Esercizi sugli integrali

Integrali propri

1. Calcolare i seguenti integrali immediati:

$$I_1 = \int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_1^4 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x + x - 1}\,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}{1 + 6\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\sqrt{1 - \frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$I_5 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\operatorname{artg}\,\ln x}{x(1 + \ln^2 x)}\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x \operatorname{artg}\,\sqrt[3]{1 + 3x^2}}{\sqrt[3]{(1 + 3x^2)^2}(1 + \sqrt[3]{(1 + 3x^2)^2})}\,\mathrm{d}x$$

2. Calcolare i seguenti integrali:

$$I_1 = \int_1^4 |x - 2|\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^3 |x^2 - 3x + 2|\,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_{\ln 1/2}^{\ln 2} \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_{-1}^1 |x|\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$I_5 = \int_{-2}^3 \frac{|x|}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_{-2}^1 \frac{|1 + x|}{1 + |x|}\,\mathrm{d}x$$

3. Calcolare i seguenti integrali razionali:

(a) $$I = \int \frac{1 - 2x}{(1 + x)(1 + 2x)}\,\mathrm{d}x$$

(b) $$I = \int \frac{3 - x + x^2}{(1 + x)(1 - x)^2}\,\mathrm{d}x$$

(c) $$I = \int \frac{3x + 12}{(x - 2)^2(x + 1)^2}\,\mathrm{d}x$$

(d) $$I = \int \frac{1 - 2x}{1 + x + 2x^2}\,\mathrm{d}x$$

4. Calcolare, integrando per parti, i seguenti integrali:

$$I_1 = \int_0^1 x \operatorname{artg} x\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^1 x^2 \operatorname{artg} x\,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^1 x^2\,\ln x\,\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_0^{\pi} x^2\,\sin x\,\mathrm{d}x$$

5. Calcolare, integrando per parti, i seguenti integrali:

(a) $$I = \int \mathrm{e}^{2x}\,\cos \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

(b) $$I = \int \mathrm{e}^{2x}\,\sin \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

6. Calcolare, integrando per parti, i seguenti integrali:

   (a) $$I = \int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$$

   (b) $$I = \int \ln^3 x \, \mathrm{d}x$$

   (c) $$I = \int \ln^4 x \, \mathrm{d}x$$

7. Calcolare, integrando per parti, i seguenti integrali:

   (a) $$I = \int \arcsin x \, \mathrm{d}x$$

   (b) $$I = \int x \; \arcsin x \, \mathrm{d}x$$

   (c) $$I = \int x^2 \; \arcsin x \, \mathrm{d}x$$

8. Calcolare, integrando per parti, l'integrale

$$I = \int \left(\operatorname{artg} x + \frac{x}{1+x^2} \right) \ln x \, \mathrm{d}x$$

9. Calcolare, integrando per sostituzione, gli integrali

   (a) $$I = \int \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x$$

   (b) $$I = \int_1^2 \frac{1+2\ln(1+x)}{3+\ln(1+x)} \, \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

   (c) $$I = \int_{-1}^1 \frac{1+\operatorname{artg} x}{1+\operatorname{artg}^2 x} \, \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

10. Calcolare, integrando per sostituzione, gli integrali

   (a) $$I = \int \frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}} \, \frac{\mathrm{d}x}{x^{5/6}}$$

   (b) $$I = \int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}{1-\sqrt[6]{1+x}} \, \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

   (c) $$I = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$$

11. Calcolare, integrando per sostituzione, l'integrale

$$I = \int \frac{1+\sin x}{2+3\cos x - 2\sin x} \, \mathrm{d}x$$

Integrali impropri

1. Calcolare i seguenti integrali impropri immediati.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{artg} x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\operatorname{artg}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(\operatorname{artg} x)}}{(1+x^2)\operatorname{artg} x}\,\mathrm{d}x \qquad I_8 = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\ \ln(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$$

$$I_9 = \int_{-1}^{1} \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{\pi^2-4\operatorname{artg}^2 x}}\,\mathrm{d}x \qquad I_{10} = \int_0^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x$$

$$I_{11} = \int_0^1 (1+\ln x)\,x^x\,\mathrm{d}x \qquad I_{12} = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$I_{13} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\tan^2 x}{(\tan x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \qquad I_{14} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x\,(\tan x)^{4/3}}\,\mathrm{d}x$$

2. Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono.

