

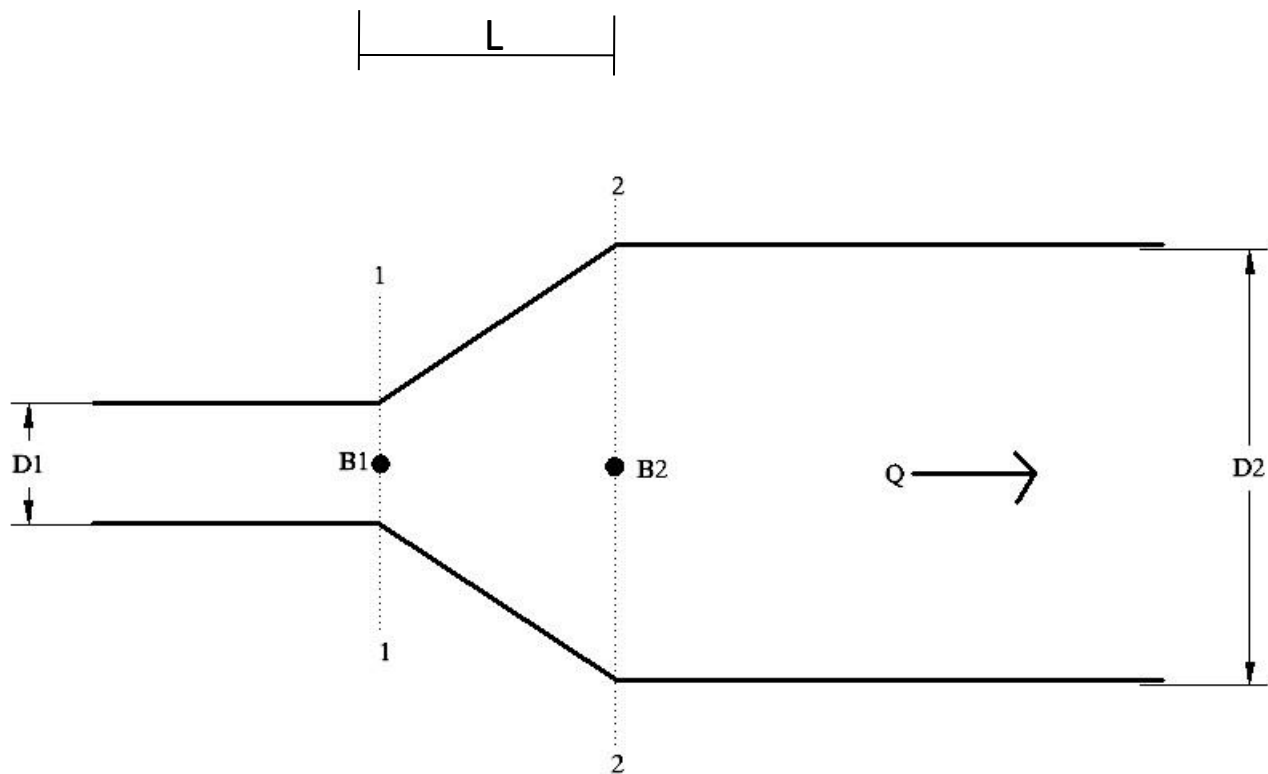
# **Esercizi ed approfondimenti sul calcolo delle spinte dinamiche**

Equilibrio dinamico- soluzioni

A cura di: Giulia Ceriotti

## Esercizio 1: testo

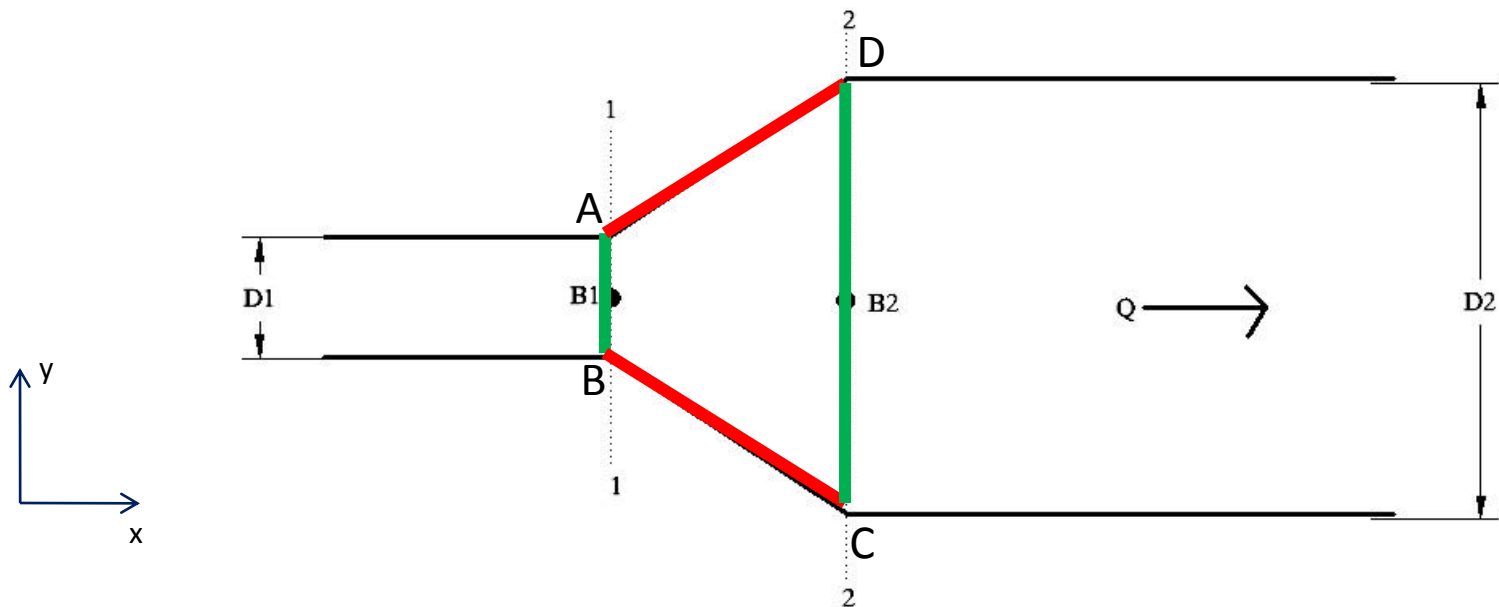
Determinare la spinta dinamica sulla parete del divergente rappresentato in figura. Il divergente è lungo  $L$ . Noti i diametri  $D1$  e  $D2$ , la portata  $Q$  e la pressione  $p1$  nel punto  $B1$ , baricentro della condotta nella sezione 1-1.



## Esercizio 1: soluzione (1/8)

Per calcolare la spinta dinamica agente sul divergente, delimitare il volume di controllo su cui verrà applicata l'equazione globale. In figura viene evidenziato il volume di controllo scelto. Il volume di controllo è delimitato da 3 superfici, due fittizie e una reale:

- La superficie piana AB è fittizia ed è un cerchio di diametro  $D_1$  e baricentro  $B_1$ ;
- La superficie piana DC è fittizia ed è un cerchio di diametro  $D_2$  e baricentro  $B_2$ ;
- La terza superficie è costituita dalla superficie del divergente stesso ed è quindi una superficie solida reale.



## Esercizio 1: soluzione (2/8)

L'equazione dell'equilibrio dinamico globale è:

$$\mathbf{G} + \mathbf{I} + \mathbf{\Pi}_p + \mathbf{\Pi}_\mu + \mathbf{M} + \mathbf{M}' = 0$$

Identificare i contributi agenti sul volume di controllo nel caso in analisi, la loro direzione e verso (definito il sistema di riferimento come indicato in figura):

$\mathbf{I} = 0$  Poiché il moto è stazionario

$\mathbf{G}$  È la forza peso applicata nel baricentro del volume di controllo in quanto l'unica forza di volume agente nel sistema è la forza gravitazionale. La forza peso è diretta verticalmente con verso contrario al versore  $j$

Per quanto riguarda le componenti risultanti dagli sforzi di superficie e il flusso di quantità di moto, esse vengono scomposte nei diversi contributi per le 3 superfici che delimitano il volume di controllo.

Superficie AB

$\mathbf{\Pi}_{p1}$  Rappresenta la risultante della componente isotropa del tensore degli sforzi agente sulla superficie AB. Essa è diretta normalmente alla superficie ed entrante nel volume di controllo. Il punto di applicazione di tale componente è più in basso rispetto al baricentro B1 in quanto la distribuzione dello sforzo isotropo non è simmetrica sulla superficie AB.

