Scienze Chimiche
METODI NUMERICI PER LA CHIMICA

Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e le Risorse
LABORATORIO DI CALCOLO NUMERICO

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

prof. Lucia Della Croce

ANNO ACCADEMICO 2002/2003

Capitolo 1

Analisi degli Errori

ESERCIZIO 1

Siano assegnati $x = 0.001 \cdot 10^3$ e $\bar{x} = 100003.24 \cdot 10^{-5}$. Calcolare errore assoluto ed errore relativo. Dire se il calcolo di

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{2x}$$

risulta ben condizionato per $x = \bar{x}$.

Soluzione

Errore assoluto:
$|x - \bar{x}| = |1 - 1.0000324| = 0.0000324 = 3.24 \cdot 10^{-5}$

Errore relativo:
$|x - \bar{x}|/x = |1 - 1.0000324|/1 = 0.0000324 = 3.24 \cdot 10^{-5}$

Condizionamento:
$\mu(x) = x \cdot f'(x)/f(x) = (x^3 - 2)/[4 \cdot (x^3 + 1)]$
$\Rightarrow$ Ben condizionato per $x^3 \approx 2 \;\Rightarrow\; x \approx 1.25$

ESERCIZIO 2

Si supponga di operare in aritmetica in virgola mobile a 6 cifre a base decimale. Calcolare la funzione:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

per $x = 12345$. Calcolare inoltre l'errore relativo commesso.

Soluzione

Calcolo di $f(x)$:
$\sqrt{x+1} = 111.1125555 \Rightarrow fl(111.1125555) = 111.113$
$\sqrt{x} = 111.1080555 \Rightarrow fl(111.1080555) = 111.108$
$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 111.113 - 111.108 = 0.005$

Errore relativo:
$|fl(x) - x|/x = |0.005 - 0.0045|/0.0045 = 0.1$
con $x = 111.1125555 - 111.1080555 = 0.0045$

ESERCIZIO 3

Si supponga di operare in aritmetica in vigola mobile a 4 cifre e base decimale. Risolvere la seguente equazione:

$$2305x = 2331 - (1.009 * 25.002)$$

Risolvere la stessa equazione operando in aritmetica in virgola mobile a 5 cifre e base decimale.

Soluzione

4 cifre:
$1.009 * 25 = 25.225 \Rightarrow fl(25.225) = 25.23$
$2331 - 25.23 = 2305.77 \Rightarrow fl(2305.77) = 2306$
$x = 2306/2305 = 1.000433 \Rightarrow fl(1.000433) = 1$

5 cifre:
$1.009 * 25.002 = 25.227018 \Rightarrow fl(25.225) = 25.227$
$2331 - 25.227 = 2305.773 \Rightarrow fl(2305.773) = 2305.8$
$x = 2305.8/2305 = 1.000347 \Rightarrow fl(1.000347) = 1.0003$

ESERCIZIO 4

Trovare il numero di condizionamento dei seguenti problemi:
a) $f(x) = \sin x$
b) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$
c) $f(x) = \log x$

Soluzione

a) $\mu(x) = x \cdot f'(x)/f(x) = x \cdot \cos x/ \sin x = x \cdot \cot x$
$\Rightarrow$ Mal condizionato: $|x| \approx n\pi$; Ben condizionato: $|x| \approx \frac{\pi}{2} + n\pi$

b) $\mu(x) = x \cdot f'(x)/f(x) = -x/\sqrt{x^2+1}$
$\Rightarrow$ Mal condizionato: mai ; Ben condizionato: $|x| \approx 0$

c) $\mu(x) = x \cdot f'(x)/f(x) = 1/\log x$
$\Rightarrow$ Mal condizionato: $|x| \approx 1$

ESERCIZIO 5

Considerare il calcolo della seguente funzione per $x > 0$:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

a) Trovare il numero di condizionamento
b) Determinare i valori di x per i quali il calcolo é mal condizionato e quelli per i quali il calcolo é ben condizionato

