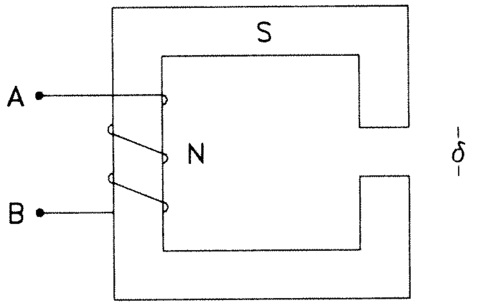
## IV.11 Circuiti magnetici

**Esercizio 85**

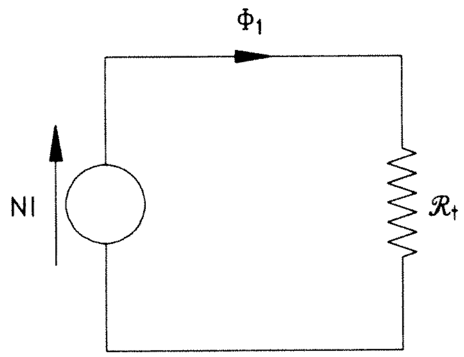
In fig. (a) è indicato lo schema di un bipolo costituito da un solenoide di $N$ spire avvolte su un circuito magnetico costituito da un tratto in ferro e da un traferro. Indicando con $S$ l'area della sezione retta del tratto in ferro e con $\delta$ lo spessore del traferro, calcolare l'induttanza $L$ del bipolo $A$, $B$ quando si trascurino la riluttanza del tratto in ferro ($\mu \rightarrow \infty$) e i flussi "dispersi".




(a)

### Risposta

Nelle ipotesi semplificative fatte, il circuito elettrico equivalente, ai fini della determinazione del flusso $\Phi_1$ attraverso una generica sezione del circuito magnetico, è quello indicato in fig. (b), nel quale la f.m.m. $N\,I$ è raffigurata come un generatore di tensione, il flusso $\Phi_1$ è rappresentato dalla corrente circolante nel circuito, e la riluttanza $\mathcal{R}_t$ offerta dal traferro è rappresentata da una resistenza.




(b)

Essendo: $\mathcal{R}_t = \dfrac{\delta}{\mu_0\, S}$, risulta subito:

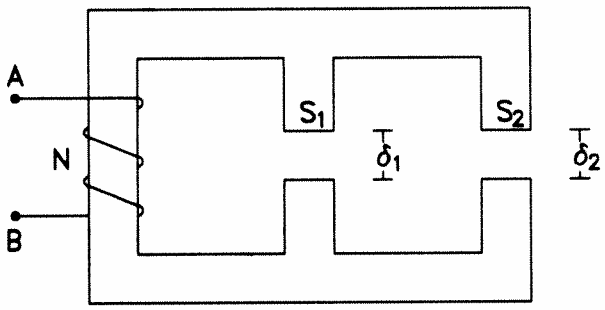
$$\Phi_1 = \frac{N\,I}{\mathcal{R}_t} = \frac{N\,I}{\delta}\ \mu_0\, S\,.$$

Il flusso $\Phi_N$ concatenato con l'intero avvolgimento di $N$ spire è:

$$\Phi_N = N\,\Phi_1 = \frac{N^2}{\delta}\ \mu_0\, S\,,$$

e l'induttanza $L$ è quindi: $L = \dfrac{\Phi_N}{I} = \dfrac{N^2}{\mathcal{R}_t} = \mu_0\ \dfrac{S}{\delta}\ N^2\,.$

**Esercizio 86**



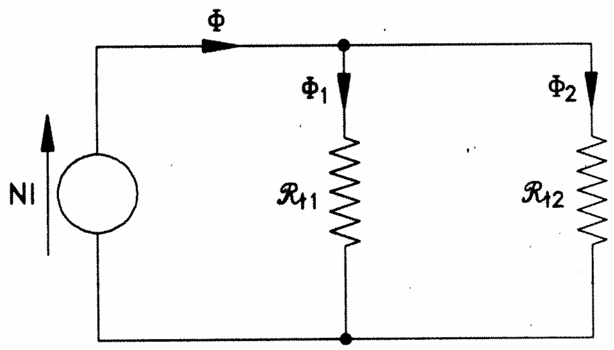
(a)

In fig. (a) è indicato lo schema di un bipolo costituito da un solenoide di $N$ spire avvolte su un circuito magnetico; i dati geometrici del circuito magnetico sono indicati in fig. (a). Calcolare l'induttanza $L$ del bipolo $A$, $B$ quando si trascurino le riluttanze dei tratti in ferro e i flussi dispersi.