- $\Pi_{\mu 1}$  Rappresenta la risultante dovuta alla parte deviatorica del tensore degli sforzi agenti sulla superficie AB. Essa è rappresentata come un vettore normale alla superficie AB, entrante nel volume di controllo e applicata nel baricentro B1. Ciò è dovuto al fatto che la componente tangenziale dello sforzo viscoso si annulla per simmetria.
- $\mathbf{M}_1$  Rappresenta la risultante dovuta al flusso di quantità di moto entrante attraverso la superficie AB. Essa è un vettore diretto come la normale alla superficie AB, quindi entrante nel volume di controllo e applicato nel baricentro B1 della superficie essendo la distribuzione di velocità simmetrica.
- $\mathbf{M}'_1$  Rappresenta la risultante dovuta al flusso di quantità di moto turbolenta entrante attraverso la superficie AB. Essa è un vettore diretto come la normale alla superficie AB, quindi entrante nel volume di controllo e applicato nel baricentro B1 della superficie essendo la distribuzione di velocità simmetrica.

### Superficie DC

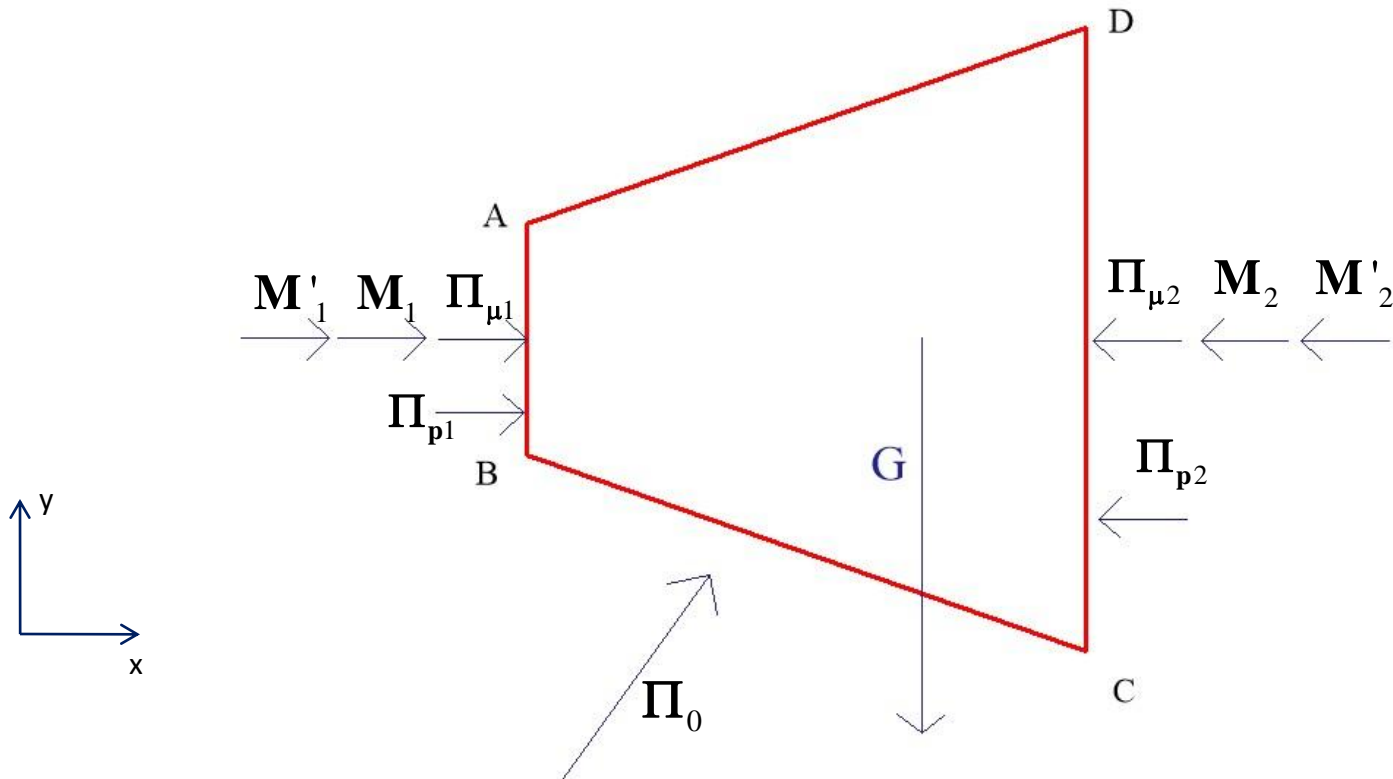
Con considerazioni analoghe a quelle fatte per la superficie AB, vengono identificate le seguenti componenti agenti sulla superficie CD.

$$\Pi_{p2} \quad \Pi_{\mu 2} \quad \mathbf{M}_2 \quad \mathbf{M}'_2$$

## Superficie tronco-conica del divergente ABCD

$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}'_0 = 0$  Questa superficie è solida e impermeabile al flusso quindi la quantità di moto entrante attraverso questa superficie è nulla.

$\Pi_0$  Tale componente è l'unica agente sulla superficie tronco-conica. Il suo modulo e la sua direzione sono incognite. Analogamente al calcolo della spinta in caso statico, è la componente legata alla spinta esercitata dal fluido sulla superficie del divergente.



## Esercizio 1: soluzione (3/8)

Scrivere l'equazione dell'equilibrio globale evidenziando tutte le componenti individuate nello step precedente

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{\Pi}_{p1} + \mathbf{\Pi}_{p2} + \mathbf{\Pi}_{\mu1} + \mathbf{\Pi}_{\mu2} + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}'_1 + \mathbf{M}'_2 = 0$$

## Esercizio 1: soluzione (4/8)

Individuare possibili semplificazioni in modo da evitare di calcolare componenti che non intervengono nell'equilibrio.

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{\Pi}_{p1} + \mathbf{\Pi}_{p2} + \cancel{\mathbf{\Pi}_{v1}} + \cancel{\mathbf{\Pi}_{v2}} + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \cancel{\mathbf{M}'_1} + \cancel{\mathbf{M}'_2} = 0$$

Lo sforzo viscoso in direzione normale è difficilmente quantificabile in quanto dipende dalla variazione della velocità in direzione del moto. Si ipotizzi che nelle due superfici piane che delimitano il volume di controllo il moto del fluido possa considerarsi gradualmente variato. Quindi lo sforzo viscoso in direzione del moto è nullo.

Sono contributi complessi da quantificare in quanto dipendono dalla distribuzione spaziale delle fluttuazioni di velocità dovuti alla turbolenza. Si ipotizzano trascurabili sulla base di esperienze sperimentali.



Esercizio 1: soluzione (5/8)

Esplicito la relazione esistente tra  $\Pi_0$  e la spinta dinamica  $S$ , incognita del problema.

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_{p1} + \Pi_{p2} + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

## Esercizio 1: soluzione (6/8)

Proiettare le componenti di  $\mathbf{S}$  in direzione  $x$  e  $y$ .

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_{p1} + \mathbf{\Pi}_{p2} + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{S}_x = \mathbf{G}_x + \mathbf{\Pi}_{p1x} + \mathbf{\Pi}_{p2x} + \mathbf{M}_{1x} + \mathbf{M}_{2x}$$

$$\mathbf{S}_y = \mathbf{G}_y + \mathbf{\Pi}_{p1y} + \mathbf{\Pi}_{p2y} + \mathbf{M}_{1y} + \mathbf{M}_{2y}$$

## Esercizio 1: soluzione (7/8)

Calcolare modulo, direzione e verso delle componenti.

$$\mathbf{G}_x = 0 \quad \mathbf{G}_y = -\gamma W \hat{j} \downarrow \quad W = \frac{\pi}{12} L (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2)$$

$$\mathbf{\Pi}_{p1x} = p_1 A_1 \hat{i} \longrightarrow \quad A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} \quad V_1 = \frac{Q}{A_1}$$

$$\mathbf{M}_{1x} = \beta_1 \rho V_1^2 A_1 \hat{i} \longrightarrow$$

$$\mathbf{M}_{2x} = -\beta_2 \rho V_2^2 A_2 \hat{i} \longleftarrow \quad A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} \quad V_2 = \frac{Q}{A_2}$$

$$\mathbf{\Pi}_{p2x} = -p_2 A_2 \hat{i} \longleftarrow \quad \text{Dove il valore di } p_2 \text{ può essere ricavato scrivendo la}$$

conservazione dell'energia tra il punto B1 e il punto B2, ovvero:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + z_2 + m \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

$$\mathbf{\Pi}_{p1y} = \mathbf{\Pi}_{p2y} = \mathbf{M}_{1y} = \mathbf{M}_{2y} = 0$$

### Esercizio 1: soluzione (8/8)

Calcolare delle risultante  $S$ .

$$\mathbf{S}_x = \left( p_1 A_1 - p_2 A_2 + \beta_1 \rho V_1^2 A_1 - \beta_2 \rho V_2^2 A_2 \right) \hat{i}$$