(a) $$I = \int_0^{+\infty} \frac{x+x\sqrt{x}+\operatorname{artg} x}{(1+\mathrm{e}^{-x})\,(1+x^2\sqrt{1+x^2})}\,\mathrm{d}x$$

(b) $$I = \int_1^{+\infty} \frac{1+x\mathrm{e}^x+x^2\ln x}{(1+\mathrm{e}^x)\,(x^3+x\sqrt{1+x})}\,\mathrm{d}x$$

(c) $$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+x\sqrt{1+x}}{\ln(1+\mathrm{e}^x)\,\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$$

(d) $$I = \int_0^{1} \frac{x\sqrt{1+x}}{(\mathrm{e}^{2x}-1-2x-x^2)\,\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$$

(e) $$I = \int_0^{+\infty} \frac{2+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{1+x}\ \sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

(f) $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

(g) $$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\operatorname{artg} x\,\mathrm{d}x$$

(h) $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

3. Calcolare i seguenti integrali impropri.

(a) $$I = \int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

(b) $$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

(c) $$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

(d) $\qquad I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^3}\,\mathrm{d}x$

(e) $\qquad I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(f) $\qquad I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$

4. Calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'integrale

$$I_n = \int_0^1 \ln^n x \,\mathrm{d}x\,.$$

5. Dire per quali valori del parametro reale α è convergente l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(1+\sqrt{1+\sqrt{x}})(x+\sqrt{1+x\sqrt{x}})}{x^\alpha(x+x^2\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$$

Applicazioni geometriche

- **Lunghezza di un arco di curva.** Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile. La lunghezza della curva γ di equazione $y=f(x)$ è

$$L_\gamma = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

- **Baricentro di un arco di curva.** Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile. Le coordinate del baricentro (geometrico) $B\equiv(x_b,y_b)$ della curva γ di equazione $y=f(x)$ sono

$$x_B = \frac{1}{L_\gamma}\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad y_B = \frac{1}{L_\gamma}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

- **Area e volume di una superficie di rotazione.** Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile. Sia γ la curva di equazione $y=f(x)$ e sia Σ la superficie che si ottiene facendo ruotare γ attorno all'asse y. L'area e il volume della superficie Σ sono date da

$$\mathcal{A}_\Sigma = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \mathcal{V}_\Sigma = \pi\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\,.$$

- **Integrali ellittici (completi).**
  - Integrale ellittico completo di prima specie:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-x\sin^2\vartheta}}\,\mathrm{d}\vartheta \qquad (x\in\mathbb{R}\,,\, x<1)\,.$$

  - Integrale ellittico completo di seconda specie:

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x\sin^2\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \qquad (x\in\mathbb{R}\,,\, x\le 1)\,.$$

1. Calcolare la lunghezza e le coordinate del baricentro di una semicirconferenza γ di raggio r.

2. Calcolare l'area e il volume di un cilindro e di un cono aventi altezza h e raggio di base r.

3. Calcolare l'area e il volume di una sfera di raggio r.

4. Calcolare il volume dell'ellissoide Σ ottenuto dalla rotazione rotazione attorno all'asse y dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5. Calcolare il volume delle superfici ottenute dalla rotazione attorno all'asse y delle seguenti curve:

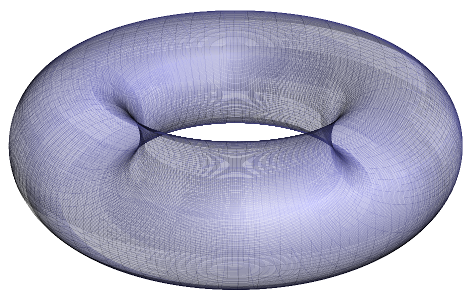
   (a) $y = \sin x$, con $x \in [0, \pi]$

   (b) $y = \ln x$, con $x \in [1, 2]$

   (c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,\ln x}$, con $x \in [2, 3]$

6. Calcolare, se possibile, l'area e il volume della superficie della superficie Σ ottenuta facendo ruotare attorno all'asse y la curva di equazione $y = 1/x$, con $x \in [1, +\infty)$.

7. Calcolare l'area e il volume del *toro*, ossia della superficie che si ottiene facendo ruotare una circonferenza γ attorno ad una retta che non interseca γ.



8. Dimostrare il seguente *Teorema di Pappo*. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Sia γ la curva di equazione $y = f(x)$, sia $B \equiv (x_B, y_B)$ il baricentro di γ e sia Σ la superficie che si ottiene facendo ruotare γ attorno all'asse y. Allora

$$\mathcal{A}_\Sigma = 2\pi\, y_B\, L_\gamma\,.$$

9. Calcolare $E(0)$, $E(1)$, $K(0)$ e $K(1)$.

10. Mostrare che gli integrali ellittici completi possono essere rappresentati anche nella forma seguente

$$K(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}} \qquad \text{e} \qquad E(x) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-xt^2}{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

11. Calcolare (mediante gli integrali ellittici) la lunghezza dell'arco di sinusoide di equazione $y = \sin x$, con $x \in [0, \pi]$.

