Alcuni esercizi sulle equazioni differenziali

Calcolo dell'integrale generale

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali calcolare l'insieme di tutte le possibili soluzioni.
SUGGERIMENTO: Ricordatevi di fare la verifica: sostituite la soluzione cercata nell'equazione e verificate che l'equazione stessa è soddisfatta.

Ad esempio, per l'equazione

$$y' + 5y = 10,$$

l'integrale generale è dato da $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-5x} + 2$. La verifica consiste nel sostituire $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-5x} + 2$ (da cui $y' = -5C\,\mathrm{e}^{-5x}$) nell'equazione ricavando

$$-5C\,\mathrm{e}^{-5x} + 5\left(C\,\mathrm{e}^{-5x} + 2\right) = 10.$$

1. $y' - 3y + 4 = 0,$
2. $y' - xy = 2x$
3. $y' + 5y = 2\sin(x)$
4. $y' = x\log(1 + x^2)$
5. $y' = \frac{(x+2)y}{x(x+1)}$
6. $y' = \frac{y^2}{x\log(x)} - \frac{1}{x\log(x)}$
7. $y' + 3xy = x^3$
8. $y' = \frac{2x-y}{x-1}$

Problemi ai valori iniziali

a) Per ciascuno dei seguenti problemi calcolare l'unica soluzione che soddisfa sia l'equazione sia le condizioni iniziali.
SUGGERIMENTO: Ricordatevi di fare la verifica, sostituite la soluzione cercata nell'equazione e nelle condizioni iniziali e verificate che entrambe sono soddisfatte.

Ad esempio, per l'equazione

$$y' + 5y = 10, \qquad y(0) = 4,$$

la soluzione è data da $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-5x} + 2$. La verifica consiste nel sostituire $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-5x} + 2$ (da cui $y' = -10\,\mathrm{e}^{-5x}$) nell'equazione ricavando

$$-10\,\mathrm{e}^{-5x} + 5\left(2\,\mathrm{e}^{-5x} + 2\right) = 10,$$

e nel sostituire $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-5x} + 2$ nella condizione iniziale ricavando

$$y(0) = 2 + 2 = 4.$$

1. $y' - 2y = 8$, $y(0) = 0$;
2. $y' - \frac{1}{x}y = 0$, $y(1) = 2$;
3. $y' = \frac{y}{x} + 3x^2$, $y(2) = 1$ per $x \in [2, +\infty)$;
4. $y' + 8y = 6\,\mathrm{e}^{2x}$, $y(0) = 3$;
5. $y' + 5y = 26\cos(x)$, $y(0) = 6$.

b) Data l'equazione differenziale, dipendente dal paramentro reale k,

$$y' = -3xy + kx, \qquad y(0) = 0,$$

si determini k in modo che $y(x) \sim x^2$ per $x \to 0$.

SOLUZIONE: Si tratta di un'equazione differenziale lineare e si ottiene immediatamente l'integrale generale:

$$y(x) = \frac{k}{3} + C\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ si ottiene $C = -k/3$. La soluzione cercata è quindi

$$y(x) = \frac{k}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}\right).$$

La soluzione deve soddisfare quindi

$$\frac{k}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2}\right) \sim x^2 \qquad \text{per } x \to 0.$$

Poichè

$$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x^2} = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0,$$

quindi

$$y(x) = \frac{k}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Dunque la soluzione y è determinata dalla condizione $\frac{k}{2} = 1$, ossia $k = 2$.

c) Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = (2 + \alpha)y - 2\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$

per cui $y(0) = 3$. Stabilire, successivamente, per quali valori di α il seguente integrale improprio converge

$$\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x.$$

SOLUZIONE: L'equazione da risolvere è un'equazione differenziale lineare e si ottiene immediatamente l'integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{\int (2+\alpha)\,\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{-\int (2+\alpha)\,\mathrm{d}x} \left(-2\,\mathrm{e}^{\alpha x}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{(2+\alpha)x}\left(\mathrm{e}^{-2x} + C\right) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(1 + C\,\mathrm{e}^{2x}\right), \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $y(0) = 3$ si ottiene $3 = 1 + C$, ossia $C = 2$. La soluzione è dunque

$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(1 + 2\,\mathrm{e}^{2x}\right).$$

L'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\alpha x} + 2\,\mathrm{e}^{(\alpha+2)x}\right)\,\mathrm{d}x,$$

converge se e solo se l'esponente dell'esponenziale che prevale è negativo, ossia deve risultare $\alpha + 2 < 0$. Pertanto l'integrale converge se $\alpha < -2$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI

Esercizi svolti

1. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $(t^2+1)x' + x^2 = 0$.

2. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x' + t\ \tan x = 0 \\ x(0) = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$

3. Determinare a per cui $x(t) = te^{at}$ è una soluzione di $tx'' - tx' - x = 0$.

4. Trovare la soluzione generale delle equazione lineare $(\sin t)x' + (\cos t)x = e^t$.

5. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x' - x = 1 \\ x(0) = 0. \end{cases}$

6. Determinare la soluzione di $\begin{cases} x'' - 2x' - 8x = 0, \\ x(1) = 1\ x'(1) = 0 \end{cases}$ e il suo valore in $x = 0$.

7. Determinare una soluzione particolare di $x'' - 4x' + 5x = e^{2t}(1 + \cos t) + 5t^2$.

8. Risolvere il problema $\begin{cases} x'' - x = te^t \\ x(0) = 0 = x'(0). \end{cases}$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI
Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Se x non è identicamente nullo, abbiamo

$$\frac{x'}{x^2} = -\frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = -\int \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \arctan t + c$$

Quindi,

$$x(t) = \frac{1}{\arctan t + c},$$

c costante. L'equazione ammette anche la soluzione $x(t)=0$ (che corrisponde a $c = \pm\infty$).