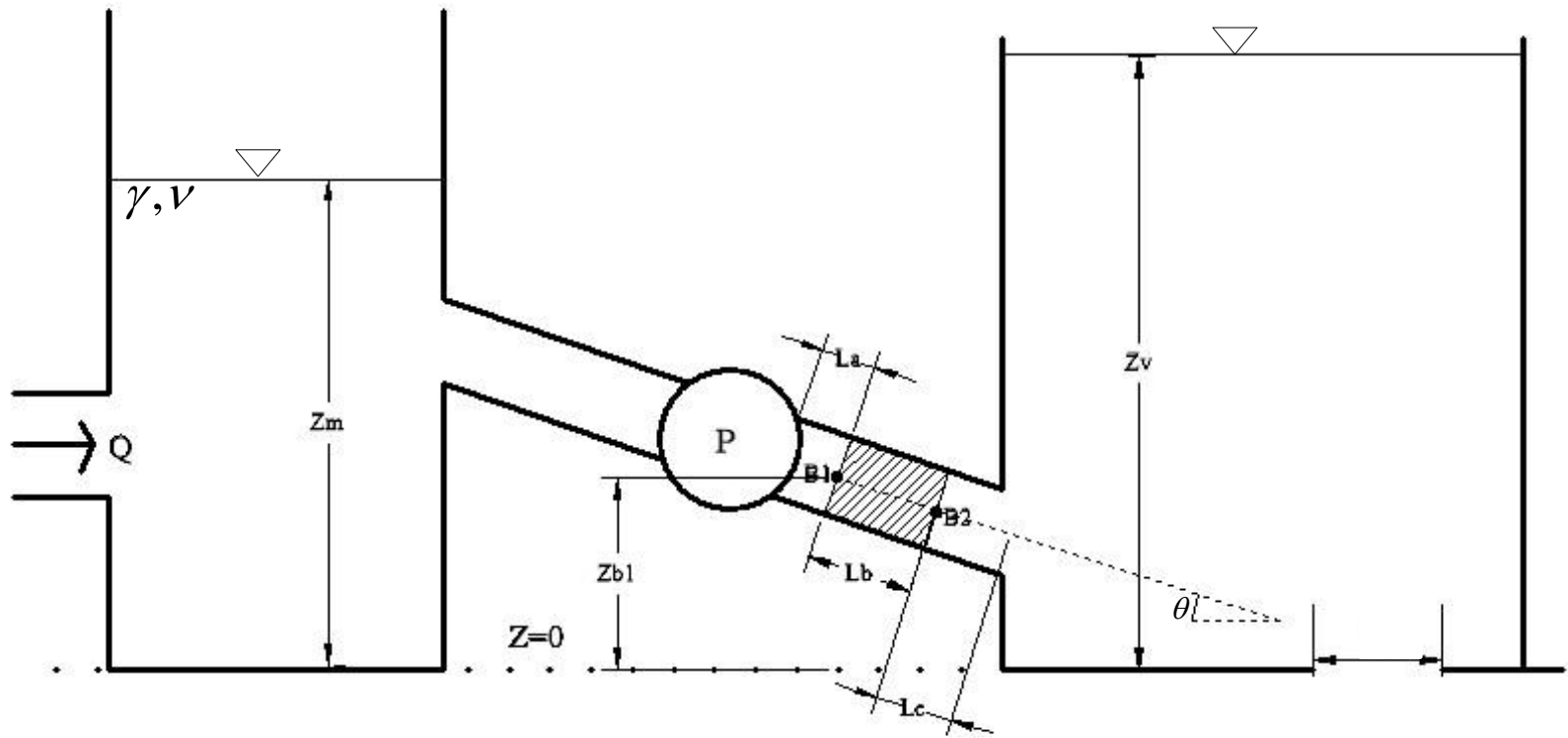
$$\mathbf{S}_y = -\gamma W \hat{j}$$

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{|\mathbf{S}_x|^2 + |\mathbf{S}_y|^2}$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{|\mathbf{S}_x|}{|\mathbf{S}_y|} \right) \quad \text{Che rappresenta l'angolo formato dal vettore } \mathbf{S} \text{ con la verticale.}$$

## Esercizio 2: testo

Dato il sistema di serbatoi dato in figura determinare il livello del serbatoio di monte  $Z_m$ . Disegnare qualitativamente l'andamento delle linee dei carichi totali e piezometrica. Noti:  $Z_v$ ,  $D_u, D, L, \varepsilon_1$ ,  $W_p$ ,  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$ . Calcolare inoltre la spinta dinamica sul tratto di condotta evidenziato in figura e delimitato da B1 e B2. Noti:  $L_a$ ,  $L_b$ ,  $L_c$ ,  $Z_{b1}, Z_{b2}, \vartheta$ .



## Esercizio 2: soluzione (1/2)

1) Calcolo la portata  $Q$  circolante nel sistema a partire dall'efflusso dato dalla luce posta alla base del serbatoio di valle.

$$Q = C_v C_c \sqrt{2gh} A_3 \quad h = Z_v \quad A_3 = \frac{\pi D_3^2}{4}$$

2) Trovo la prevalenza fornita dalla pompa alla corrente a partire dalla potenza assorbita dalla macchina e nota la sua efficienza.

$$\Delta H_p = \frac{W_p \eta}{\gamma Q}$$

3) Trovo il livello del serbatoio di monte scrivendo il bilancio dell'energia tra monte e valle.

$$H_M - H_v = \Delta H_c + \Delta H_d - \Delta H_p$$

Dove:

$$H_M = z_m \quad H_v = z_v$$

$$\Delta H_c = 0.5 \frac{V_1^2}{2g} + \alpha \frac{V_2^2}{2g} = 0.5 \frac{8Q^2}{\pi D_1^4 g} + \alpha \frac{8Q^2}{\pi D_2^4 g}$$

$$H_d = J_1 L_1 + J_2 L_2 = \lambda_1 \frac{8Q^2}{\pi D_1^5 g} + \lambda_2 \frac{8Q^2}{\pi D_2^5 g}$$

I due indici di resistenza sono noti dalle seguenti formule:

$$\text{Re}_i = \frac{\rho V_i D_i}{\mu} \quad i = 1, 2$$

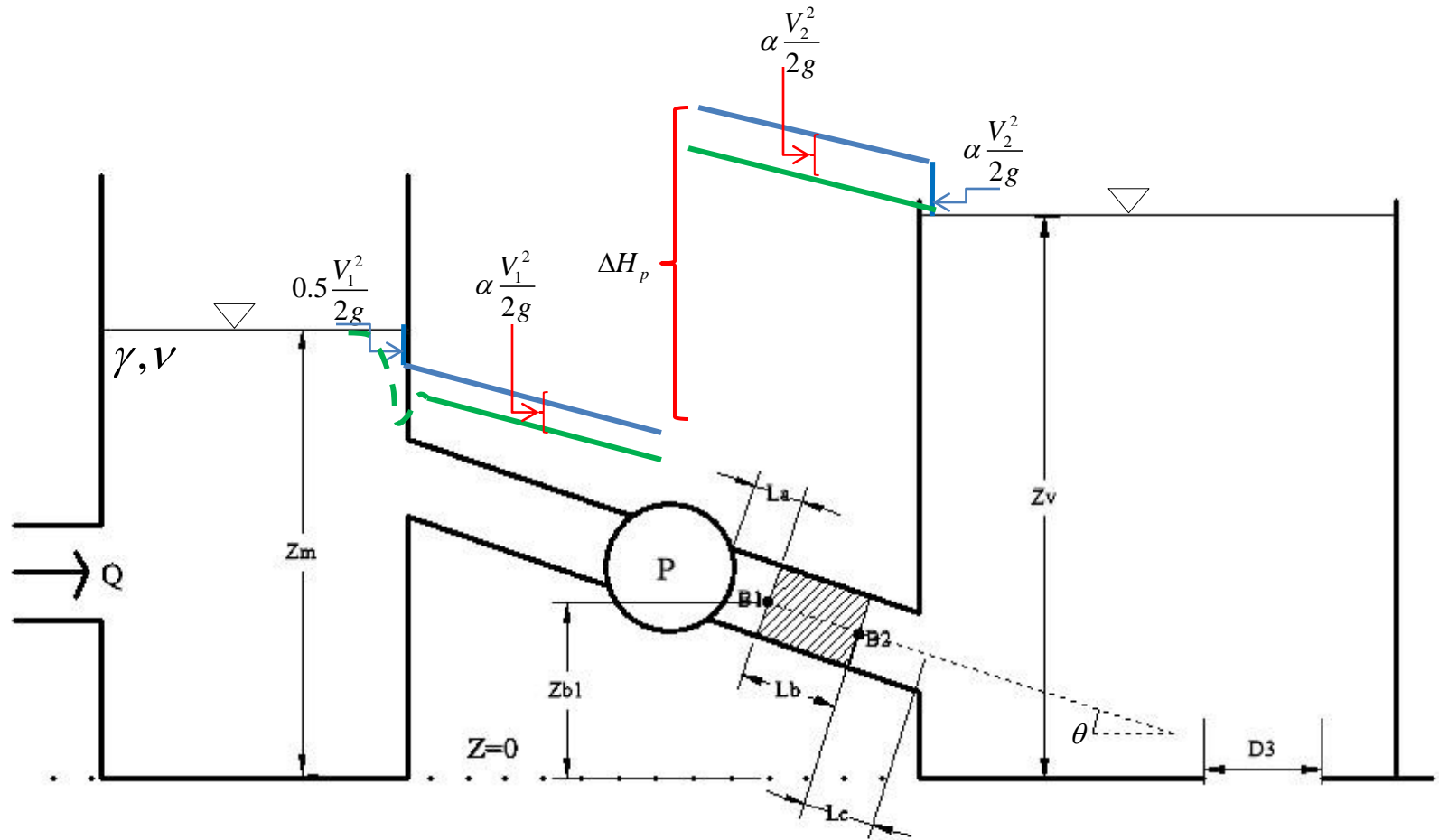
$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i = \frac{64}{\text{Re}_i} \quad \text{moto laminare} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = -2 \log \left( \frac{2.51}{\sqrt{\lambda_i} \text{Re}_i} + \frac{\varepsilon_i}{D_i 3.71} \right) \quad \text{moto turbolento e di transizione} \end{array} \right. \quad i=1,2$$