12. Calcolare (mediante gli integrali ellittici) la lunghezza dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

13. Calcolare la derivata prima dell'integrale ellittico $E(x)$.

Risposte

Integrali propri

1. Si ha

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 2\int_1^4 (\sqrt{x})'\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\Big[\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\Big]_1^4 = 2\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)\\
I_2 &= \int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\mathrm{e}^x-1)'\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}\Big]_0^1 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}-1\\
I_3 &= \int_0^{\ln 2} \frac{(1+6\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{2x})'}{1+6\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+6\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{2x})\Big]_0^{\ln 2} = \frac{1}{6}\ln\frac{5}{2}\\
I_4 &= \int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)'\sqrt{1-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\\
I_5 &= \int_1^{\mathrm{e}} (\mathrm{artg}\ \ln x)'\mathrm{artg}\ \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{artg}^{\ 2}\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\pi^2}{32}\\
I_6 &= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} (\mathrm{artg}\ \sqrt[3]{1+3x^2})'\mathrm{artg}\ \sqrt[3]{1+3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big[\mathrm{artg}^{\ 2}\sqrt[3]{1+3x^2}\Big]_0^{\ln 2} = \frac{1}{4}\ \mathrm{artg}\ \sqrt[3]{7}-\frac{\pi^2}{64}
\end{aligned}
$$

2. Si ha

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\\
I_2 &= \int_0^3 (x-1)(x-2)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 (x^2-3x+2)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 (x^2-3x+2)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2-3x+2)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{6}\\
I_3 &= \int_{\ln 1/2}^0 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\\
I_4 &= -\int_{-1}^0 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2-2\mathrm{e}^{-1}\\
I_5 &= -\int_{-2}^0 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^3 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{50}\\
I_6 &= -\int_{-2}^{-1} \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}x = 1+\ln\frac{16}{9}
\end{aligned}
$$

3. (a) $I = 2\ln|1+2x| - 3\ln|1+x| + c$

   (b) $I = \dfrac{5}{4}\ln|1+x| - \dfrac{1}{4}\ln|1-x| + \dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{1-x} + c$

   (c) $I = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| + \dfrac{3x}{2+x-x^2} + c$

   (d) $I = \dfrac{3}{\sqrt{7}}\ \mathrm{artg}\ \dfrac{1+4x}{\sqrt{7}} - \dfrac{1}{2}\ln|1+x+2x^2| + c$

4. Integrando per parti, si ottiene

$$I_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \qquad I_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ \ln 2$$

$$I_3 = \frac{8}{3}\ \ln 2 - \frac{7}{9} \qquad I_4 = \pi^2 - 4$$

5. (a) Integrando per parti, si ha

$$I = \int e^x (e^x\ \cos e^x)\ dx = e^x\ \sin e^x - \int e^x\ \sin e^x\ dx = e^x\ \sin e^x + \cos e^x + c\,.$$

(b) Analogamente, si ottiene $I = -e^x\ \cos e^x + \sin e^x + c\,.$

6. (a) Integrando per parti, si ha

$$I = \int 1 \cdot \ln^2 x\ dx = x \ln^2 x - \int x\ 2\,\frac{\ln x}{x}\ dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x\ dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c\,.$$

(b) Integrando per parti ed usando il risultato precedente, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int 1 \cdot \ln^3 x\ dx = x \ln^3 x - \int x\ 3\,\frac{\ln^2 x}{x}\ dx = \\ &= x \ln^3 x - 3 \textstyle\int \ln^2 x\ dx = x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x + c\,. \end{aligned}$$

(c) Integrando per parti ed usando il risultato precedente, si ottiene

$$I = x \ln^4 x - 4x \ln^3 x + 12x \ln^2 x - 24x \ln x + 24x + c\,.$$

7. (a) Integrando per parti, si ottiene

$$I = x\ \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx = x\ \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c\,.$$

(b) Integrando per parti ed usando il risultato precedente, si ha

$$\begin{aligned} I &= x(x\ \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}) - \int (x\ \arcsin x + \sqrt{1 - x^2})\ dx \\ &= x^2\ \arcsin x + x\sqrt{1 - x^2} - I - \int \sqrt{1 - x^2}\ dx\,. \end{aligned}$$

Poiché

$$\int \sqrt{1 - x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\ \arcsin x + \text{cost.}\,,$$

si ha

$$2I = x^2\ \arcsin x + x\sqrt{1 - x^2} - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}\ \arcsin x + \text{cost.}$$

ossia

$$I = \frac{2x^2 - 1}{4}\ \arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1 - x^2} + \text{cost.}$$

(c) Integrando per parti ed usando il risultato precedente, si ha

$$\begin{aligned} I &= x\left(\frac{2x^2-1}{4}\,\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}\right) - \int\left(\frac{2x^2-1}{4}\,\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2x^3-x}{4}\,\arcsin x + \frac{x^2}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\,I + \frac{1}{4}\int \arcsin x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Poiché

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)'\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\,(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + \text{cost.}\,,$$

si ha

$$\frac{3}{2}\,I = \frac{2x^3-x}{4}\,\arcsin x + \frac{x^2}{4}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}\,(x\,\arcsin x + \sqrt{1-x^2}) + \frac{1-x^2}{12}\sqrt{1-x^2} + \text{cost.}$$

ossia

$$I = \frac{x^3}{3}\,\arcsin x + \frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2} + \text{cost.}$$