Soluzione

a) $\mu(x) = x \cdot f'(x)/f(x) = -\frac{1}{2}[x/\sqrt{x(x+1)}]$

b) $x > 0$ piccoli: ben condizionato

ESERCIZIO 6

Si abbia una macchina che lavora con 5 cifre in base decimale e con troncamento.
a) Scrivere la rappresentazione normalizzata del numero $x = 532176213$
b) Scrivere la precisione di tale macchina

Soluzione

a) $fl(x) = 0.53217 \cdot 10^9$

b) $Eps = base^{1-t} = 10^{-4}$

ESERCIZIO 7

a) Calcolare la precisione macchina per una macchina che opera con arrotondamento con 15 cifre in base esadecimale
b) Calcolare il numero di condizionamento del problema:

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Soluzione

a) $Eps = \frac{1}{2} \cdot base^{1-t} = \frac{1}{2} \cdot 16^{-14} = 8^{-14}$

b) $\mu(x) = x \cdot f'(x)/f(x) = \frac{1}{2(x^2+1)}$

ESERCIZIO 8

Si abbia una macchina che lavora in semplice precisione, in base ottale, con arrotondamento. Calcolare:
a) il numero massimo rappresentabile
b) la precisione di tale macchina

Soluzione

a) abbiamo 1 bit per il segno, 7 bit per l'esponente, 24 bit per la mantissa (1 cifra = 3 bit)
t = 8 cifre
Numero max: $0.77777777 \cdot 8^{63} = 7.85 \cdot 10^{56}$

b) $Eps = \frac{1}{2} \cdot base^{1-t} = \frac{1}{2} \cdot 8^{-7} = 4^{-7} = 2.38 \cdot 10^{-7}$

ESERCIZIO 9

Sia $x_1 = 1.57079$ e $x_2 = 1.57078$
a) Individuare la variazione dei dati, calcolandone l'errore relativo
b) Calcolare $\cos(x_1)$ e $\cos(x_2)$ e valutare la variazione relativa della soluzione
c) Commentare esaurientemente i risultati ottenuti
d) Fornire una giustificazione rigorosa dei risultati

Soluzione

a) Errore relativo: $(x_1 - x_2)/x_2 = 6.3662 \cdot 10^{-6}$

b) $\cos(x_1) = 6.3268 \cdot 10^{-6}$ e $\cos(x_2) = 1.63368 \cdot 10^{-5}$
$\Rightarrow$ Errore relativo: $(\cos(x_1) - \cos(x_2))/\cos(x_2) = 0.6124$

c) Piccole oscillazioni sui dati comportano grandi variazioni sui risultati.
x_1 e x_2 sono prossimi a $\frac{\pi}{2}$.

d) $\mu(x) = |x \cdot f'(x)/f(x)| = |x \cdot \tan(x)| \Rightarrow$ per $x \approx \frac{\pi}{2}$ il problema é mal condizionato

Capitolo 2

Equazioni non Lineari

ESERCIZIO 1

Per ognuna delle seguenti funzioni determinare un intervallo $[a, b]$ tale che $f(a)f(b) < 0$ e applicare due passi del metodo di bisezione per determinare uno zero:
a) $f(x) = \lg x - 5 + x$
b) $f(x) = x^2 - 10x + 23$

Soluzione

a) Determino l'intervallo con il metodo grafico:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \lg x = -x + 5$$

(vedi Figura 2.1)
$\Rightarrow [a, b] = [3, 4]$ con $f(3) = -0.9 < 0$, $f(4) = 0.39 > 0$
$x_2 = (a + b)/2 = 3.5$ con $f(3.5) = -0.25 < 0$
$\Rightarrow\ [a, b] = [3.5, 4]$
$x_3 = (a + b)/2 = 3.75$

b) Determino l'intervallo con il metodo grafico:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 10x - 23$$

