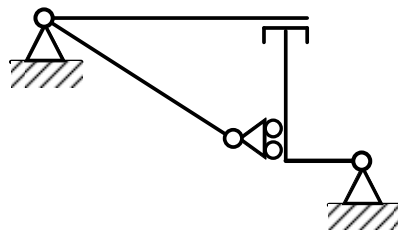
Possiamo infine considerare anche il sistema costituito dalla aste 5 e 6 un ulteriore arco a tre cerniere non labile, in quanto vincolato mediante due cerniere fisse (in C ed in D) ed una interna (in E) non allineate. Tutti i suoi punti sono pertanto fissi.



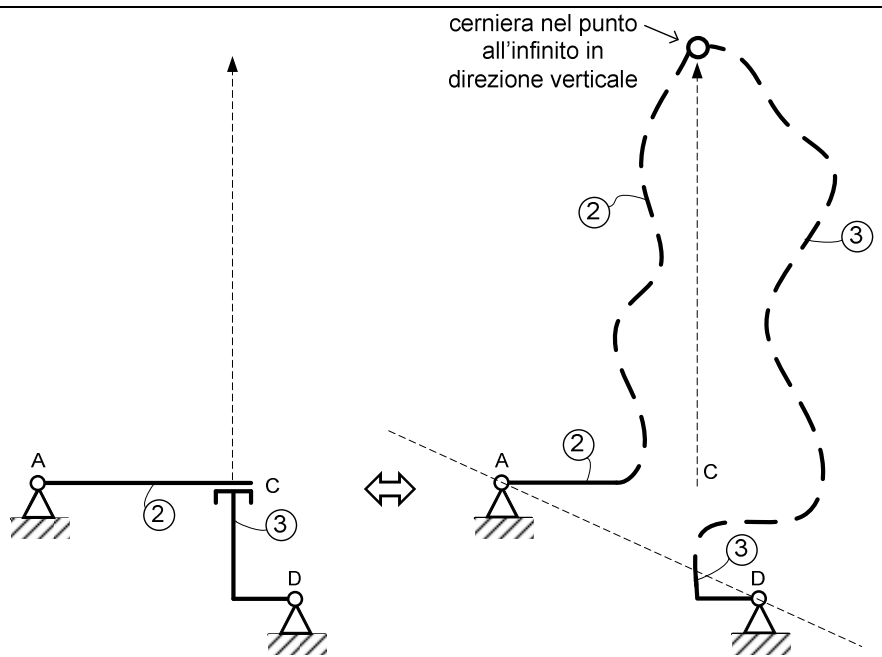
Poiché nessuna asta ammette alcun C.I.R. la struttura è NON LABILE.



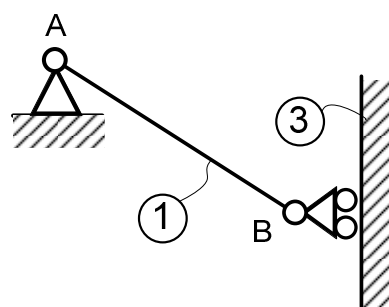
Prova intermedia del 14 Novembre 2009



La parte di struttura composta dalle aste 2 e 3 e vincolata a terra in A ed in D è un arco a tre cerniere non labile, in quanto costituito da due aste vincolate da due cerniere a terra (in A ed in D) e da una cerniera interna (pattino C, assimilabile ad una cerniera all'infinito nella direzione ortogonale al piano di scorrimento del carrello). Poiché le tre cerniere (A,D ed il punto all'infinito in direzione verticale) non sono allineate, l'arco a tre cerniere è non labile, e tutti i suoi punti sono fissi (inclusa l'asta 3 su cui scorre il carrello B),