Risulta quindi che:

$$Z_m = Z_v + \Delta H_c + \Delta H_d - \Delta H_p$$

Infine disegno l'andamento qualitativo delle linee dei carichi totali (LCT) e piezometrica (LP).

Infine disegno l'andamento qualitativo delle linee dei carichi totali (LCT) e piezometrica (LP).

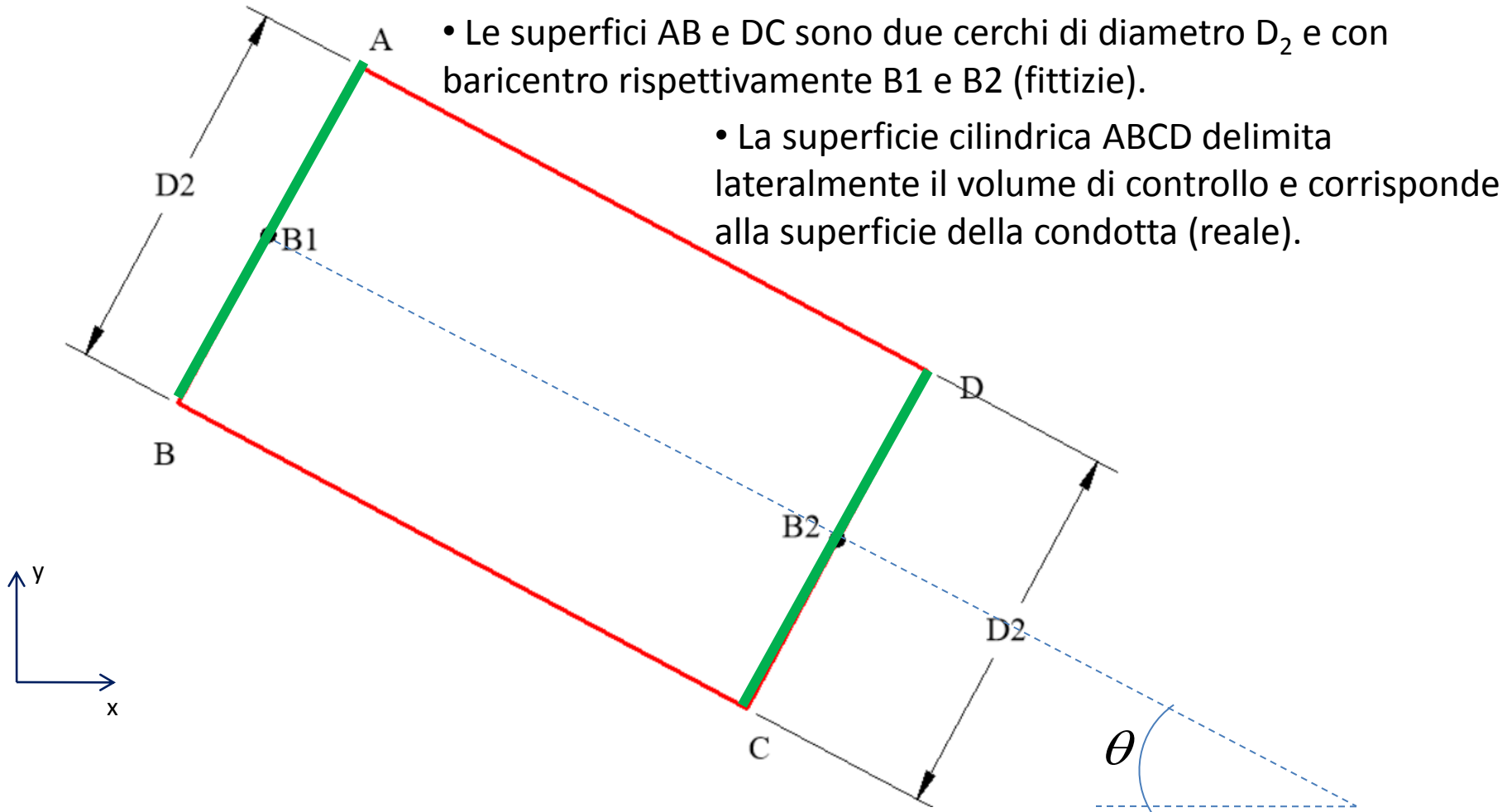




## Esercizio 2: soluzione (2/2)

Calcolare della spinta dinamica sul tratto B1-B2

Isolare il volume di controllo e le superfici che delimitano il volume di controllo.



Identificare i contributi dell'equazione globale con considerazioni analoghe a quelle proposte per l'esercizio 1.

$$I = 0$$

**G**

Superficie AB	$\Pi_{p1} \quad \Pi_{\mu1} \quad M_1 \quad M'_1$
---------------	--

Superficie DC	$\Pi_{p2} \quad \Pi_{\mu2} \quad M_2 \quad M'_2$
---------------	--

Superficie cilindrica della condotta ABCD	$M_0 = M'_0 = 0 \quad \Pi_0$
---	------------------------------

Scrivere l'equazione globale mettendo in evidenza i contributi individuati.

$$G + \Pi_0 + \Pi_{p1} + \Pi_{p2} + \Pi_{\mu1} + \Pi_{\mu2} + M_1 + M_2 + M'_1 + M'_2 = 0$$

Semplificare l'espressione con considerazioni analoghe all'esercizio precedente.

$$G + \Pi_0 + \Pi_{p1} + \Pi_{p2} + \cancel{\Pi_{\mu1}} + \cancel{\Pi_{\mu2}} + M_1 + M_2 + \cancel{M'_1} + \cancel{M'_2} = 0$$

Inoltre è possibile semplificare anche le due risultati  $M_1$  e  $M_2$  in quanto la velocità è uguale nelle due sezioni e di conseguenza in modulo e direzione uguali me verso opposto.

Quindi:

$$G + \Pi_0 + \Pi_{p1} + \Pi_{p2} + \cancel{\Pi_{\mu1}} + \cancel{\Pi_{\mu2}} + \cancel{M_1} + \cancel{M_2} + \cancel{M'_1} + \cancel{M'_2} = 0$$

Esplicito le relazione esistente tra  $\Pi_0$  e  $\mathcal{S}$ .

$$\mathcal{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_{p1} + \Pi_{p2}$$

Proietto la spinta nella direzione x e y.

$$\mathcal{S}_x = \mathbf{G}_x + \Pi_{p1x} + \Pi_{p2x}$$

$$\mathcal{S}_y = \mathbf{G}_y + \Pi_{p1y} + \Pi_{p2y}$$

Calcolare i contributi.

In direzione x:

$$G_x = 0$$

$$\Pi_{p1x} = p_{B1} A_{B1} \text{sen}\hat{\theta} \hat{i} \quad \longrightarrow \quad A_{B1} = \frac{\pi D_2^2}{4}$$

La pressione  $p_{B1}$  può essere ricavata usando la linea piezometrica precedentemente ricavata e impostando il bilancio di energia tra il punto B1 e un punto appartenente alla superficie libera del serbatoio di valle.

$$\frac{p_{B1}}{\gamma} + z_{B1} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} = z_v + (Lb + Lc)J_2$$

$$\Pi_{p2x} = -p_{B2} A_{B2} \text{sen}\hat{\theta} \hat{i} \quad \longleftarrow \quad A_{B2} = \frac{\pi D_2^2}{4} = A_{B1}$$

La pressione  $p_{B2}$  può essere ricavata usando la linea piezometrica precedentemente ricavata e impostando il bilancio di energia tra il punto B2 e un punto appartenente alla superficie libera del serbatoio di valle.

$$\frac{p_{B2}}{\gamma} + z_{B2} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} = z_v + (Lc)J_2$$

In direzione  $y$ :

$$\mathbf{G}_y = -\gamma W \hat{j} \downarrow \quad W = \frac{\pi D_2^2}{4} L b$$

$$\Pi_{p1y} = -p_{B1} A_{B1} \cos \theta \hat{j} \downarrow$$

$$\Pi_{p2y} = p_{B2} A_{B2} \cos \theta \hat{j} \uparrow$$

Calcolare delle risultante  $\mathbf{S}$ .