8. Poiché

$$I = \int (x\,\operatorname{artg} x)'\,\ln x\,\mathrm{d}x\,,$$

integrando per parti, si ha

$$I = (x\,\operatorname{artg} x)\,\ln x - \int \frac{x\,\operatorname{artg} x}{x}\,\mathrm{d}x = (x\,\operatorname{artg} x)\,\ln x - \int \operatorname{artg} x\,\mathrm{d}x$$

ossia

$$I = (x\,\operatorname{artg} x)\,\ln x - x\,\operatorname{artg} x + \ln\sqrt{1+x^2} + c\,.$$

9. (a) Posto $t = \mathrm{e}^x$, si ha $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/t$ e

$$I = \int \frac{1+t}{(1-t)t}\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{2}{1-t} + \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = -2\ln|1-t| + \ln|t| + c = -2\ln|1-\mathrm{e}^x| + x + c\,.$$

(b) Posto $t = \ln(1+x)$, si ha $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/(1+x)$ e

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1+2t}{3+t}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(2 - \frac{5}{3+t}\right)\mathrm{d}t = \Big[2x - 5\ln|3+t|\Big]_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln\left[\frac{9}{4}\left(\frac{3+\ln 2}{3+\ln 3}\right)^5\right].$$

(c) Posto $t = \operatorname{artg} x$, si ha $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/(1+x^2)$ e

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1+t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\operatorname{artg} x + \frac{1}{2}\,\ln(1+t^2)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2\,\operatorname{artg}\frac{\pi}{4}\,.$$

10. (a) Posto $t = \sqrt[6]{x}$, si ha $x = t^6$, $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$ e

$$I = \int \frac{1+t^3+t^2}{1+t^3}\,\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^5} = 6\int\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{3t^2}{1+t^3}\right)\mathrm{d}t = 6\left[t + \frac{1}{3}\,\ln|1+t^3|\right] + c.$$

Quindi, si ha

$$I = 6\sqrt[6]{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + c\,.$$

(b) Posto $t = \sqrt[6]{1+x}$, si ha $x = t^6 - 1$, $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$ e

$$I = \int \frac{t^3+t^2}{1-t}\,\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^6} = 6\int \frac{t^2+t}{1-t}\,\mathrm{d}t = 6\int\left(\frac{2}{1-t} - 2 - t\right)\mathrm{d}t = 6[-2\ln|1-t| - 2t - t^2/2] + c\,.$$

Quindi, si ha

$$I = -12\ln|1-\sqrt[6]{1+x}| - 12\sqrt[6]{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + c\,.$$

(c) Posto $t = \sqrt[6]{x}$, si ottiene

$$I = -\frac{409}{70} + \frac{3}{2}\pi + \ln 8\,.$$

11. Posto $t = \tan x/2$, si ha

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\,.$$

Quindi l'integrale diventa

$$I = \int \frac{1+2t+t^2}{3-4t+t^2}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int \frac{1+2t+t^2}{(t-1)(t-3)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Spezziamo la funzione integranda in somma di frazioni semplici. Si ha

$$\frac{1+2t+t^2}{(t-1)(t-3)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-3} + \frac{C+Dt}{t^2+1}\,.$$

Sommando e semplificando a secondo membro e uguagliando i numeratori, si trova il sistema lineare

$$\begin{cases} A+B+D=0 \\ -3A-B+C-4D=1 \\ A+B-4C+3D=2 \\ -3A-B+3C=1\,. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema, si ottiene $A=-1$, $B=4/5$, $C=-2/5$, $D=1/5$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned} I &= 2\int\left(-\frac{1}{t-1} + \frac{4}{5}\,\frac{1}{t-3} - \frac{1}{5}\,\frac{2-t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= -2\ln|t-1| + \frac{4}{5}\,\ln|t-3| - \frac{4}{5}\,\mathrm{artg}\,t + \frac{1}{5}\,\ln(1+t^2) + c\,. \end{aligned}$$

Infine, si ha

$$I = -2\ln\left|\tan\frac{x}{2} - 1\right| + \frac{8}{5}\,\ln\left|\tan\frac{x}{2} - 3\right| - \frac{2}{5}\,x + \frac{1}{5}\,\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) + c\,.$$