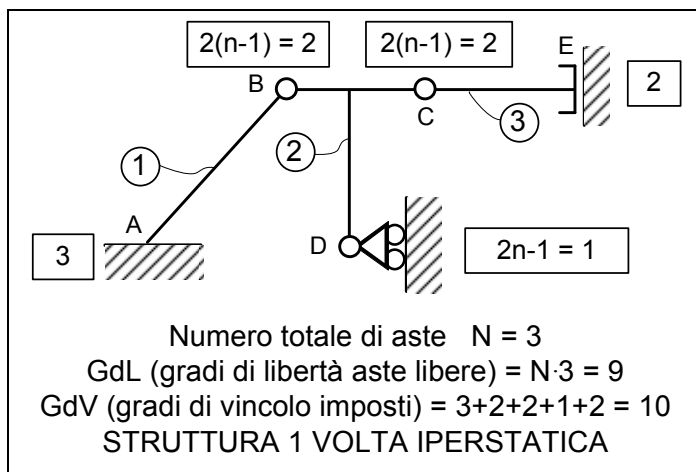
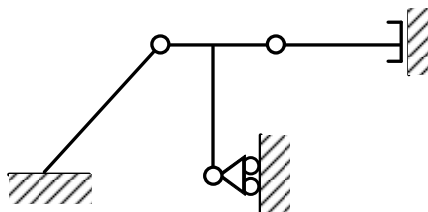


L'asta 1 può essere dunque considerata vincolata a terra non solo con la cerniera in A ma anche con il carrello in B (poiché è stato dimostrato precedentemente che l'asta 3 è sicuramente fissa).

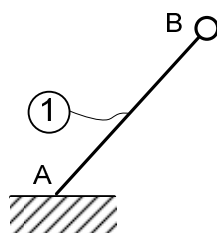


Poiché nessuna asta ammette alcun C.I.R. la struttura è NON LABILE.

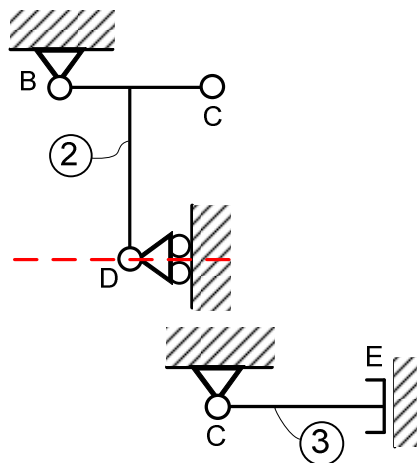
## Prova intermedia del 14 Novembre 2009



L'asta 1 è vincolata a terra con un incastro ed è quindi non labile; tutti i suoi punti sono quindi fissi, inclusa l'estremità B.



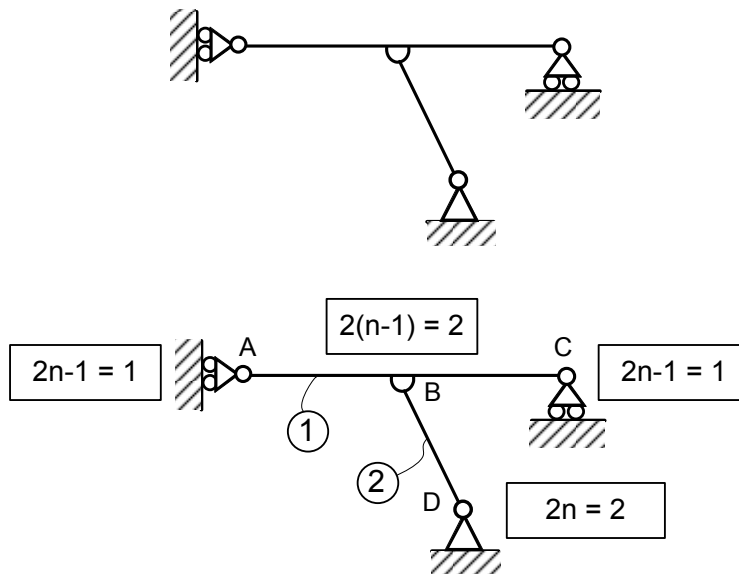
L'asta 2 può allora essere considerata come vincolata con una cerniera a terra in B e con un carrello a terra in D. Poiché il carrello è ben posto (la retta tratteggiata non passa per la cerniera fissa B), anche l'asta 2 è quindi non labile; tutti i suoi punti sono quindi fissi, inclusa l'estremità C.