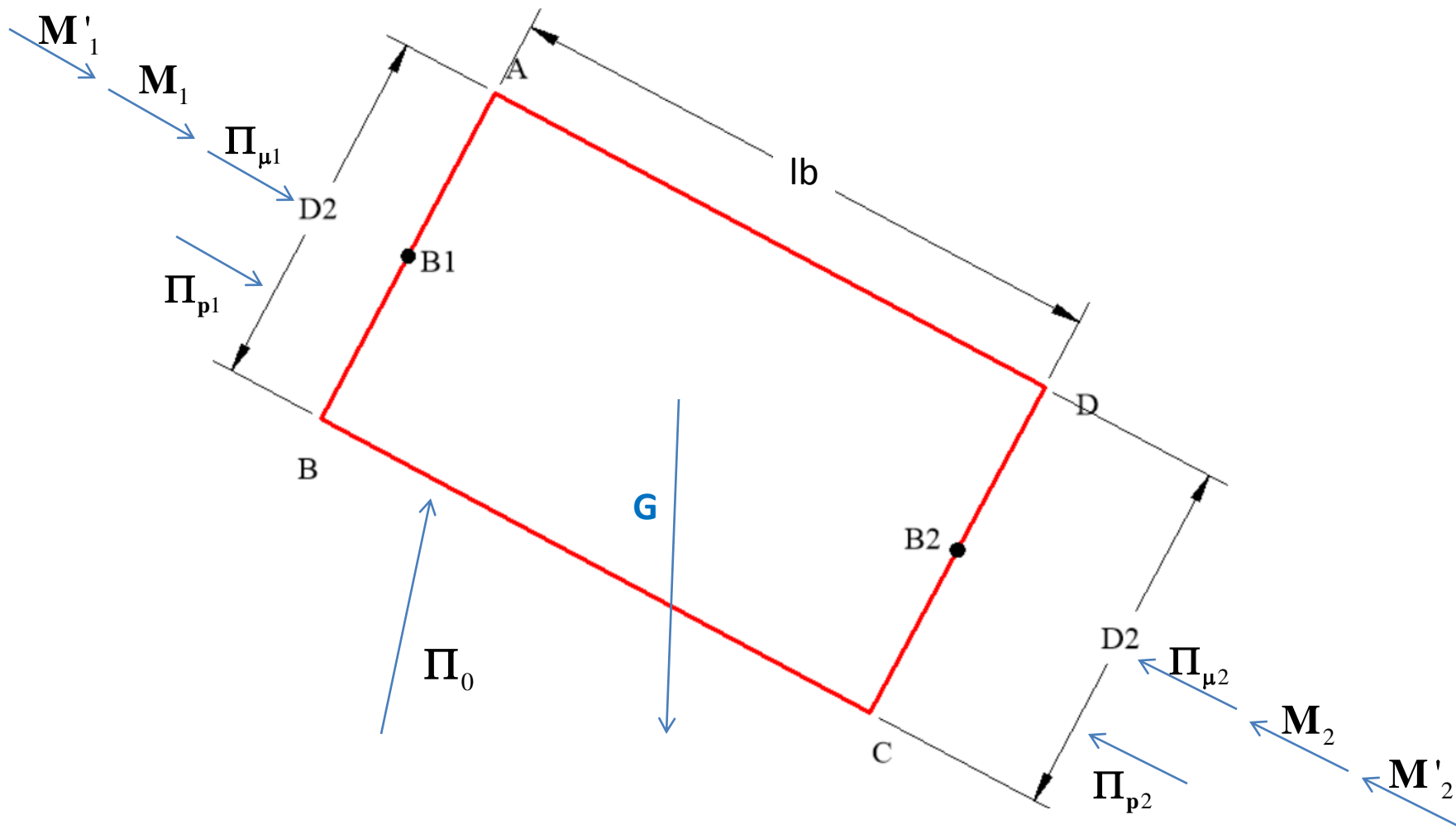
$$\mathbf{S}_x = (p_{B1} A_{B1} \sin \theta - p_{B2} A_{B1} \sin \theta) \hat{i}$$

$$\mathbf{S}_y = -\gamma W \hat{j}$$

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{|\mathbf{S}_x|^2 + |\mathbf{S}_y|^2}$$

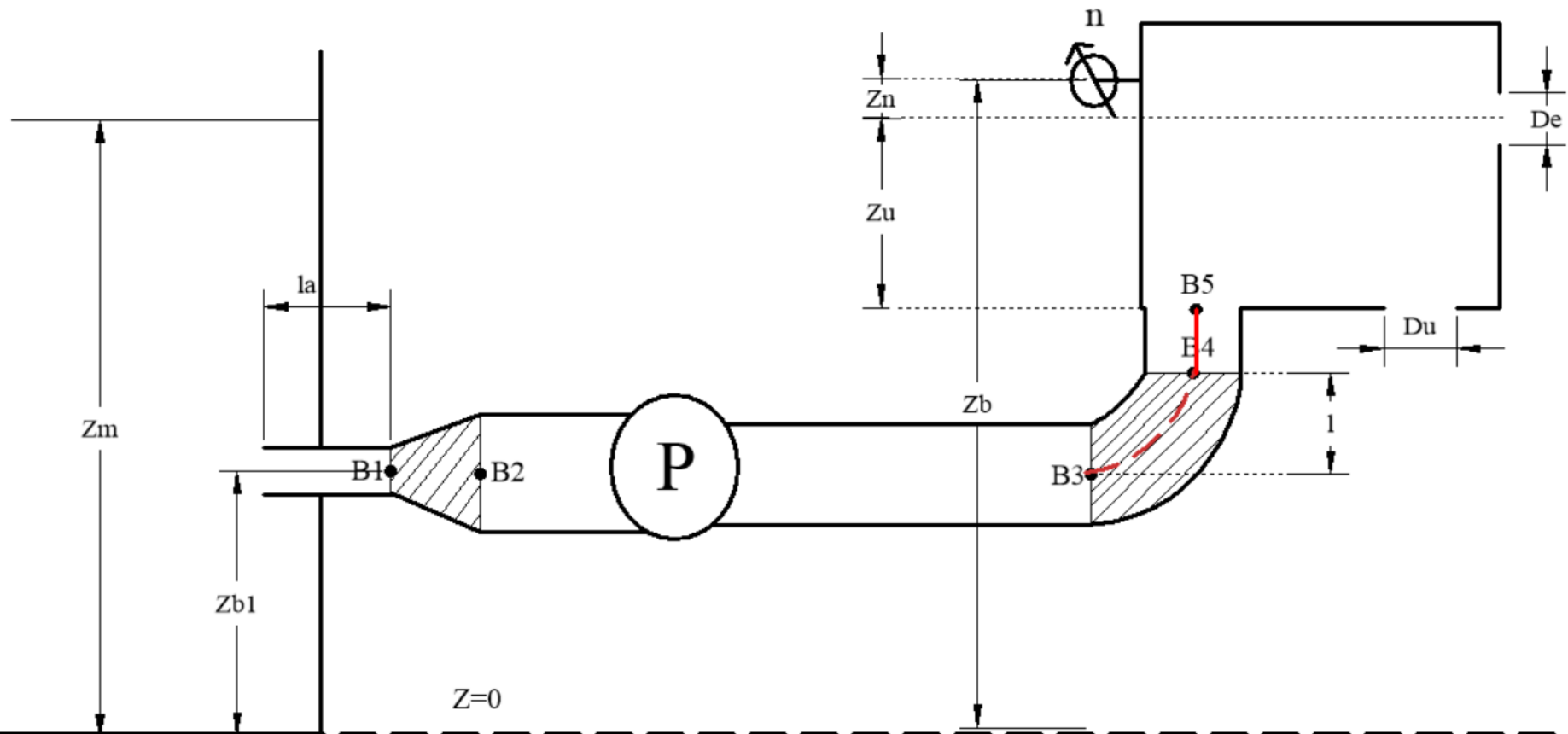
$$\omega = \arctan \left( \frac{|\mathbf{S}_x|}{|\mathbf{S}_y|} \right)$$

Che rappresenta l'angolo formato dal vettore  $\mathbf{S}$  con la verticale.