Integrali impropri

1. Integrando in senso improprio, si ha

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \big[\arcsin x\big]_0^1 = \frac{\pi}{2} \\
I_2 &= \int_0^1 (\arcsin x)' \sqrt{\arcsin x}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\Big[\arcsin^{3/2} x\Big]_0^1 = \frac{2}{3}\arcsin^{3/2} 1 = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
I_3 &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+\mathrm{e}^{-x})'}{1+\mathrm{e}^{-x}}\, \mathrm{d}x = \Big[\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\Big]_0^{+\infty} = \ln 2 \\
I_4 &= \int_0^{+\infty} (1+\mathrm{e}^{-x})'(1+\mathrm{e}^{-x})^{-3/2}\, \mathrm{d}x = 2\Big[\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}}\Big]_0^{+\infty} = 2-\sqrt{2} \\
I_5 &= \int_0^{+\infty} (\mathrm{artg}\, x)' \mathrm{e}^{\mathrm{artg}\, x}\, \mathrm{d}x = \big[\mathrm{e}^{\mathrm{artg}\, x}\big]_0^{+\infty} = \mathrm{e}^{\pi/2}-1 \\
I_6 &= \int_0^{+\infty} (\mathrm{artg}\, \mathrm{e}^x)'\ \mathrm{artg}\, \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{artg}\,^2 \mathrm{e}^x\Big]_0^{+\infty} = \frac{3}{32}\,\pi^2 \\
I_7 &= \int_0^{+\infty} (\ln(\mathrm{artg}\, x))' \sqrt{\ln(\mathrm{artg}\, x)}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\Big[(\ln(\mathrm{artg}\, x))^{3/2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{2}{3}\Big(\ln^{3/2}\frac{\pi}{2} - \ln^{3/2}\frac{\pi}{4}\Big) \\
I_8 &= \int_{-\infty}^0 (\ln(1+\mathrm{e}^x))'\ \ln(1+\mathrm{e}^x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\ln^2(1+\mathrm{e}^x)\Big]_{-\infty}^0 = \frac{1}{2}\,\ln^2 2 \\
I_9 &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{artg}\, x)^2}}\, \mathrm{d}x = \Big[\arcsin\Big(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{artg}\, x\Big)\Big]_{-1}^1 = 2\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \\
I_{10} &= \int_0^{\mathrm{e}} \frac{(1+x\ln x)'}{1+x\ln x}\, \mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x\ln x)\Big]_0^{\mathrm{e}} = \ln(1+\mathrm{e}) \\
I_{11} &= \int_0^1 (x^x)'\, x^x\, \mathrm{d}x = \Big[x^{2x}\Big]_0^1 = 0 \\
I_{12} &= \int_1^{+\infty} (1+\ln x)'\sqrt{1+\ln x}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\Big[(1+\ln x)^{3/2}\Big]_1^{+\infty} = +\infty \\
I_{13} &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(\tan x)'}{(\tan x)^{3/2}}\, \mathrm{d}x = -2\,\Big[\frac{1}{\sqrt{\tan x}}\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2 \\
I_{14} &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(\tan x)'}{(\tan x)^{4/3}}\, \mathrm{d}x = -3\,\Big[\frac{1}{\sqrt[3]{\tan x}}\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = 3\,.
\end{aligned}
$$

2. (a) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $[0,+\infty)$. Inoltre, per $x\to+\infty$, si ha
$$f(x) \sim \frac{x\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \qquad (\alpha = 3/2 > 1)\,.$$
Per il criterio del confronto asintotico, la funzione $f(x)$ è integrabile in senso improprio sull'intervallo di integrazione e l'integrale converge.

   (b) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $[1,+\infty)$. Inoltre, per $x\to+\infty$, si ha
$$f(x) \sim \frac{x\,\mathrm{e}^x}{x^3\mathrm{e}^x} = \frac{1}{x^2} \qquad (\alpha = 2 > 1)\,.$$
Per il criterio del confronto asintotico, la funzione $f(x)$ è integrabile in senso improprio sull'intervallo di integrazione e l'integrale converge.

(c) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $[1, +\infty)$. Inoltre, per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x\sqrt{x}}{x^{3/2} \ln e^x} = \frac{1}{x} \qquad (\alpha = 1 \not> 1).$$

Per il criterio del confronto asintotico, la funzione $f(x)$ non è integrabile in senso improprio sull'intervallo di integrazione e l'integrale non converge.

(d) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $(0, 1]$. Inoltre, per $x \to 0^+$, si ha $e^{2x} - 1 - 2x - x^2 = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) - 1 - 2x - x^2 = x^2 + o(x^2) \sim x^2$, e quindi

$$f(x) \sim \frac{x}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \qquad (\alpha = 2/2 \not< 1).$$

Per il criterio del confronto asintotico, la funzione $f(x)$ non è integrabile in senso improprio sull'intervallo di integrazione e l'integrale non converge.

(e) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $(0, +\infty)$. Inoltre, agli estremi dell'intervallo, si ha:

$$U(0): \quad f(x) \sim \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{x^{1/3}} \qquad \text{integrabile in senso improprio } (1/3 < 1)$$

$$U(+\infty): \quad f(x) \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{2/3}} \qquad \text{non integrabile in senso improprio } (2/3 \not> 1).$$

L'integrale non converge.

(f) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $(0, +\infty)$. Inoltre, agli estremi dell'intervallo, si ha:

$$U(0): \quad f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{1/3}} \qquad \text{integrabile in senso improprio } (1/3 < 1)$$

$$U(+\infty): \quad f(x) \sim \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{e^x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x}} \qquad \text{integrabile in senso improprio } (3/2 > 1).$$

L'integrale converge.

