Esercitazioni 3 - Geometria delle aree

In questa esercitazione si studiano alcune aree a geometria complessa, che pero' possono riguardarsi come l'unione di aree a geometria piu' semplice. In sostanza, si applicano i risultati ricavati per le sezioni rettangolari, triangolari, circolari ed ellittiche, assieme alle proprieta' distributiva dei momenti statici e dei momenti di inerzia:

Assegnate N aree $A_1, A_2, \ldots A_n$, il momento statico dell'unione di queste aree e' la somma dei momenti statici delle singole aree, ed analoga proprieta' vale per i momenti del secondo ordine:

$$S\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} S(A_i) \tag{1}$$

$$I\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} I(A_i) \tag{2}$$

Esercizio n.1: la sezione ad L

Calcolare le coordinate del baricentro ed i momenti di inerzia della sezione ad L di Figura 1.

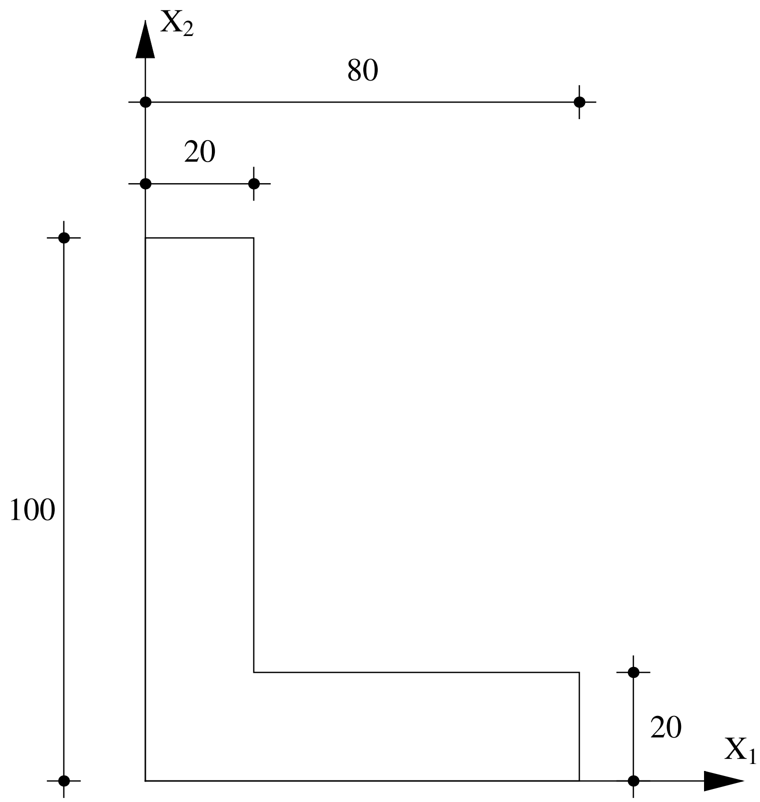
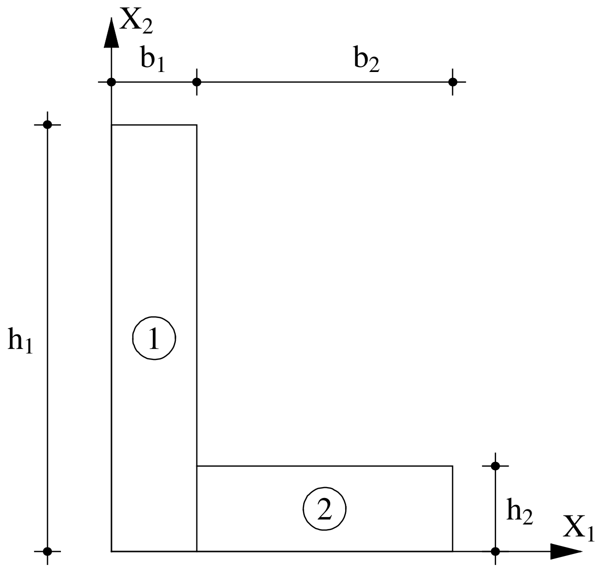


