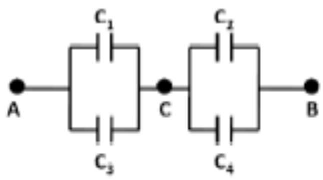
Esercitazione 17: condensatori

1) Calcolare la capacità e il potenziale elettrico di una sfera metallica di raggio a_1 con carica Q_1. Cosa succede se si collega il conduttore ad un'altra sfera di raggio a_2 e carica Q_2 mediante un filo conduttore di capacità trascurabile? (si calcolino le cariche elettriche finali, il potenziale elettrico e l'energia elettrostatica dissipata in seguito al trasferimento di cariche)

2) Un fascio di elettroni è accelerato attraverso una regione compresa fra due piani paralleli carichi con densità di carica uniformi $-\sigma$ e $+\sigma$ e distanti d = 2 mm. Calcolare il valore della densità di carica σ presente sui piani nel caso in cui gli elettroni vengano accelerati da 10^6 m/s a $4 \cdot 10^7$ m/s. Se consideriamo, al posto dei piani paralleli, due piastre conduttrici cariche con la medesima densità di carica e superficie S = 100 cm^2, si determini la capacità del condensatore così realizzato.

3) In figura, C_1=20pF C_2=40pF C_3=30pF e C_4=60pF e la carica di C_1 è Q_1=200pC. Calcolare la differenza di potenziale ΔV_{AB} tra i punti A e B e la carica Q sui rispettivi condensatori.



4) Calcolare la capacità di un condensatore cilindrico, costituito da due armature metalliche coassiali di altezza L, , raggio interno R_1 ed esterno R_2, assumendo L >> R.

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

Es.1. Il potenziale e la capacità di un conduttore sferico sono stati derivati negli esercizi precedenti; dunque in questo contesto ci si limita al solo risultato finale:

$$V(a_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a_1}$$

$$C_1 = \frac{Q}{V(a_1)} = 4\pi\varepsilon_0 a_1$$

$$V(a_2) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a_2}$$

$$C_2 = \frac{Q}{V(a_2)} = 4\pi\varepsilon_0 a_2$$

dove a_1, a_2, Q_1 e Q_2 sono rispettivamente i raggi e le distribuzioni di carica iniziali delle due sfere isolate elettrostaticamente. L'energia elettrostatica iniziale di questo sistema di conduttori si può scrivere nella seguente maniera:

$$U_{el} = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 a_1} + \frac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 a_2}$$

Per trovare le due nuove distribuzioni di carica Q^*_1 e Q^*_2 che si formano a seguito del collegamento elettrostatico tra i due conduttori, scriviamo le equazioni costitutive del problema:

$$\frac{dU_{el}}{dQ_1} = 0$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = Q_1^* + Q_2^*$$

La prima espressione si annulla per :

$$Q_1^* = \frac{a_1}{a_1 + a_2} Q$$

Da cui si ottiene immediatamente, sfruttando la seconda equazione del sistema:

$$Q_2^* = \frac{a_2}{a_1 + a_2} Q$$

L'energia elettrostatica finale del sistema di conduttori si può dunque scrivere come:

$$U_{fin} = \frac{Q_1^{*2}}{2C_1} + \frac{Q_2^{*2}}{2C_2} = \frac{\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)^2 Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a_1} + \frac{\left(\frac{a_2}{a_1 + a_2}\right)^2 Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a_2}$$

L'energia dissipata in seguito al trasferimento di cariche vale quindi:

$\Delta E = U_{fin} - U_{el}$.

Es.2. La variazione di energia cinetica a seguito della forza che l'elettrone subisce all'interno del campo del condensatore piano vale:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = q\Delta V = q\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

Da cui si ottiene:

$$\sigma = \frac{m\varepsilon_0}{2qd}\left(v_f^2 - v_i^2\right) \cong 20\frac{mC}{mm}$$

La capacità del condensatore piano a facce parallele vale:

$$C = \frac{\varepsilon_0}{d} S$$

Dove S è la superficie di una faccia del condensatore.

Es.3. Per la dimostrazione di capacità equivalenti di conduttori posti in serie ed in parallelo si rimanda a quanto detto ad esercitazione o sui libri di testo; in questo caso si forniscono solamente i risultati numerici:
ΔV_{AB} = 15 V
Q_2=200pC
Q_3=300pC
Q_4=300pC

Es.4. Dalla simmetria del sistema si evince che direzione e verso del campo sono radiali rispetto all'asse del condensatore cilindrico; una buona superficie dunque su cui valutare il flusso del campo elettrico risulta essere una superficie cilindrica. Se Q è la carica depositata sulla superficie di raggio R1 e –Q quella depositata sulla superficie di raggio R2 il campo elettrico nella regione di spazio delimitata dai due raggi vale:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}$$

Dove L è l'altezza del condensatore cilindrico ed r è la distanza dall'asse dello stesso. La differenza di potenziale tra le due piastre va valutata tra i punti $V(R_1)$ e $V(R_2)$, ottenendo:

$$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Da cui si ricava la capacità del condensatore:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$