(g) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $(0, +\infty)$. Inoltre, poiché la funzione arcotangente è limitata e $e^x \geq x^2$ per ogni $x \geq 0$, si ha:

$$|e^{-x} \operatorname{artg} x| \leq \frac{\pi}{2} e^{-x} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{e^x} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^2}.$$

Quindi l'integrale converge assolutamente. Di conseguenza, l'integrale converge.

(h) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $(0, +\infty)$. Inoltre, per $x \to +\infty$, si ha:

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{x^{1/4}} \qquad \text{non integrabile in senso improprio } (1/4 < 1).$$

L'integrale non converge.

3. (a) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $[0, 1)$ e $f(x) \sim 1/(1-x)^{1/2}$ per $x \to 1^-$. Quindi l'integrale converge. Posto $t = \sqrt{1-x}$, si ha $x = 1 - t^2$, $dx = -2t dt$ e

$$I = -2 \int_1^0 \frac{1 - t^2}{t} \, t dt = 2 \int_0^1 (1 - t^2) \, dt = 2 \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

(b) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $[0,+\infty)$ e $f(x) \sim 1/x^2$ per $x \to +\infty$. Quindi l'integrale converge. Spezzando $f(x)$ nella di frazioni semplici, si ha

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{1+x}+\frac{1+x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\ln(1+x)+\operatorname{artg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}+\operatorname{artg} x\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

(c) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $[0,+\infty)$ e $f(x) \sim 1/x^3$ per $x \to +\infty$. Quindi l'integrale converge. Spezzando $f(x)$ nella di frazioni semplici, si ha

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)+\operatorname{artg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}+\operatorname{artg} x\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

(d) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $[0,+\infty)$ e $f(x) \sim 1/(3x^3)$ per $x \to +\infty$. Quindi l'integrale converge. Posto $t = x+\sqrt{1+x^2}$, si ha $x = (t^2-1)/(2t)$, $\mathrm{d}x = (t^2+1)/(2t^2)\,\mathrm{d}t$ e

$$I = \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^3}\,\frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^5}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{t^4}\right]_1^{+\infty} = \frac{3}{8}\,.$$

(e) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $(0,+\infty)$. Inoltre si ha $f(x) \sim 1/\sqrt{x}$ per $x \to 0^+$ e $f(x) \sim 1/x^{3/2}$ per $x \to +\infty$. Quindi l'integrale converge. Posto $t = \sqrt{x}$, si ha $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ e

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)t} = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\Big[\operatorname{artg} t\Big]_0^{+\infty} = \pi\,.$$

(f) La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $(0,+\infty)$. Inoltre si ha $f(x) \sim 1/\sqrt{x}$ per $x \to 0^+$ e $f(x) \sim 1/x^2$ per $x \to +\infty$. Quindi l'integrale converge. Posto $t = \sqrt{x}$, si ha $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ e

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t+t^4} = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

4. Per $n = 0$, si ha

$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{d}x = \big[x\big]_0^1 = 1\,.$$

Per $n > 0$, integrando per parti, si ha

$$I_n = \int_0^1 \ln^n x\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 0^+}\int_\beta^1 1\cdot\ln^n x\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to 0^+}\left(\Big[x\ln^n x\Big]_\beta^1 - n\int_\beta^1 \ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \lim_{\beta\to 0^+}\left(\beta\ln^n\beta - n\int_\beta^1 \ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{\beta\to 0^+}\beta\ln^n\beta - n\lim_{\beta\to 0^+}\int_\beta^1 \ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x\,,$$

ossia

$$I_n = -nI_{n-1}\,.$$

Pertanto, si ha

$$I_n = -nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = -n(n-1)(n-2)I_{n-3} = \cdots = (-1)^n\, n!\, I_0\,,$$

ossia

$$I_n = (-1)^n\, n!\,.$$

5. La funzione integranda $f(x)$ è continua e positiva sull'intervallo $(0, +\infty)$. Per $x \to 0^+$ si ha

$$f(x) \sim \frac{2}{x^{\alpha+1}}\,.$$

Quindi $f(x)$ è integrabile in $x = 0$ per $\alpha + 1 < 1$, ossia per $\alpha < 0$. Per $x \to +\infty$ si ha

$$f(x) \sim \frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x}\,\sqrt[4]{x}}{x^\alpha \cdot x^2 \sqrt{x}} = \frac{x}{x^{\alpha+5/2}} = \frac{1}{x^{\alpha+3/2}}\,.$$

Quindi $f(x)$ è integrabile a $+\infty$ per $\alpha + 3/2 > 1$, ossia per $\alpha > -1/2$. In conclusione, l'integrale converge per $-1/2 < \alpha < 0$.

