Equazioni differenziali del II ordine

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' - 5y' + 6y = f(x)$, con a) $f(x) = 7$, b) $f(x) = e^x$, c) $f(x) = e^{2x}$.

3. Sia y la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 18x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

si calcoli $y'(1)$.

4. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' - 4y' + 4y = 0$.

5. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' + 3y = 0$.

6. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' + 3y = x + 2\cos x$.

7. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

8. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' + 2y' + 3y = 2e^{3x}$.

9. Determinare una soluzione particolare della seguente equazione differenziale: $3y'' + 8y' + 4y = e^{-x} + \sin x$.

10. Determinare una soluzione particolare della seguente equazione differenziale: $y'' - 2y' + y = f(x)$, con a) $f(x) = x^3 - 6x^2$, b) $f(x) = e^x + e^{2x}$.

11. Determinare una soluzione particolare della seguente equazione differenziale: $y'' + y = \sin x$.

12. Determinare una soluzione particolare della seguente equazione differenziale: $y'' + 5y' + 6y = f(x)$, con a) $f(x) = 2e^{-2x}$, b) $f(x) = \cos x$.

13. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' + 4y = 4\cos 2x$.

14. Sia y la soluzione dell'equazione differenziale: $y'' + 4y' + 4y = 0$, tale che $\lim_{x\to+\infty} y'(x)e^{2x} = 2$. Si determini $y(0)$.

15. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y = 4e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

16. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 4y'' + y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

17. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \cos 2x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

18. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{1}{16}, \end{cases}$$

e tracciare il grafico della soluzione in un intorno di $x = 0$.

19. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$.

20. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y'' + 4y' + 13y = \sin 3x$.

21. a) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $y = xe^{-5x}$ sia soluzione di $y'' + ay' + by = 0$. b) Scrivere l'integrale generale dell'equazione coi valori di a e b trovati. c) Determinare la soluzione del problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = 0, y'(0) = 2$, e calcolarne l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$.

22. Determinare $f(x)$ tale che la funzione $y(x) = 1 + \cos 4x$ sia soluzione dell'equazione $y'' + 4y = f(x)$. Determinare l'integrale generale dell'equazione avente come termine noto la funzione $f(x)$ trovata.

23. Determinare $p(x), q(x)$ tali che $y_1(x) = x,\ y_2(x) = x^2$ siano soluzioni della seguente equazione differenziale: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ x > 0$. Scrivere l'integrale generale dell'equazione.

24. Data l'equazione differenziale: $y'' + a(x)y' + b(x)y = -3b(x)$, sapendo che l'equazione omogenea associata ha le due soluzioni $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$, a) scrivere l'integrale generale dell'equazione data, b) trovare $a(x)$ e $b(x)$.

25. Scrivere l'equazione differenziale lineare omogenea del II ordine a coefficienti costanti, che ha come soluzioni le funzioni $y = \sin x,\ y = \cos x$.

26. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$, dopo aver determinato due soluzioni indipendenti della forma $y = x^a$.

27. Data l'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{6}{x^4}$, verificare che $y = a + bx^{-2}$ è una soluzione particolare per opportuni valori di a e b. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{6}{x^4} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

28. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y'^2 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

29. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y'^2 = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

30. Risolvere l'equazione differenziale $xy'' + 2y' + xy = 0$ operando la sostituzione $z(x) = xy(x)$. Trovare poi la soluzione tale che $y(\frac{\pi}{2}) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

31. Assegnata l'equazione differenziale $y'' - ay' = 0$, con $a \neq 0$, dire come deve essere scelto il parametro reale a affinché tutte le soluzioni siano limitate per $x > 0$. Determinare poi l'integrale generale dell'equazione $y'' - ay' = x$, e stabilirne il comportamento asintotico per $x \to +\infty$.

32. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 4y' = x$ che passa per l'origine ed è tangente nell'origine alla retta $y = \dfrac{1}{16}x$. Tracciare inoltre un grafico locale nell'intorno di $x = 0$ e scrivere la formula di Mac-Laurin arrestata al IV ordine.

Soluzioni.

1. $y = -e^{2x} + e^{3x}$.

2. a) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \dfrac{7}{6}$, b) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \dfrac{1}{2} e^x$, c) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - xe^{2x}$.

3. $y = -\dfrac{3}{2} e^{2x} + \dfrac{5}{2} + 3x,\ y'(1) = 3 - 3e^2$.

4. a) $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$.

5. a) $y = c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x$.

6. $y = c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x + \dfrac{1}{3}x + \cos x$.