(vedi Figura 2.2)
$\Rightarrow [a, b] = [3, 4]$ con $f(3) = 2 > 0$, $f(4) = -1 < 0$
$x_2 = (a + b)/2 = 3.5$ con $f(3.5) = 0.25 > 0$
$\Rightarrow\ [a, b] = [3.5, 4]$
$x_3 = (a + b)/2 = 3.75$

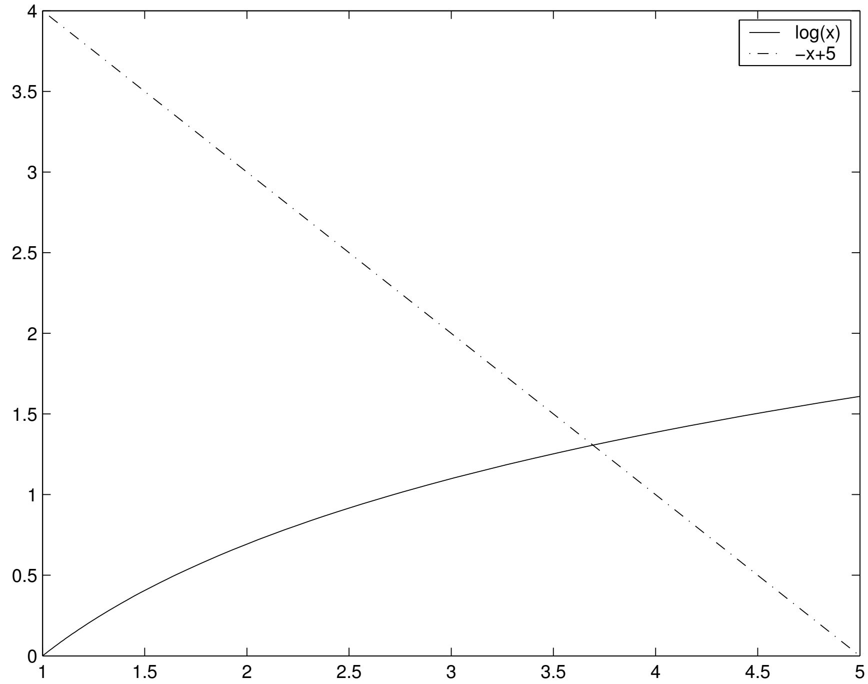

Figura 2.1: grafico dell'esercizio 1a

ESERCIZIO 2

La funzione $f(x) = 2 - x^2 - \lg x$ ammette una radice α con $1 < \alpha < 2$.
a) Approssimare α mediante due passi del metodo delle secanti
b) Approssimare α mediante un passo del metodo di Newton, scegliendo come punto iniziale l'estremo di Fourier

Soluzione

a) $[a, b] = [1, 2]$, $f'(x) = -2x - \frac{1}{x}$
$\Rightarrow\ x_2 = 1.3\ x_3 = 1.355$

b) $f''(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$
$f(a) = 1 \quad f''(a) = -1 \quad \Rightarrow\ f(a)f''(a) < 0$
$f(b) = -2.3 \quad f''(b) = -1.75 \quad \Rightarrow\ f(b)f''(b) > 0$
Quindi scelgo $x_0 = 2$ come estremo di Fourier.
$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 2 - 2.3/4.5 = 1.5$