Applicazioni geometriche

1. Consideriamo la circonferenza di centro l'origine e raggio r. Poiché la sua equazione è $x^2 + y^2 = r^2$, la semicirconferenza γ ha equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $x \in [-r, r]$. Allora, la lunghezza di γ è

$$\begin{aligned} L_\gamma &= \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1 - (x/r)^2}}\, \mathrm{d}x \\ &= \Big[r \arcsin \tfrac{x}{r} \Big]_{-r}^{r} = r(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = r\left(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\right) = \pi r\,. \end{aligned}$$

Per simmetria, si ha $x_B = 0$. Inoltre, si ha

$$y_B = \frac{1}{\pi r} \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x = \frac{2r}{\pi}\,.$$

2. Il cilindro Σ_1 può essere generato dalla rotazione attorno all'asse y della curva di equazione $y = r$, con $x \in [0, h]$. Analogamente, il cono Σ_1 può essere generato dalla rotazione attorno all'asse y della curva di equazione $y = mx$, con $x \in [0, h]$, dove $r = mh$. Allora, i volumi sono

$$\mathcal{V}_{\Sigma_1} = \pi \int_0^h r^2\, \mathrm{d}x = \pi h r^2 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{V}_{\Sigma_2} = \pi \int_0^h m^2 x^2\, \mathrm{d}x = \frac{\pi m^2 h^2}{3} = \frac{\pi h r^2}{3}\,.$$

In particolare, si ha $\mathcal{V}_{\Sigma_2} = \frac{1}{3}\mathcal{V}_{\Sigma_1}$. Le aree sono

$$\mathcal{A}_{\Sigma_1} = 2\pi \int_0^h r\, \mathrm{d}x = 2\pi h r \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_{\Sigma_2} = 2\pi \int_0^h mx\sqrt{1 + m^2}\, \mathrm{d}x = \pi m h^2 \sqrt{1 + m^2} = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}\,.$$

3. La sfera S di raggio r può essere generata dalla rotazione attorno all'asse y della semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $x \in [-r, r]$. Pertanto, si ha

$$\mathcal{A}_S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-r}^{r} r\, \mathrm{d}x = 4\pi r^2$$

$$\mathcal{V}_S = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, \mathrm{d}x = \pi \Big[r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

4. L'ellissoide Σ può essere generato dalla rotazione della semiellisse di equazione $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, con $x \in [-a, a]$. Pertanto, si ha

$$\mathcal{V}_\Sigma = \pi \int_{-a}^{a} b^2(1 - x^2/a^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\,\pi a b^2\,.$$

5. (a) $\mathcal{V}_\Sigma = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi\Big[\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x\Big]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}\,.$

   (b) $\mathcal{V}_\Sigma = \pi \int_1^2 \ln^2 x\,\mathrm{d}x = \pi\Big[x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x\Big]_1^2 = 2\pi(\ln 2 - 1)^2\,.$

   (c) $\mathcal{V}_\Sigma = \pi \int_2^3 \frac{1}{x\,\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \ln 3/2}{\ln 2 \cdot \ln 3}\,.$

6. Il volume di Σ è dato da

$$\mathcal{V}_\Sigma = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{+\infty} = \pi\,.$$

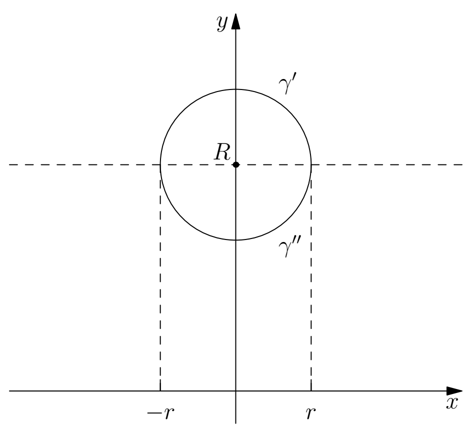
   Per l'area, invece, si ha

$$\mathcal{A}_\Sigma = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,\mathrm{d}x = +\infty\,,$$

   poiché, per $x \to +\infty$, la funzione funzione integranda non è integrabile, essendo

$$\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \sim \frac{1}{x}\,.$$

7. Il toro può essere generato dalla rotazione attorno all'asse y della circonferenza γ di centro $(0, R)$ e raggio r, con $R > r$. La circonferenza γ ha equazione $x^2 + (y - R)^2 = r^2$. Spezziamo ora γ nella semicirconferenza superiore γ' e nella semicirconferenza inferiore γ'', come in figura:



   Allora γ' ha equazione $y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ e γ'' ha equazione $y = R - \sqrt{r^2 - x^2}$. Siano Σ' e Σ'' le superfici di rotazione generate da queste due semicirconferenze. Allora, si ha

$$\mathcal{V}_{\Sigma'} = \pi \int_{-r}^{r} (R + \sqrt{r^2 - x^2})^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \mathcal{V}_{\Sigma''} = \pi \int_{-r}^{r} (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Quindi, il volume del toro Σ è