2. Separando le variabili,

$$\frac{x'}{\tan x} = -t \Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int t\, dt$$
$$\Rightarrow \ln(\sin x) = -\tfrac{1}{2}t^2 + c \Rightarrow \sin x = ae^{-t^2/2},$$

dove c, $a = e^c$ sono costanti. Ponendo la condizione iniziale si ottiene $a = 1$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy risulta essere $x(t) = \arcsin(e^{-t^2/2})$.

3. Sostituendo $x = te^{at}$ nell'equazione si ha

$$t[e^{at}(-a^2t - 2a)] - t[e^{at}(-at - 1)] - [-te^{at}] = 0 \Rightarrow (a - a^2)t^2 + (2 - 2a)t = 0.$$

I coefficienti di t e t^2 devono annullarsi, quindi $a = 1$.

4. Divido per $\sin t$ e ottengo

$$x' + \frac{\cos t}{\sin t} x = \frac{e^t}{\sin t},$$

da cui, applicando la formula integrale, si ottiene

$$x(t) = e^{-A(t)}\Big(c + \int \frac{e^t}{\sin t} e^{A(t)} dt\Big),$$

dove $A(t) = \int \frac{\cos t}{\sin t} dt = \ln(\sin t)$, e quindi

$$x(t) = \frac{1}{\sin t}\Big(c + \int e^t\, dt\Big) = \frac{c + e^t}{\sin t}.$$

5. Applicando la formula integrale si ottiene

$$x(t) = e^{-A(t)}\Big(x_0 + \int_{t_0}^{t} 1 \cdot e^{A(s)} ds\Big).$$

In questo caso, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, e $A(t) = \int(-1)dt = -t$. Quindi,

$$x(t) = e^t\Big(0 + [-e^{-s}]_0^t\Big) = e^t(1 - e^{-t}) = e^t - 1.$$

Lo stesso risultato segue dal fatto che, moltiplicando l'equazione originale per $e^{A(t)} = e^{-t}$ si ottiene $\frac{d}{dt}(e^{-t}x) = e^{-t}$.

6. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$ e le radici sono $4, -2$. La soluzione generale dell'equazione è perciò $c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$ e le condizioni iniziali danno

$$\begin{cases} c_1 e^4 + c_2 e^{-2} = 1 \\ 4c_1 e^4 - 2c_2 e^{-2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow c_2 = 2c_1 e^6 \Rightarrow c_1 = \tfrac{1}{3} e^{-4}.$$

Quindi $x(t) = \frac{1}{3} e^{4t-4} + \frac{2}{3} e^{2-2t}$, e $x(0) = \frac{1}{3}(e^{-4} + 2e^2)$.

7. Risolviamo prima l'equazione omogenea $L(x) = 0$ dove $L(x)$ sta per $x'' - 4x' + 5x$. Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ ha radici complesse $\lambda = (4 \pm \sqrt{-4})/2 = 2 \pm i$, e quindi la soluzione generale è $e^{2t}(c_1 \sin t + c_2 \cos t)$. Per determinare una soluzione particolare basta trovare soluzioni particolari per le equazioni $L(x) = e^{2t}$, $L(x) = e^{2t} \cos t$ e $L(x) = 5t^2$ e poi sommarli:

   Per l'equazione $L(x) = e^{2t}$ si cerca una soluzione nella forma $x(t) = ae^{2t}$. Sostituendo nell'equazione $L(x) = e^{2t}$ si ottiene la condizione $a = 1$, e quindi la soluzione particolare e^{2t}.

   Siccome $e^{2t} \cos t$ è soluzione di $L(x) = 0$, l'equazione $L(x) = e^{2t} \cos t$ ha una soluzione particolare nella forma $x(t) = te^{2t}(b_1 \sin t + b_2 \cos t)$. Sostituendo nell'equazione $L(x) = e^{2t} \cos t$ si ottiene la soluzione particolare $\dfrac{t \sin t}{2} e^{2t}$.

   Per l'equazione $L(x) = 5t^2$, si cerca una soluzione nella forma $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$. Sostituendo nell'equazione $L(x) = 5t^2$ si ottiene la soluzione particolare

$$x(t) = \tfrac{22}{25} + \tfrac{8}{5} t + t^2.$$

   Una soluzione particolare dell'equazione originale è quindi :

$$x(t) = e^{2t} + \tfrac{1}{2} t \sin t + \tfrac{22}{25} + \tfrac{8}{5} t + t^2.$$

   Notare che a tale funzione si può sempre aggiungere una qualsiasi combinazione lineare di $e^{2t} \sin t$ e $e^{2t} \cos t$ e si ottiene comunque una soluzione particolare dell'equazione originale.

8. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 1$ e quindi l'equazione omogenea $L(x) = 0$ ha soluzione generale $c_1 e^t + c_2 e^{-t}$. Essendo e^t soluzione di $L(x) = 0$ cerco la soluzione particolare nella forma $x(t) = t(a_1 + a_2 t)e^t$. Sostituendo nell'equazione $L(x) = te^t$ si ottiene la soluzione particolare $-\frac{1}{4} te^t + \frac{1}{4} t^2 e^t$. Tutte le soluzioni dell'equazione originale sono quindi

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \tfrac{1}{4} te^t + \tfrac{1}{4} t^2 e^t.$$

   Le condizioni iniziali danno origine alle due condizioni $c_1 + c_2 = 0$ e $c_1 - c_2 - \frac{1}{4} = 0$, cioè $c_1 = \frac{1}{8} = -c_2$. La soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \tfrac{1}{8} [e^t - e^{-t} - 2te^t + 2t^2 e^t].$$