## Risposta

Il circuito elettrico equivalente, ai fini del calcolo dei flussi nelle diverse sezioni del circuito magnetico, è quello indicato in fig. (b), con:

$$\mathcal{R}_{t1} = \frac{\delta_1}{\mu_0 S_1}, \; \mathcal{R}_{t2} = \frac{\delta_2}{\mu_0 S_2}.$$



(b)

Si ha, dunque:

$$\Phi_1 = \frac{NI}{\mathcal{R}_{t1}} = \frac{NI}{\delta_1} \mu_0 S_1 ,$$

$$\Phi_2 = \frac{NI}{\mathcal{R}_{t2}} = \frac{NI}{\delta_2} \mu_0 S_2 ,$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \mu_0 N I \left( \frac{S_1}{\delta_1} + \frac{S_2}{\delta_2} \right).$$

Il flusso $\Phi_N$ concatenato con l'intero avvolgimento di $N$ spire è:

$$\Phi_N = N \Phi ,$$

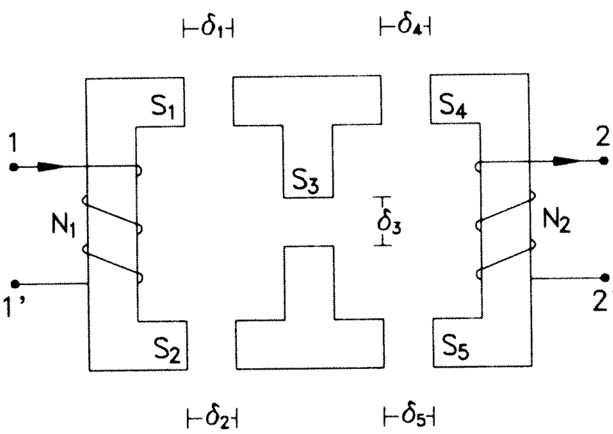
e l'induttanza $L$ è, quindi:

$$L = \frac{\Phi_N}{I} = \mu_0 N^2 \left( \frac{S_1}{\delta_1} + \frac{S_2}{\delta_2} \right) = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{te}},$$

avendo indicato con $\mathcal{R}_{te}$ la riluttanza equivalente del "parallelo" tra $\mathcal{R}_{t1}$ e $\mathcal{R}_{t2}$:

$$\mathcal{R}_{te} = \frac{\mathcal{R}_{t1} \cdot \mathcal{R}_{t2}}{\mathcal{R}_{t1} + \mathcal{R}_{t2}}.$$

## Esercizio 87




(a)

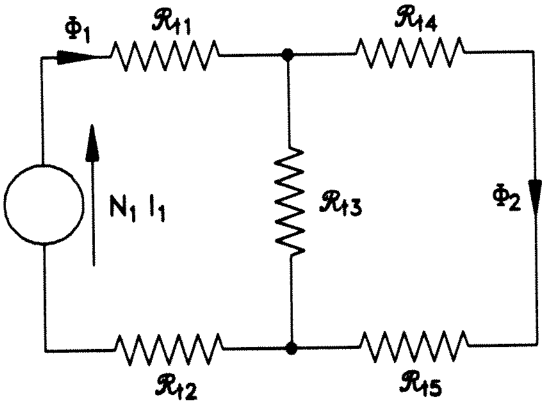
In fig. (a) è indicato lo schema di due circuiti accoppiati costituiti da due solenoidi di $N_1$ e $N_2$ spire avvolti su un circuito magnetico, i cui dati geometrici sono indicati in fig. (a). Calcolare i coefficienti di autoinduzione $L_1$ e $L_2$ dei due circuiti, e il coefficiente di mutua induzione $M$, nell'ipotesi di poter trascurare le riluttanze dei tratti in ferro e i flussi dispersi.