Figura 1 - La sezione ad L

■ Soluzione

Si suddivide la sezione nei due rettangoli di Figura 2, di base b_1= 20cm e b_2= 60cm ed altezza h_1=100cm ed h_2=20cm, rispettivamente. Tale scelta e' ovviamente arbitraria, nel senso che altre scelte sarebbero altrettanto legittime. L'area della sezione e' fornita da:

$$A = A_1 + A_2 = b_1 h_1 + b_2 h_2 = 3200\ cm^2 \tag{3}$$



Per calcolare il baricentro, si calcolino i due momenti statici rispetto ai due assi di Figura:

$$S_1 = S_1^{(1)} + S_1^{(2)} = A_1 x_{2G}^{(1)} + A_2 x_{2G}^{(2)} = b_1 h_1 \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \frac{h_2}{2} = 112000\ cm^3 \tag{4}$$

$$S_2 = S_2^{(1)} + S_2^{(2)} = A_1 x_{1G}^{(1)} + A_2 x_{1G}^{(2)} = b_1 h_1 \frac{b_1}{2} + b_2 h_2 \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right) = 80000\ cm^3 \tag{5}$$

da cui le coordinate del baricentro dell'intera figura:

$$x_{1G} = \frac{S_2}{A} = \frac{b_1 h_1 \frac{b_1}{2} + b_2 h_2 \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right)}{b_1 h_1 + b_2 h_2} = \frac{80000}{3200} = 25\ cm \tag{6}$$

$$x_{2G} = \frac{S_1}{A} = \frac{b_1 h_1 \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \frac{h_2}{2}}{b_1 h_1 + b_2 h_2} = \frac{112000}{3200} = 35\ cm \tag{7}$$

Per calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi di Figura, si puo' scrivere:

$$I_{11} = I_{11}^{(1)} + I_{11}^{(2)} = \frac{b_1 h_1^3}{3} + \frac{b_2 h_2^3}{3} = 6.82667 \times 10^6\ cm^4 \tag{8}$$

$$I_{22} = I_{22}^{(1)} + I_{22}^{'(2)} + A_2 \left(x_{1G}^{(2)}\right)^2 = \frac{b_1^3 h_1}{3} + \frac{b_2^3 h_2}{12} + b_2 h_2 \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right)^2 = 3.62667 \times 10^6\ cm^4 \tag{9}$$

$$I_{12} = A_1\, x_{1G}^{(1)}\, x_{2G}^{(1)} + A_2\, x_{1G}^{(2)}\, x_{2G}^{(2)} = b_1 h_1 \frac{b_1}{2}\frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \frac{h_2}{2}\left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right) = 1600000\ \text{cm}^4 \tag{10}$$

Si osservi che nel calcolo di I_{22} si e' calcolato l'apporto del secondo rettangolo come somma del momento di inerzia rispetto all'asse verticale passante per il suo baricentro, e poi si e' aggiunto il momento di trasporto secondo Huygens, mentre nel caso dei momenti centrifughi si e' calcolato per ambedue i rettangoli il solo momento di trasporto, poiche' il momento centrifugo baricentrico e' nullo.