L'asta 3 può infine essere considerata come vincolata con una cerniera fissa in C e con un pattino in E. Si tratta quindi sicuramente di un sistema non labile.

Poiché nessuna delle tre aste ammette uno (o più) C.I.R. la struttura è **NON LABILE**.

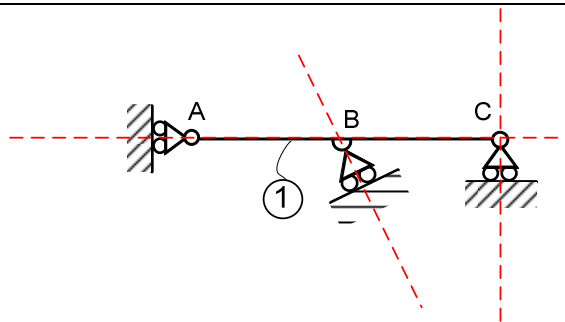
**Prova intermedia del 12 Novembre 2008**



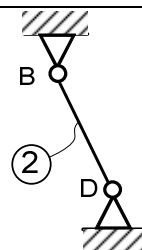
Numero totale di aste  $N = 2$   
 GdL (gradi di libertà aste libere) =  $N \cdot 3 = 6$   
 GdV (gradi di vincolo imposti) =  $1+2+2+1 = 6$   
**STRUTTURA ISOSTATICA**

<p>Il vincolo imposto dall'asta 2 alle possibilità di moto dell'asta 1 è equivalente a quello imposto da un carrello a terra in B avente piano di scorrimento perpendicolare alla retta congiungente le cerniere B e D.</p>	
---	--

L'asta 1 è dunque vincolata da tre carrelli a terra; i luoghi dei possibili C.I.R. dell'asta 1 se si considera vincolata da un solo carrello alla volta (rispettivamente in A, o in B, o in C) sono le tre rette tratteggiate di figura. Poiché le rette non hanno punti in comune, non esiste alcun C.I.R. per l'asta 1 vincolata contemporaneamente dai tre carrelli. L'asta 1 è quindi non labile e tutti i suoi punti sono fissi, incluso il punto B.

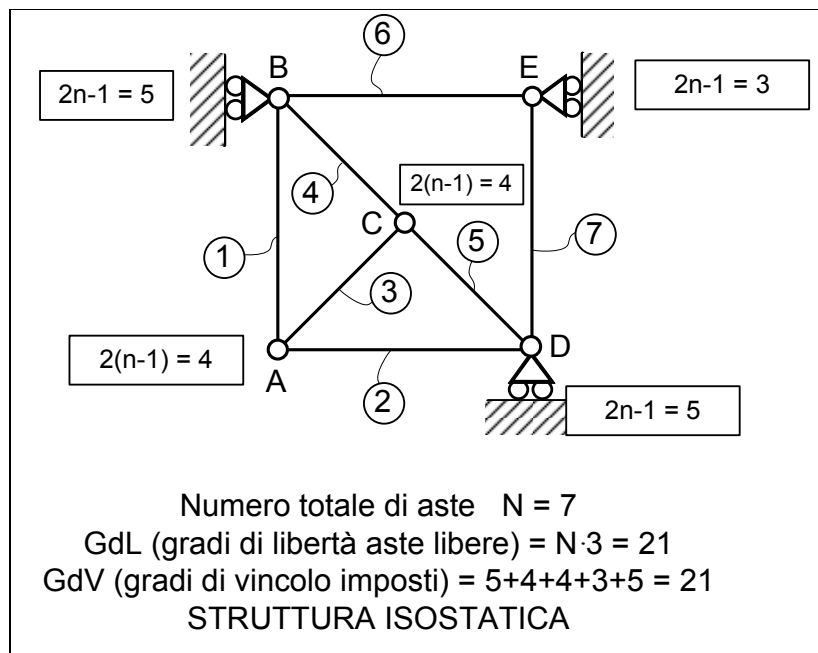
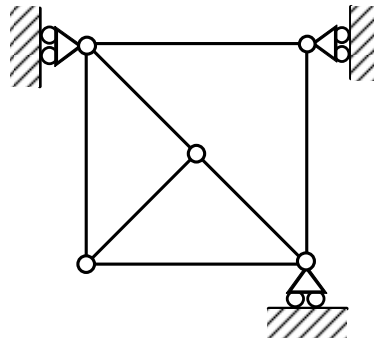