**Risposta**

Il circuito elettrico equivalente ai fini del calcolo di $L_1$ è quello indicato in fig. (b), con:

$$\mathcal{R}_{t1} = \frac{\delta_1}{\mu_0 S_1}, \; \mathcal{R}_{t2} = \frac{\delta_2}{\mu_0 S_2}, \; \mathcal{R}_{t3} = \frac{\delta_3}{\mu_0 S_3},$$

$$\mathcal{R}_{t4} = \frac{\delta_4}{\mu_0 S_4}, \; \mathcal{R}_{t5} = \frac{\delta_5}{\mu_0 S_5}.$$




(b)

La resistenza equivalente $\mathcal{R}_e$ "vista" dal generatore è:

$$\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_{t1} + \mathcal{R}_{t2} + \frac{\mathcal{R}_{t3}\,(\mathcal{R}_{t4} + \mathcal{R}_{t5})}{\mathcal{R}_{t3} + \mathcal{R}_{t4} + \mathcal{R}_{t5}}\,;$$

il flusso $\Phi_1$ è, dunque, pari a:

$$\Phi_1 = \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_e}\,,$$

e il coefficiente di autoinduzione $L_1$ è:

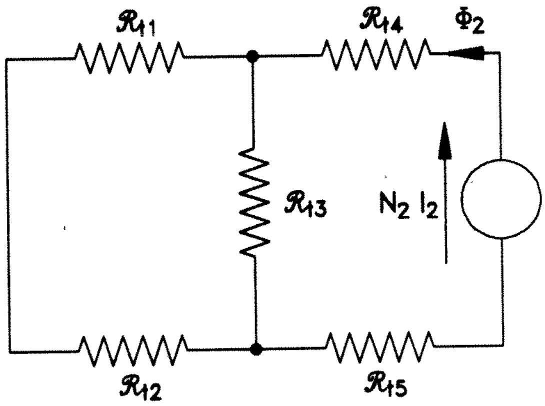
$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_e}\,.$$

Per calcolare $L_2$, il circuito elettrico equivalente è quello di fig. (c), e si ha, analogamente:

$$L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}'_e}\,,$$

con:

$$\mathcal{R}'_e = \mathcal{R}_{t4} + \mathcal{R}_{t5} + \frac{\mathcal{R}_{t3}\,(\mathcal{R}_{t1} + \mathcal{R}_{t2})}{\mathcal{R}_{t3} + \mathcal{R}_{t1} + \mathcal{R}_{t2}}\,.$$




(c)

Infine, per calcolare $M$, possiamo ricorrere indifferentemente all'uno o all'altro degli schemi (b) e (c). Utilizzando, ad es., quello di fig. (b), dobbiamo calcolare la "corrente" che circola nella serie $\mathcal{R}_{t4}$, $\mathcal{R}_{t5}$, indicata con $\Phi_2$ in fig. (b). Si ha subito:

$$\Phi_2 = \Phi_1 \,\frac{\mathcal{R}_{t3}}{\mathcal{R}_{t3} + \mathcal{R}_{t4} + \mathcal{R}_{t5}} = \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_e}\,\frac{\mathcal{R}_{t3}}{\mathcal{R}_{t3} + \mathcal{R}_{t4} + \mathcal{R}_{t5}}\,;$$

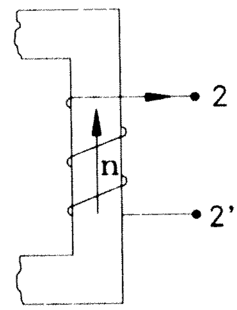
osserviamo subito, però, che il flusso concatenato con una generica spira dell'avvolgimento secondario deve essere riferito a una normale $\boldsymbol{n}$ orientata congruentemente con il verso di riferimento assunto per il circuito; ne segue che deve essere orientata come in fig. (d).