In riferimento agli assi baricentrici paralleli alla coppia di assi X_1 ed X_2 si ha, per la legge di Huygens:

$$I'_{11} = I_{11} - A\, x_{2G}^2 = 6.82667\times 10^6 - 3200\ 35^2 = 2.90667\times 10^6\ \text{cm}^4 \tag{11}$$

$$I'_{22} = I_{22} - A\, x_{1G}^2 = 3.62667\times 10^6 - 3200\ 25^2 = 1.62667\times 10^6\ \text{cm}^4 \tag{12}$$

$$I'_{12} = I_{12} - A\, x_{1G}\, x_{2G} = 1600000 - 3200 \cdot 25 \cdot 35 = -1200000\ \text{cm}^4 \tag{13}$$

Infine, per ottenere i momenti d'inerzia centrali occorre ruotare la coppia di assi di un angolo ϕ^* pari a:

$$\phi^* = \frac{1}{2}\,\text{ArcTan}\left(\frac{2\, I'_{12}}{I'_{22} - I'_{11}}\right) = \frac{1}{2}\,\text{ArcTan}\left(\frac{2\, I'_{12}}{I'_{22} - I'_{11}}\right) = 0.54042 \tag{14}$$

pari a 30.96 gradi. I momenti d'inerzia richiesti valgono:

$$I^r_{22} = I'_{11}\,\text{Sin}^2\phi^* + 2\, I'_{12}\,\text{Sin}\,\phi^*\,\text{Cos}\phi^* + I'_{22}\,\text{Cos}^2\phi^* = 906667\ \text{cm}^4 \tag{15}$$

$$I^r_{11} = I'_{11}\,\text{Cos}^2\phi^* - 2\, I'_{12}\,\text{Sin}\,\phi^*\,\text{Cos}\phi^* + I'_{22}\,\text{Sin}^2\phi^* = 3.62667\times 10^6\ \text{cm}^4 \tag{16}$$

$$I^r_{12} = (\,I'_{11} - I'_{22})\,\text{Sin}\,\phi^*\,\text{Cos}\phi^* + I'_{12}\,(\text{Cos}^2\phi^* - \text{Sin}^2\phi^*) = 0 \tag{17}$$

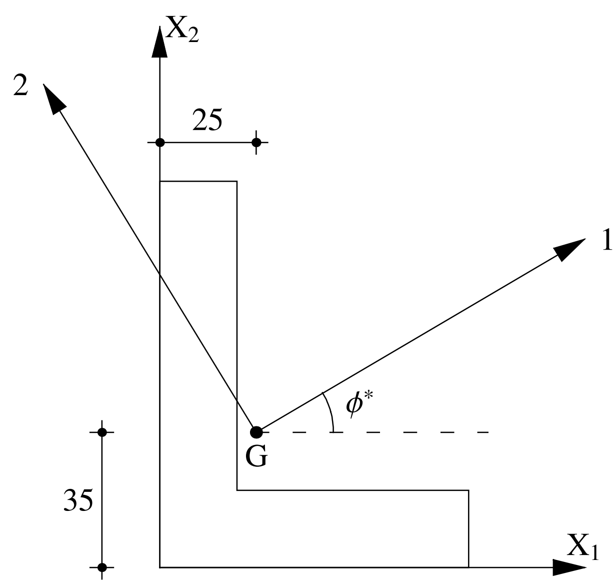


Figura 3 - Baricentro ed assi centrali di inerzia del profilato ad L

Esercizio n.2 - Una travata da ponte

Calcolare le coordinate del baricentro ed i momenti di inerzia della sezione aperta di Figura 4.