### ESERCIZIO 3: testo

Dato il sistema di serbatoi schematizzato in figura determinare la pressione  $n$  misurata dal manometro metallico, l'efficienza della pompa e la portate circolante nel sistema  $Q$ . Disegnare qualitativamente l'andamento della linea dei carichi totali e la linea piezometrica. Noti:  $Q_e$ ,  $Z_u$ ,  $Z_n$ ,  $Z_m$ ,  $D_e$ ,  $D_u$ ,  $Z_b$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $W_a$  (potenza assorbita dalla pompa),  $\nu$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  (angolo del divergente). Determinare inoltre la spinta sui due tratti di condotta evidenziati in figura e delimitati dalle lettere B1-B2 e B3-B4, nota  $l_a$ ,  $l$ ,  $l_b$  (lunghezza della linea tratteggiata in rosso tra B3 e B5),  $l_c$  (lunghezza della linea tratteggiata in rosso tra B3 e B4),  $Z_{b1}$ . Non è necessario esplicitare il volume di controllo scelto.



## ESERCIZIO 3: soluzione

La soluzione dell'esercizio è scomposta in 3 parti:

1. Calcolo della portata, dell'efficienza della pompa e dell'indicazione manometrica. Linee carico totale e piezometrica.
2. Calcolo della spinta sul tratto di condotta B1-B2
3. Calcolo della spinta sul tratto di condotta B3-B4



### ESERCIZIO 3: soluzione (1/3)

1.1 Determinare l'indicazione manometrica dato il diametro  $D_e$  e nota la portata uscente dalla luce  $Q_e$ .

$$Q_e = C_C C_v A_e \sqrt{2g(z_n + n/\gamma)}$$
$$n = \gamma \left( -z_n + \frac{1}{2g} \left( \frac{Q_e}{C_C C_v A_e} \right)^2 \right)$$

$$A_e = \frac{\pi D_e^2}{4}$$

1.2 Determinare la portata uscente dalla luce  $Q_u$ .

$$Q_u = C_C C_v A_u \sqrt{2g(z_u + n/\gamma)}$$

$$A_u = \frac{\pi D_u^2}{4}$$

1.3 Determinare la portata circolante nel sistema.

$$Q = Q_e + Q_u$$

### ESERCIZIO 3: soluzione (1/3)

1.4 Determinare la prevalenza fornita dalla pompa scrivendo il bilancio di energia tra monte e valle.

$$H_M - H_V = 1.16 \frac{V_1^2}{2g} + m(\beta) \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} + \alpha \frac{V_3^2}{2g} + J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3 - \Delta H_p$$

Dove l'unico termine incognito è  $\Delta H_p$ . Infatti:

- $H_M$  è noto in quanto equivalente a  $Z_M$
- $H_V$  è noto in quanto corrispondente alla quota del piano dei carichi idrostatici del serbatoio di valle ovvero  $Z_b + \frac{n}{\gamma}$
- Le perdite localizzate sono note in quanto sono note le velocità  $V_1, V_2$  e  $V_3$  nota la portata  $Q$
- Le perdite distribuite sono note in quanto posso calcolare le cadenti con le seguenti equazioni.

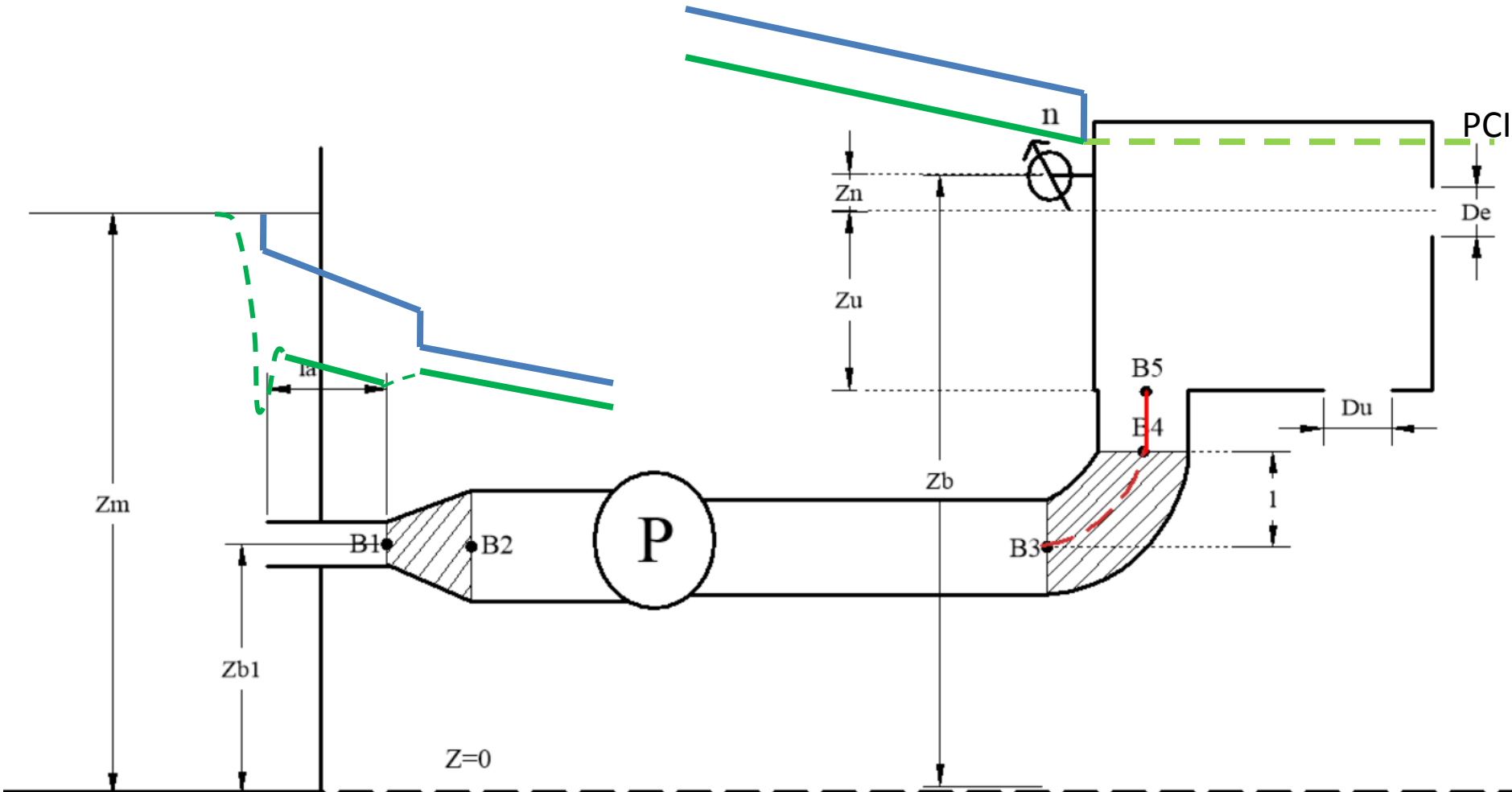
$$J_i = \lambda_i \frac{8Q^2}{\pi D_i^5 g} \quad i = 1, 2, 3$$
$$\text{Re}_i = \frac{\rho V_i D_i}{\mu} \quad i = 1, 2, 3$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i = \frac{64}{\text{Re}_i} \quad \text{moto laminare} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = -2 \log \left( \frac{2.51}{\sqrt{\lambda_i} \text{Re}_i} + \frac{\varepsilon_i}{D_i 3.71} \right) \quad \text{moto turbolento e di transizione} \end{array} \right. \quad i = 1, 2, 3$$

### ESERCIZIO 3: soluzione (1/3)

1.5 Determinare l'efficienza della pompa nota la potenza assorbita.

$$\eta = \frac{\Delta H_p \gamma Q}{W_a}$$

1.6 Disegnare linea dei carichi totali e linea piezometrica.

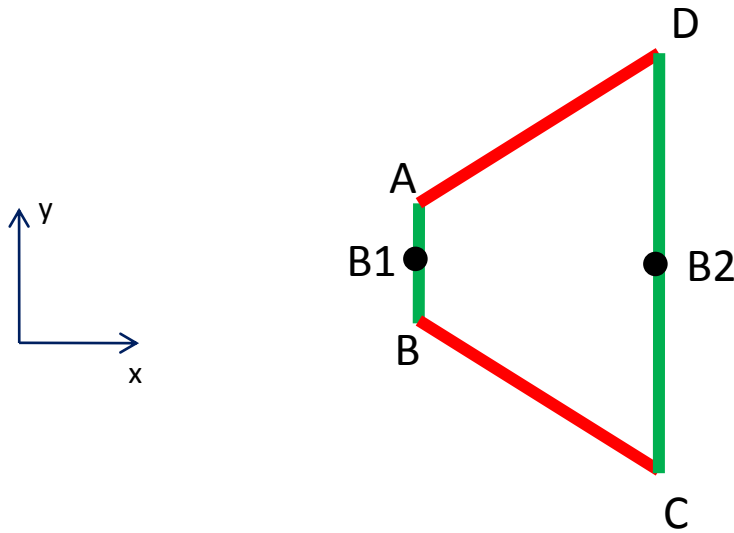


## ESERCIZIO 3: soluzione (2/3)

### CALCOLO DELLA SPINTA SULLA CONDOTTA B1-B2

2.1) isolare il volume di controllo:

- le superfici AB e DC sono fittizie
- il tronco di cono ABCD è la superficie del divergente reale



### ESERCIZIO 3: soluzione (2/3)

2.2) identificare i contributi partecipanti all'equilibrio globale superficie per superficie  
 $I = 0$

**G**

Superficie AB	$\Pi_{pAB} \Pi_{\mu AB} M_{AB} M'_{AB}$
---------------	---

Superficie DC	$\Pi_{pCD} \Pi_{\mu CD} M_{CD} M'_{CD}$
---------------	---

Superficie tronco-conica della condotta ABCD	$M_0 = M'_0 = 0 \quad \Pi_0$
--	------------------------------

2.3) Scrivere l'equazione globale mettendo in evidenza i contributi individuati.

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_{pAB} + \Pi_{pCD} + \Pi_{\mu AB} + \Pi_{\mu CD} + M_{AB} + M_{CD} + M'_{AB} + M'_{CD} = 0$$

2.4) Semplificare l'espressione con considerazioni analoghe all'esercizio 1.

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_{pAB} + \Pi_{pCD} + \cancel{\Pi_{\mu AB}} + \cancel{\Pi_{\mu CD}} + M_{AB} + M_{CD} + \cancel{M'_{AB}} + \cancel{M'_{CD}} = 0$$

2.5) Esplicitare la relazione tra **S** e  $\Pi_0$ .

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_{pAB} + \Pi_{pCD} + M_{AB} + M_{CD}$$

### ESERCIZIO 3: soluzione (2/3)

2.6) scomporre la spinta in direzione x e y

$$\mathbf{S}_x = \mathbf{G}_x + \Pi_{pABx} + \Pi_{pCDx} + \mathbf{M}_{ABx} + \mathbf{M}_{CDx}$$

$$\mathbf{S}_y = \mathbf{G}_y + \Pi_{pABy} + \Pi_{pCDy} + \mathbf{M}_{ABy} + \mathbf{M}_{CDy}$$

2.7) determinare modulo direzione e verso delle componenti

In direzione x:

$$\mathbf{G}_x = 0$$

$$\Pi_{pABx} = p_{B1} A_{AB} \hat{i} \quad \longrightarrow \quad A_{AB} = \frac{\pi D_1^2}{4}$$

La pressione  $p_{B1}$  può essere ricavata impostando il bilancio di energia tra il punto B1 e un punto appartenente alla superficie libera del serbatoio di monte.

$$\frac{p_{B1}}{\gamma} + z_{B1} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} + J_1 l a + 1.16 \frac{V_1^2}{2g} = Z_M$$

$$\Pi_{pCDx} = -p_{B2} A_{CD} \hat{i} \quad \longleftarrow \quad A_{CD} = \frac{\pi D_2^2}{4}$$

La pressione  $p_{B2}$  può essere ricavata impostando il bilancio di energia tra il punto B2 e B1

$$\frac{p_{B2}}{\gamma} + z_{B2} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + m(\beta) \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{p_{B1}}{\gamma} + z_{B1} + \frac{\alpha V_1^2}{2g}$$

$$\mathbf{M}_{ABx} = \beta_1 \rho V_1^2 A_{AB} \hat{i} \quad \longrightarrow$$

$$\mathbf{M}_{CDx} = -\beta_2 \rho V_2^2 A_{CD} \hat{i} \quad \longleftarrow$$

In direzione  $y$ :

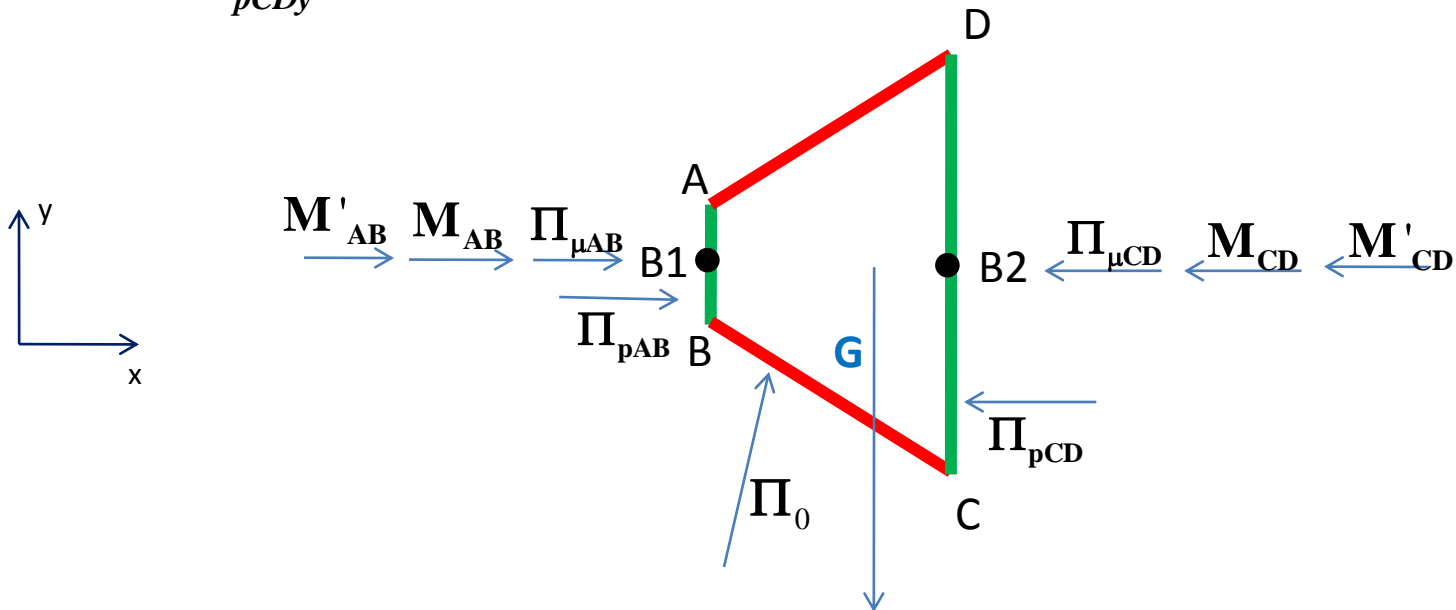
$$\mathbf{G}_y = -\gamma W_{ABCD} \hat{j} \quad \downarrow$$

$$\mathbf{M}_{AB_y} = 0$$

$$\mathbf{M}_{CD_y} = 0$$

$$\Pi_{pAB_y} = 0$$

$$\Pi_{pCD_y} = 0$$



2.8) Calcolare delle risultante S.

$$\mathbf{S}_x = \left( p_{B1} A_{AB} - p_{B2} A_{CD} + \beta_1 \rho V_1^2 A_{AB} - \beta_2 \rho V_2^2 A_{CD} \right) \hat{i}$$

$$\mathbf{S}_y = -\gamma W_{ABCD} \hat{j}$$

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{|\mathbf{S}_x|^2 + |\mathbf{S}_y|^2}$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{|\mathbf{S}_x|}{|\mathbf{S}_y|} \right) \quad \text{Che rappresenta l'angolo formato dal vettore } \mathbf{S} \text{ con la verticale.}$$