Il verso assunto per $\Phi_2$ in fig. (b) è dunque *opposto* a quello di $\boldsymbol{n}$; si ha quindi:

$\Phi'_2 = -\Phi_2$,

avendo indicato con $\Phi'_2$ il flusso concatenato con *una* spira dell'avvolgimento secondario. Il flusso totale concatenato col secondario è allora pari a $N_2\,\Phi'_2$, e il coefficiente di mutua induzione $M$ è (in modulo e segno):

$$M = \frac{N_2\,\Phi'_2}{I_1} = -\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_e}\,\frac{\mathcal{R}_{t3}}{\mathcal{R}_{t3}+\mathcal{R}_{t4}+\mathcal{R}_{t5}}\,.$$

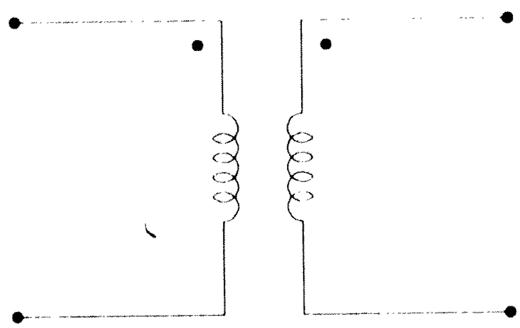



(d)

A titolo di esercizio, il lettore verifichi che, utilizzando per il calcolo di $M$ lo schema di fig. (c), si perviene allo stesso risultato. Il lettore verifichi, inoltre, che l'accoppiamento *non* è perfetto.

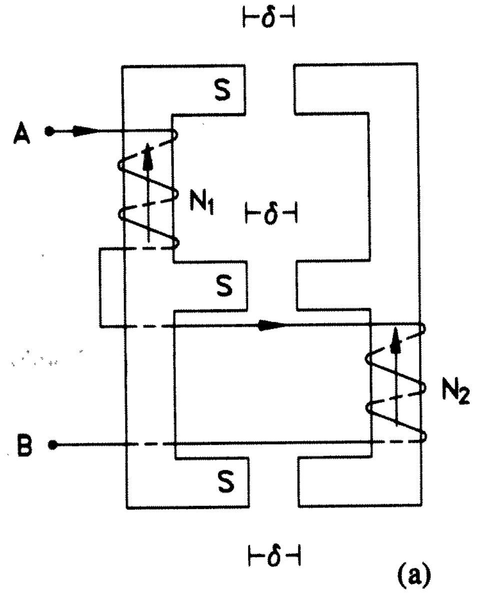
**Osservazione:**

Volendo rappresentare i due circuiti accoppiati di fig. (a) con il simbolo grafico solitamente usato, lo schema è quello di fig. (e); si noti che i due "pallini" che indicano il modo in cui valutare il segno di $M$ sono messi in modo che, con le convenzioni di segno assunte per le correnti in fig. (a), $M$ risulta *negativo*, come è stato dimostrato che è (sulla base della conoscenza dei modi in cui i due solenoidi sono avvolti).



(e)

## Esercizio 88




(a)

Calcolare il coefficiente di autoinduzione del bipolo *A, B* indicato in fig. (a), assumendo le solite ipotesi semplificative.

**Risposta**

Tenendo conto del modo in cui i due tratti (di $N_1$ e $N_2$ spire ) sono avvolti, lo schema elettrico equivalente per calcolare $L$ è quello indicato in fig. (b), con $\mathcal{R}_t = \dfrac{\delta}{\mu_0 S}$. Con le convenzioni di segno assunte in fig. (b), il flusso totale concatenato con l'avvolgimento *A, B* è:

$$\Phi = N_1\,\Phi_1 + N_2\,\Phi'_1 .$$

Risolvendo la rete, si ha:

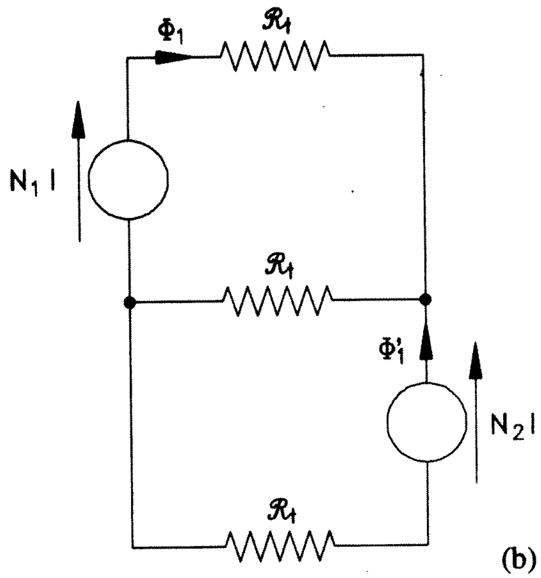
$$\begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{(2\,N_1 - N_2)\,I}{3\,\mathcal{R}_t}, \\ \Phi'_1 = \dfrac{(2\,N_2 - N_1)\,I}{3\,\mathcal{R}_t}, \end{cases}$$

e quindi:

$$\Phi = \frac{N_1\,(2\,N_1 - N_2)}{3\,\mathcal{R}_t}\,I + \frac{N_2\,(2\,N_2 - N_1)}{3\,\mathcal{R}_t}\,I$$

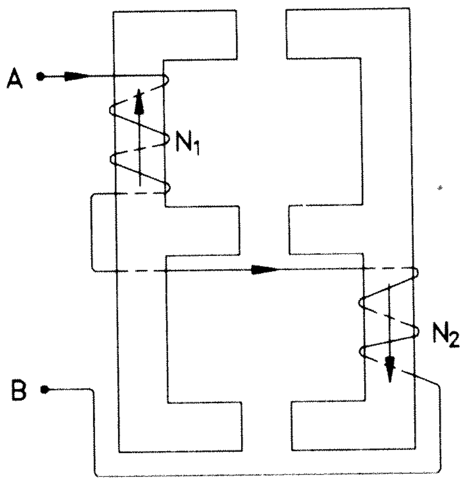
e infine:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{2}{3}\,\frac{N_1^2 + N_2^2 - N_1\,N_2}{\mathcal{R}_t} .$$



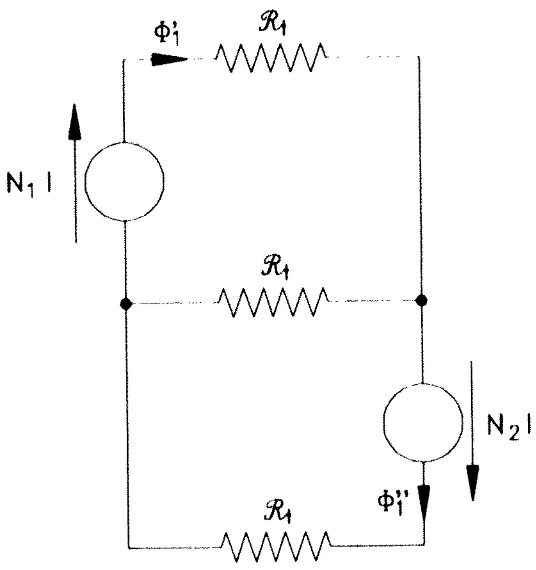

(b)

## Esercizio 89




(a)

Calcolare il coefficiente di autoinduzine del bipolo *A*, *B* che si ottiene da quello dell'es. precedente invertendo il verso di avvolgimento del solo tratto di $N_2$ spire, come mostrato in fig. (a).




(b)

**Risposta**

Lo schema equivalente è ora quello di fig. (b). Per esso, si ha:

$$\begin{cases} \Phi'_1 = \dfrac{(2\,N_1 + N_2)}{3\,\mathcal{R}_t}\,I \\ \Phi''_1 = \dfrac{(2\,N_2 + N_1)}{3\,\mathcal{R}_t}\,I\,, \end{cases}$$

e quindi:

$$\Phi = N_1\,\Phi'_1 + N_2\,\Phi''_1 = \left[\frac{N_1\,(2\,N_1 + N_2)}{3\,\mathcal{R}_t} + \frac{N_2\,(2\,N_2 + N_1)}{3\,\mathcal{R}_t}\right] I\,,$$

e infine:

$$L' = \frac{\Phi}{I} = \frac{2}{3}\,\frac{N_1^2 + N_2^2 + N_1\,N_2}{\mathcal{R}_t}\,.$$