Di conseguenza, anche l'asta 2 è non labile, in quanto vincolata da una cerniera a terra in D e da una cerniera fissa in B.

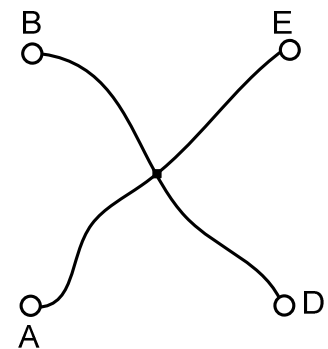
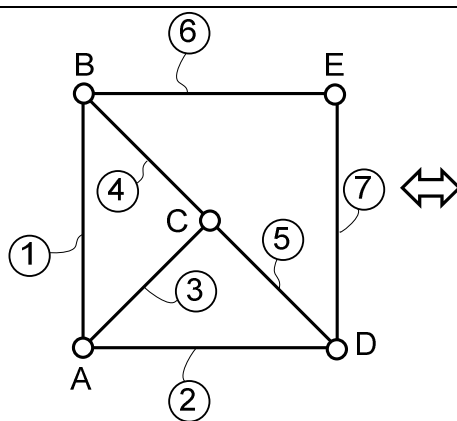


Poiché nessuna delle tre aste ammette uno (o più) C.I.R. la struttura è NON LABILE.

Prova intermedia del 12 Novembre 2008

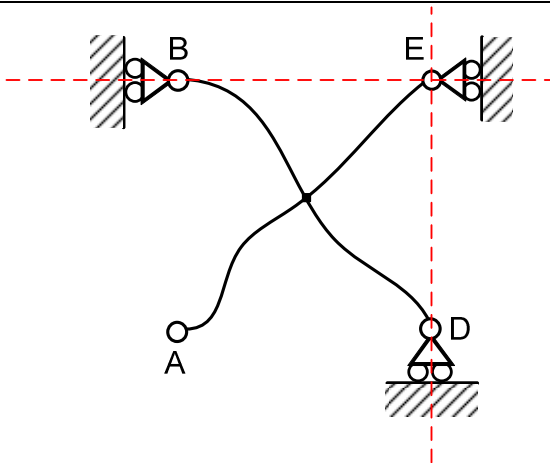


Il sistema composto dalle aste 1,2,3,4,5,6 (tutte le aste) può essere considerato un unico corpo rigido, in quanto costituito dalla sovrapposizione di più archi a tre cerniere chiusi (p.e. A-B-C + A-C-D + B-D-E).



Il sistema è quindi schematizzabile come un unico corpo rigido vincolato a terra da tre carrelli (in B, E e D).

Le rette tratteggiate di figura rappresentano i luoghi dei C.I.R. del corpo rigido nel caso sia applicato un vincolo alla volta (due rette, quelle relative ai carrelli B ed E sono coincidenti) hanno il punto E in comune; il corpo rigido può dunque ruotare attorno alla cerniera del carrello in E.



La struttura è LABILE; tutte la aste hanno il punto E come possibile C.I.R.