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_\Sigma &= \mathcal{V}_{\Sigma'} - \mathcal{V}_{\Sigma''} \\
&= \pi \int_{-r}^{r} (R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_{-r}^{r} (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-r}^{r} \left[(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \right] \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-r}^{r} (R + \sqrt{r^2 - x^2} - R + \sqrt{r^2 - x^2})(R + \sqrt{r^2 - x^2} + R - \sqrt{r^2 - x^2}) \, \mathrm{d}x \\
&= 4R\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= 4R\pi \left[\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \right]_{-r}^{r} \\
&= 4R\pi \, \frac{\pi r^2}{2}
\end{aligned}$$

ossia

$$\mathcal{V}_\Sigma = 2\pi^2 R r^2 \, .$$

Analogamente, si ha

$$\mathcal{A}_{\Sigma'} = 2\pi r \int_{-r}^{r} \frac{R + \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \mathcal{A}_{\Sigma''} = 2\pi r \int_{-r}^{r} \frac{R - \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x \, .$$

Quindi, l'area del toro è

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\Sigma &= \mathcal{A}_{\Sigma'} - \mathcal{A}_{\Sigma''} \\
&= 2\pi r \int_{-r}^{r} \frac{R + \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x + 2\pi r \int_{-r}^{r} \frac{R - \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x \\
&= 2\pi r \int_{-r}^{r} \frac{2R}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x \\
&= 4\pi R \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1 - (x/r)^2}} \, \mathrm{d}x \\
&= 4\pi R \left[r \arcsin \frac{x}{r} \right]_{-r}^{r} \\
&= 4\pi R \, r\pi
\end{aligned}$$

ossia

$$\mathcal{A}_\Sigma = 4\pi^2 R r \, .$$

8. Utilizzando le formule date, si ha

$$\mathcal{A}_\Sigma = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \, \mathrm{d}x = 2\pi \left(\frac{1}{L_\gamma} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \, \mathrm{d}x \right) L_\gamma = 2\pi \, y_b \, L_\gamma \, .$$

9. Si ha $E(0) = K(0) = \pi/2$, $E(1) = 1$. L'integrale $K(1)$ diverge, ossia $K(x) \to +\infty$ per $x \to 1^-$.

10. Posto $t = \sin x$, si ha $\mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \, \mathrm{d}t = \sqrt{1 - t^2} \, \mathrm{d}x$. Pertanto, gli integrali ellittici $K(x)$ ed $E(x)$ diventano

$$K(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - xt^2}} \, \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - xt^2)}}$$

$$E(x) = \int_0^1 \sqrt{1 - xt^2}\ \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-xt^2}{1-t^2}}\ \mathrm{d}t\,.$$

11. La lunghezza dell'arco di sinusoide considerato è

$$\begin{aligned} L_\gamma &= \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int_0^\pi \sqrt{2-\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1-\frac{1}{2}\ \sin^2 x}\ \mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{2}\ \sin^2 x}\ \mathrm{d}x + \sqrt{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1-\frac{1}{2}\ \sin^2 x}\ \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Posto $t = \pi - x$, si ha $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$ e il secondo integrale diventa

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1-\frac{1}{2}\ \sin^2 x}\ \mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1-\frac{1}{2}\ \sin^2 (t+\pi)}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{2}\ \sin^2 t}\ \mathrm{d}t\,.$$

Pertanto, si ha

$$L_\gamma = 2\sqrt{2}\ E(1/2)\,.$$

12. Per simmetria, la lunghezza L dell'ellisse in questione è quattro volte la lunghezza L' dell'arco di equazione $y = b\sqrt{1-x^2/a^2}$, con $x \in [0,a]$. Posto $k = b/a$, si ha

$$L' = \int_0^a \sqrt{1+\frac{k^2x^2}{a^2-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int_0^a \sqrt{\frac{a^2-(1-k^2)x^2}{a^2-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int_0^a \sqrt{\frac{1-(1-k^2)x^2/a^2}{1-x^2/a^2}}\ \mathrm{d}x\,.$$

Posto $t = x/a$, si ha $\mathrm{d}x = a\mathrm{d}t$ e

$$L' = a\int_0^1 \sqrt{\frac{1-(1-k^2)t^2}{1-t^2}}\ \mathrm{d}t = aE(1-k^2)\,.$$

Quindi, la lunghezza dell'ellisse è

$$L = 4a\ E\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\,.$$

13. Derivando $E(x)$ rispetto a x, si ha

$$\begin{aligned} E'(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-x\sin^2\vartheta}\ \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin^2\vartheta}{2\sqrt{1-x\sin^2\vartheta}}\ \mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{1}{2x}\int_0^{\pi/2} \frac{(1-x\sin^2\vartheta)-1}{\sqrt{1-x\sin^2\vartheta}}\ \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2x}\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{1-x\sin^2\vartheta} - \frac{1}{\sqrt{1-x\sin^2\vartheta}}\right)\mathrm{d}\vartheta \end{aligned}$$

ossia

$$E'(x) = \frac{E(x)-K(x)}{2x}\,.$$