

Esercitazione 16: conduttori

1. Due molecole d'acqua, aventi momento di dipolo $p = 6.3 \cdot 10^{-30}$ Cm, sono allineate e distano $x = 10^{-9}$ m. Calcolare :
 - L'energia elettrostatica del sistema;
 - La forza con cui i due dipoli interagiscono.
2. Una carica puntiforme Q viene posta al centro di della cavità di un conduttore sferico di raggio interno R_1 ed esterno R_2 , isolato ed inizialmente scarico. Detta r la distanza dal centro del conduttore sferico calcolare il campo elettrico ed il potenziale in tutto lo spazio. Cosa cambia nel caso in cui la carica Q sia posta in un punto generico interno alla cavità del conduttore?
3. Due armature metalliche sferiche concentriche di raggi $R_1 = 20$ cm e $R_2 = 30$ cm (spessore trascurabile) hanno carica uguale in valore assoluto ma opposta pari a $|Q_1| = |Q_2| = 10^{-8}$ C. Una particella di massa $m = 1.672 \times 10^{-27}$ kg e carica $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C ruota uniformemente su un'orbita circolare di raggio $r = 25$ cm, compresa tra le due armature sferiche.
 - a. Quale delle due armature deve avere necessariamente carica positiva?
 - b. Si calcoli il campo elettrico in tutti i punti dello spazio.
 - c. Calcolare la velocità angolare di rotazione della particella nella sua orbita.
4. Due sfere conduttrici S_1 e S_2 rispettivamente di raggi a_1 e a_2 sono poste a distanza molto grande rispetto a a_1 e a_2 e sono unite da un filo conduttore. La carica complessiva del sistema vale Q . Q_1 è la carica presente sulla superficie di S_1 ed ha una distribuzione uniforme σ_1 ; Q_2 è la carica presente sulla superficie di S_2 con distribuzione uniforme σ_2 . Si trascuri la carica che si trova sul filo. Determinare i valori delle due cariche Q_1 e Q_2 .

1. Lungo l'asse del dipolo il campo elettrico ha la seguente espressione:

$$E = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos\theta$$

$$U_e = -p \cdot E = -\frac{p \cdot 2p}{4\pi\epsilon_0 x^3} = -7,14 \times 10^{-22} \text{ J}$$

$$F = \frac{dW}{dr} = -\frac{dU_e}{dr} = -6 \frac{p \cdot p}{4\pi\epsilon_0 x^4} = -2,14 \times 10^{-12} \text{ N}$$

2. All'interno del conduttore si ha uno spostamento di carica (induzione completa), pari alla carica Q, in modo che all'interno dello stesso il campo elettrico sia nullo. Poiché la carica si trova nel centro della sfera, la distribuzione di carica sulle superfici del conduttore è uniforme.

$$\text{Per } 0 < r < R_1 \quad q_i = Q \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$\text{Per } R_1 < r < R_2 \quad q_i = 0 \rightarrow E = 0$$

$$\text{Per } r > R_2 \quad q_i = Q \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$\text{Per } r > R_2 \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

$$V_{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{tot}}{R_2}$$

$$\text{Per } R_1 < r < R_2 \quad V = V_{R_2}$$

$$\text{Per } 0 < r < R_1 \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right)$$

Spostando la carica, la distribuzione indotta sulla superficie interna del conduttore cambia in modo da mantenere il conduttore equipotenziale: nonostante non sia semplice calcolare analiticamente come si distribuisce la carica indotta, è possibile intuire che tale distribuzione non sarà uniforme (in particolare la carica si concentrerà maggiormente sulla porzione di superficie più vicina alla particella). Per quanto riguarda invece la superficie esterna, la distribuzione rimane invariata (schermo elettrostatico): la carica si distribuisce uniformemente, in modo che la superficie del conduttore sia equipotenziale.

3. a) Affinché la particella si muova con moto circolare uniforme, è necessario che su di essa agisca una forza centripeta, diretta quindi verso il centro della traiettoria circolare. Poiché la particella in questione ha carica positiva, sul guscio sferico interno deve esserci carica negativa.

b) Per $0 < r < R_1$ $q_i = 0 \rightarrow E = 0$

Per $R_1 < r < R_2$ $q_i = -Q \rightarrow E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$

Per $r > R_2$ $q_i = 0 \rightarrow E = 0$

- c) La velocità di rotazione si calcola applicando la seconda legge di Newton.

$$qE_{cp} - ma_{cp} = -m\omega^2 r_p$$

$$\omega = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m r_p^3}} = 7,42 \times 10^5 \text{ rad/s}$$

4. Il cavo metallico interconnette i due conduttori, che perciò sono allo stesso potenziale.

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{Q_1}{a_1} = \frac{Q_2}{a_2}$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$Q_1 = Q \frac{a_1}{a_1 + a_2}$$

$$Q_2 = Q \frac{a_2}{a_1 + a_2}$$