Geometria Analitica: Esercizi

1. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, sia $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base canonica. Dati i vettori $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$, determinare $|\boldsymbol{u}|$, $|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{k}$.

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, sia $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base canonica. Dati i vettori $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$, determinare il vettore proiezione ortogonale di $\boldsymbol{v}$ lungo $\boldsymbol{u}$.

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, sia $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base canonica. Dato $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, determinare i coefficienti $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che il vettore $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ sia ortogonale a $\boldsymbol{u}$ e soddisfi $|\boldsymbol{v}| = 1$.

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, determinare

   (a) le equazioni parametriche e cartesiane degli assi coordinati;

   (b) le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per $A = (1, 0, 1)$ e avente direzione $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$;

   (c) le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti $A = (1, 0, 1)$ e $B = (-1, 2, 0)$;

   (d) le equazioni parametriche e cartesiane dei piani coordinati.

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, sono dati i punti $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 0, 2)$ e $C = (2, 1, 1)$.

   (a) Verificare che i punti A, B e C non sono allineati.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente A, B e C.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, determinare l'equazione cartesiana del piano per il punto $A = (1, 0, 1)$ perpendicolare al vettore $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

7. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, sia r la retta di equazioni $x - y + z = 2x + y - z - 1 = 0$.

   (a) Determinare un sistema di equazioni parametriche per r e la direzione di r.

   (b) La retta è parallela all'asse z?

   (c) La retta r è parallela al piano π di equazione $x + y - z = 1$?

8. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, sono dati il punto $A = (1, 0, 1)$, la retta r di equazioni $z - 1 = x - y + z = 0$, il piano π di equazione $x - y = 0$. Determinare:
   (a) le equazioni della retta per A ortogonale al piano π;
   (b) le equazioni della retta per A e parallela alla retta r;
   (c) l'equazione del piano per A ortogonale alla retta r.
9. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, sono date le rette r di equazioni $x + y = x - 2z - 1 = 0$, e s passante per $A = (1, -1, 0)$ con direzione $v = i - j + 2k$. Verificare che le rette r e s si interesecano nel punto P.
10. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, sono dati il punto $P = (1, 1, 0)$, la retta r di equazioni $x + y = z = 0$ e il piano π di equazione $x + y - z = 0$. Determinare le distanze $d(P, r)$ e $d(P, \pi)$.
11. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, sia Σ la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z = 0$. Determinare:
    (a) centro e raggio di Σ;
    (b) la distanza del centro di Σ dal piano π di equazione $x + y = 0$;
12. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y)$, sia γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x + y = 0$. Determinare:
    (a) centro e raggio di γ;
    (b) le equazioni della retta tangente a γ nel punto $O = (0, 0, 0)$.
13. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, sia $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base canonica. Dati i vettori $u = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ e $v = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, determinare il vettore $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ e l'area del parallelogramma individuato dai vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.
14. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, sia $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base canonica. Dati i vettori $u = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $v = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$ e $w = 2\boldsymbol{j}$, verificare che $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})$.