7. $y = e^{-x}\left(\cos\sqrt{2}x + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x\right)$.

8. $y = e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{2}x\right) + \dfrac{1}{9}e^{3x}$.

9. $\bar{y} = -e^{-x} - \dfrac{8}{65}\cos x + \dfrac{1}{65}\sin x$.

10. a) $\bar{y} = x^3 - 6x - 12$, b) $\bar{y} = \dfrac{1}{2}x^2e^x + e^{2x}$.

11. $y = -\dfrac{1}{2}x\cos x$.

12. a) $\bar{y} = 2xe^{-2x}$, b) $\bar{y} = \dfrac{1}{10}\cos x + \dfrac{1}{10}\sin x$.

13. $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + x\sin 2x$.

14. $y = -e^{-2x}$, $y(0) = -1$.

15. $y = xe^{2x}$.

16. $y = -\cos\dfrac{1}{2}x + 6\sin\dfrac{1}{2}x + 1$.

17. $y = -\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{3}\sin x - \dfrac{1}{3}\cos 2x$.

18. $y = \dfrac{1}{32}\left(1 - e^{-4x} + 4x^2 - 2x\right)$, $y(0) = 0, y'(0) = \dfrac{1}{16}, y''(0) = -4y'(0) = -\dfrac{1}{4} < 0$, quindi la soluzione passa per l'origine, è tangente alla retta $y = \dfrac{1}{16}x$ e ha la concavità verso il basso.

19. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^3 + 4x^2 + 9x + 10$.

20. $y = e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x) - \dfrac{3}{40}\cos 3x + \dfrac{1}{40}\sin 3x$.

21. a) $a = 10, b = 25$. b) $y = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x}$. c) $y = 2xe^{-5x} \sim 2x$ per $x \to 0$, l'ordine di infinitesimo è 1.

22. $f(x) = 4(1 - 3\cos 4x)$. $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 1 + \cos 4x$.

23. $p(x) = -\dfrac{2}{x}, q(x) = \dfrac{2}{x^3}$. $y = c_1 x + c_2 x^2$.

24. a) $y = -3$ è una soluzione particolare; dunque l'integrale generale è $y = c_1 x + c_2 x^2 + 3$, b) $a(x) = -\dfrac{2}{x}$, $b(x) = \dfrac{2}{x^2}$.

25. $y'' + y = 0$.

26. $a = -1, -2$, $a = c_1 \dfrac{1}{x} + c_2 \dfrac{1}{x^2}$.

27. $a = 1, b = -1$. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

28. Si pone $y' = z$, l'equazione diventa: $z' = z^2$, $z = 0$ è soluzione, ma non del problema, le altre soluzioni sono $z = \frac{\ }{1}x + c$. Imponendo che $z(0) = -1$ si trova $c = -1$, integrando si trova $y = \log(1 - x) + 1$. N. B. il problema è centrato in $x = 0$, dunque $|x - 1| = 1 - x$.

29. Come prima, $z = 0$ è soluzione, integrando si trova $y = 3$.

30. Derivando si trova: $z' = y + xy'$, $z'' = 2y' + xy''$, da cui $xy'' = z'' - 2y'$. Sostituendo nell'equazione si trova l'equazione: $z'' + z = 0$, $z = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, $y = c_1 \dfrac{\sin x}{x} + c_2 \dfrac{\cos x}{x}$. Per il problema: $z(\frac{\pi}{2}) = 0$, $z'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, da cui $c_1 = 0$, $c_2 = -\dfrac{\pi}{2}$.

31. L'integrale generale dell'equazione omogenea è $y(x) = c_1 e^{ax} + c_2$, le soluzioni sono limitate se $a < 0$. L'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = c_1 e^{ax} + c_2 - \dfrac{1}{2a} x^2 - \dfrac{1}{a^2} x$. Per $x \to +\infty$, $y \sim -\dfrac{1}{2a} x^2$ se $a < 0$, $y \sim c_1 e^{ax}$ se $a > 0$.

32. $y(x) = \dfrac{1}{32}(1 - e^{-4x} + 4x^2 - 2x)$, $y''(0) = -4y'(0) = -\dfrac{1}{4}$, quindi la soluzione in un intorno di $x = 0$ è crescente e concava. Derivando l'equazione si ottiene $y'''(0) = 2, y^{(4)}(0) = -8$, quindi $y(x) = \dfrac{1}{16} x - \dfrac{1}{8} x^2 + \dfrac{1}{3} x^3 - \dfrac{1}{3} x^4 + o(x^4)$.