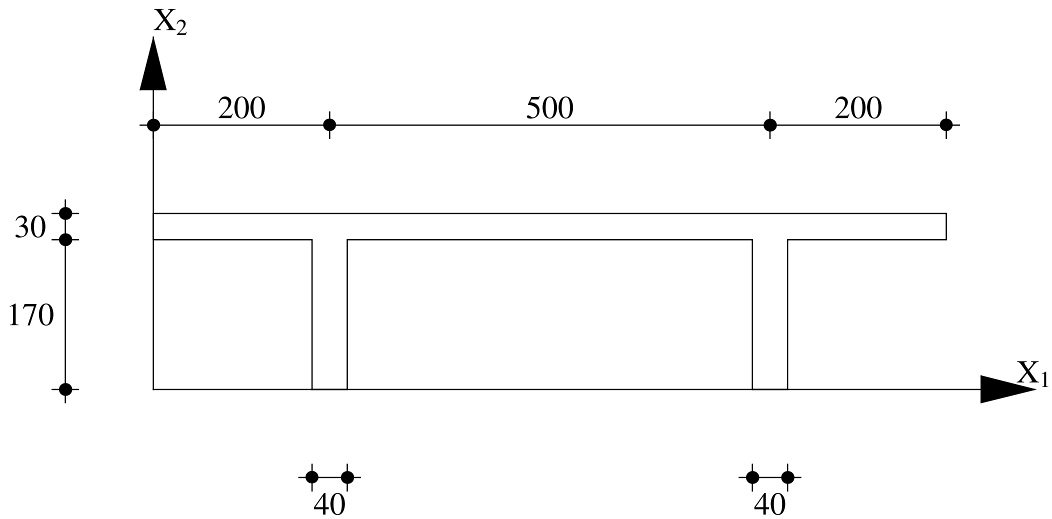


Figura 4 - Una sezione da ponte aperta

■ Soluzione

Si consideri la sezione come composta da un rettangolo di base 9 metri ed altezza 2 metri, a cui vanno sottratti i tre rettangoli "interni". In quest'ottica si ha un'area:

$$A = 900 \cdot 200 - 180 \cdot 170 - 460 \cdot 170 - 180 \cdot 170 = 40600\ \text{cm}^2 \tag{18}$$

ed un momento statico rispetto all'asse orizzontale pari a:

$$S_1 = (900 \cdot 200)\,100 - (180 \cdot 170)\,\frac{170}{2} - (460 \cdot 170)\,\frac{170}{2} - (180 \cdot 170)\,\frac{170}{2} = 6151000\ \text{cm}^3 \tag{19}$$

Il baricentro della sezione e' quindi posto alle ascisse:

$$x_{1G} = 450\ \text{cm} \qquad x_{2G} = \frac{6151000}{40600} = 151.5\ \text{cm} \tag{20}$$

Ovviamente, la prima coordinata discende da proprieta' di simmetria.

I momenti di inerzia rispetto agli stessi assi si calcolano come:

$$I_{11} = \frac{900 \cdot 200^3}{3} - \frac{180 \cdot 170^3}{3} - \frac{460 \cdot 170^3}{3} - \frac{180 \cdot 170^3}{3} = 1.05711 \times 10^9\ \text{cm}^4 \tag{21}$$

$$I_{22} = \frac{900^3 \cdot 200}{3} - \frac{180^3 \cdot 170}{3} - \frac{460^3 \cdot 170}{12} - 460 \cdot 170 \cdot 450^2 - \frac{180^3 \cdot 170}{12} - 180 \cdot 170 \cdot 810^2 = 1.08958 \times 10^{10} \text{ cm}^4 \tag{22}$$

$$I_{12} = \frac{900^2 \cdot 200^2}{4} - \frac{180^2 \cdot 170^2}{4} - 460 \cdot 170 \cdot 450 \frac{170}{2} - 180 \cdot 170 \cdot 810 \frac{170}{2} = 2767950000 \text{ cm}^4 \tag{23}$$

Per ricavare i momenti di inerzia baricentrici, si puo' utilizzare il teorema di Huygens

$$I'_{11} = I_{11} - A\, x_{1G}^2 = 1.05711 \times 10^9 - 40600\ 151.5^2 = 1.25252 \times 10^8 \text{ cm}^4 \tag{24}$$

$$I_{22} = I_{22} - A\, x_{2G}^2 = 1.08958 \times 10^{10} - 40600\ 450^2 = 2.67431 \times 10^9 \text{ cm}^4 \tag{25}$$

$$I_{12} = I_{12} - A\, x_{1G}\, x_{2G} = 2767950000 - 40600 \cdot \frac{6151000}{40600} \cdot 450 = 0 \tag{26}$$

■ Calcoli

Grafici