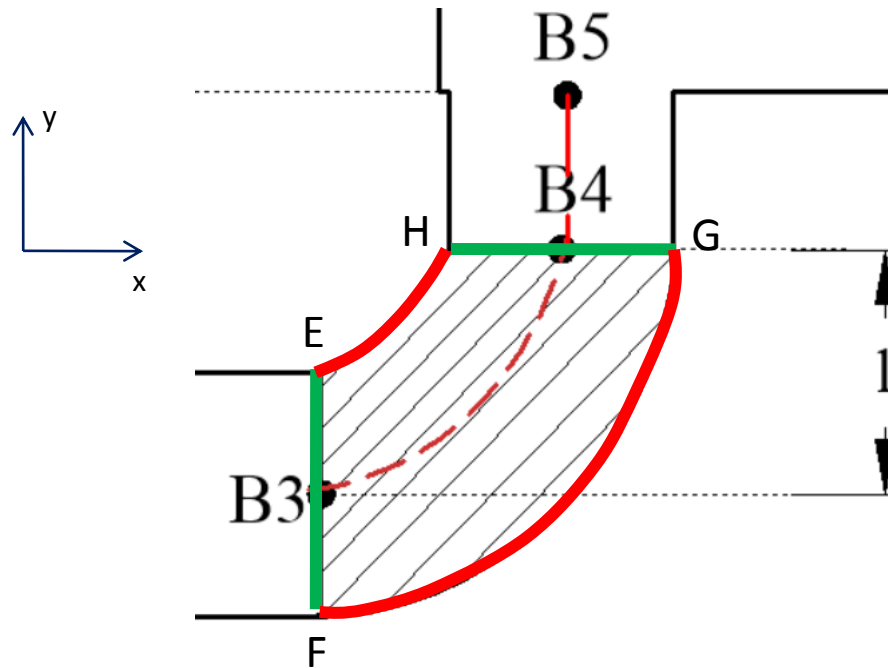


## ESERCIZIO 3: soluzione (3/3)

### CALCOLO DELLA SPINTA SULLA CONDOTTA B3-B4

2.1) isolare il volume di controllo:

- le superfici EF e HG sono fittizie
- il tronco di cono EFGH è la superficie della condotta reale



### ESERCIZIO 3: soluzione (3/3)

3.2) identificare i contributi partecipanti all'equilibrio globale superficie per superficie  
 $I = 0$

**G**

Superficie EF	$\Pi_{pEF} \Pi_{\mu EF} M_{EF} M'_{EF}$
---------------	---

Superficie GH	$\Pi_{pGH} \Pi_{\mu GH} M_{GH} M'_{GH}$
---------------	---

Superficie della condotta EFGH	$M_0 = M'_0 = 0 \quad \Pi_0$
--------------------------------	------------------------------

2.3) Scrivere l'equazione globale mettendo in evidenza i contributi individuati.

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_{pEF} + \Pi_{pGH} + \Pi_{\mu EF} + \Pi_{\mu GH} + M_{EF} + M_{GH} + M'_{EF} + M'_{GH} = 0$$

2.4) Semplificare l'espressione ipotizzando trascurabile il contributo di trasporto di quantità di moto da flusso turbolento e il contributo di sforzo viscoso in direzione normale.

$$\mathbf{G} + \Pi_0 + \Pi_{pEF} + \Pi_{pGH} + \cancel{\Pi_{\mu EF}} + \cancel{\Pi_{\mu GH}} + M_{EF} + M_{GH} + \cancel{M'_{EF}} + \cancel{M'_{GH}} = 0$$

2.5) Esplicitare la relazione tra **S** e  $\Pi_0$ .

$$\mathbf{S} = -\Pi_0 = \mathbf{G} + \Pi_{pEF} + \Pi_{pGH} + M_{EF} + M_{GH}$$

### ESERCIZIO 3: soluzione (3/3)

3.6) scomporre la spinta in direzione x e y

$$\mathbf{S}_x = \mathbf{G}_x + \Pi_{pEFx} + \Pi_{pGHx} + \mathbf{M}_{EFx} + \mathbf{M}_{GHx}$$

$$\mathbf{S}_y = \mathbf{G}_y + \Pi_{pEFy} + \Pi_{pGHy} + \mathbf{M}_{EFy} + \mathbf{M}_{GHy}$$

3.7) determinare modulo direzione e verso delle componenti

In direzione x:

$$\mathbf{G}_x = 0$$

$$\Pi_{pEFx} = p_{B3} A_{EF} \hat{i} \quad \longrightarrow \quad A_{EF} = \frac{\pi D_3^2}{4}$$

La pressione  $p_{B3}$  può essere ricavata impostando il bilancio di energia tra il punto B3 e un punto appartenente alla superficie libera del serbatoio di valle.

$$\frac{p_{B3}}{\gamma} + z_{B3} + \frac{\alpha V_3^2}{2g} = Z_b + \frac{n}{\gamma} + \alpha \frac{V_3^2}{2g} + (lb + lc) J_3$$

$$\mathbf{M}_{EFx} = \beta_3 \rho V_3^2 A_{EF} \hat{i} \quad \longrightarrow$$

$$\Pi_{pGHx} = 0$$

$$\mathbf{M}_{GHx} = 0$$

In direzione  $y$ :

$$\mathbf{G}_y = -\gamma W_{EFGH} \hat{j} \downarrow$$

$$\mathbf{M}_{GHy} = -\beta_3 \rho V_3^2 A_{GH} \hat{j} \downarrow$$

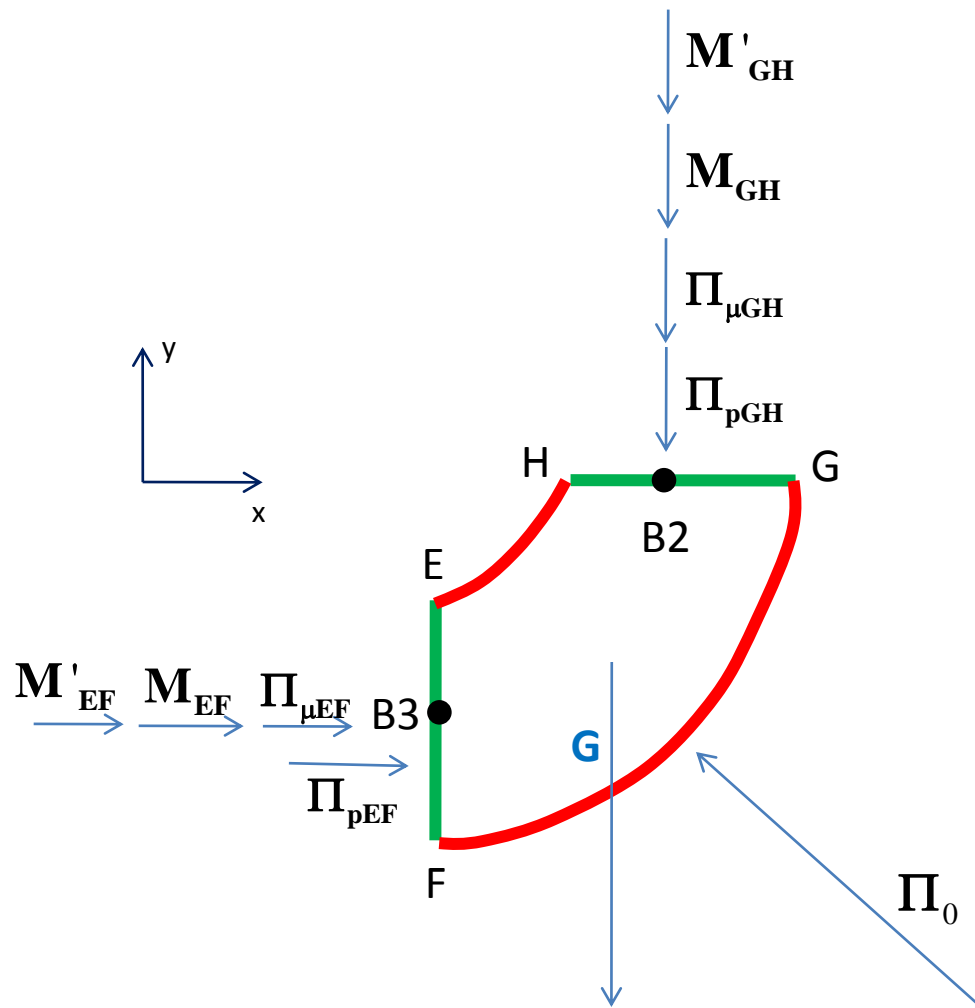
$$\mathbf{M}_{EFy} = 0$$

$$\Pi_{pEFy} = 0$$

$$\Pi_{pGHy} = -p_{B4} A_{GH} \hat{j} \downarrow \quad A_{GH} = \frac{\pi D_3^2}{4}$$

La pressione  $p_{B4}$  può essere ricavata impostando il bilancio di energia tra il punto B3 e B4

$$\frac{p_{B3}}{\gamma} + z_{B3} + \frac{\alpha V_3^2}{2g} = \frac{p_{B4}}{\gamma} + z_{B4} + \frac{\alpha V_3^2}{2g} + lcJ_3$$



3.8) Calcolare delle risultante S.

$$\mathbf{S}_x = \left( p_{B3} A_{EF} + \beta_3 \rho V_3^2 A_{EF} \right) \hat{i}$$

$$\mathbf{S}_y = \left( -\gamma W_{EFGH} - \beta_3 \rho V_3^2 A_{GH} - p_{B4} A_{GH} \right) \hat{j}$$

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{|\mathbf{S}_x|^2 + |\mathbf{S}_y|^2}$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{|\mathbf{S}_x|}{|\mathbf{S}_y|} \right) \quad \text{Che rappresenta l'angolo formato dal vettore } \mathbf{S} \text{ con la verticale.}$$