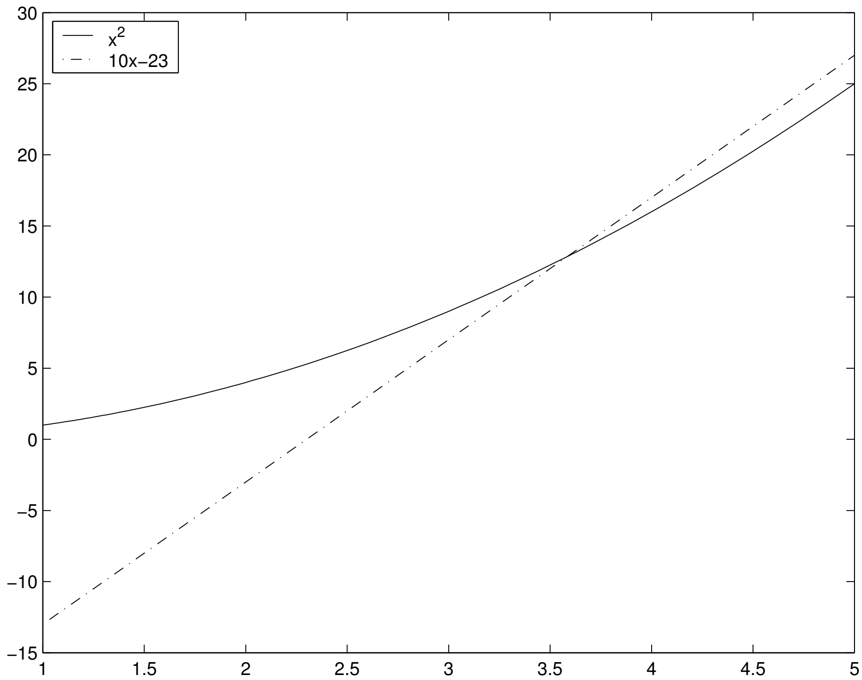

Figura 2.2: grafico dell'esercizio 1b

ESERCIZIO 3

Si vuole approssimare la radice dell'equazione: $3 \lg x - x = 0$ in $[1, e]$
a) Trovare l'approssimazione applicando 4 passi del metodo di bisezione
b) Trovare l'approssimazione con un passo del metodo delle secanti
c) Partendo dall'estremo di Fourier, trovare l'approssimazione con 2 passi del metodo di Newton

Soluzione

a) $x_0 = 1$, $x_1 = e$ con $f(1) = -1 < 0$, $f(e) = 3 - e > 0$
$x_2 = (x_0 + x_1)/2 = (e + 1)/2 = 1.859141$ con $f(x_2) = 0.0012026 > 0$
$\Rightarrow\ x_3 = (x_2 + x_0)/2 = 1.429$ con $f(x_3) = -0.35744 < 0$
$\Rightarrow\ x_4 = (x_2 + x_3)/2 = 1.64435$ con $f(x_4) = -0.15231 < 0$
$\Rightarrow\ x_5 = (x_2 + x_4)/2 = 1.7517$

b) $x_0 = 1$, $x_1 = e$
$\Rightarrow\ x_2 = x_1 - f(x_1)(x_1 - x_0)/(f(x_1) - f(x_0)) = 3/(4 - e) = 2.34$
$\Rightarrow\ x_3 = x_2 - f(x_2)(x_2 - x_1)/(f(x_2) - f(x_1)) = 1.2232$

c) $f'(x) = (3 - x)/x \ \Rightarrow\ f''(x) = -3/x^2 < 0$

$f(1) = -1 < 0$ $f(e) = 3 - e > 0$
Quindi scelgo $x_0 = 1$ come estremo di Fourier.
$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 3/2$
$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 1.7836$

ESERCIZIO 4

Si vuole approssimare la radice dell'equazione: $\sin(\pi x) - x^2 = 0$ nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$
a) Applicare un passo del metodo di Newton
b) Applicare due passi del metodo delle secanti
c) Applicare due passi del metodo di bisezione

Soluzione

a) $f'(x) = \pi\cos(\pi x) - 2x$, $f''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x) - 2$
$\Rightarrow$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} > 0$, $f(1) = -1 < 0$, $f''(\frac{1}{2}) = -\pi^2 - 2 < 0$, $f''(1) = -2$
Quindi scelgo $x_0 = 1$ come estremo di Fourier.
$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = (\pi + 1)/(\pi + 2) = 0.8$
$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = 0.7874$

b) $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$
$\Rightarrow$ $x_2 = x_1 - f(x_1)(x_1 - x_0)/(f(x_1) - f(x_0)) = 0.7142$
$\Rightarrow$ $x_3 = x_2 - f(x_2)(x_2 - x_1)/(f(x_2) - f(x_1)) = 0.7753$

c) $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ con $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} > 0$, $f(1) = -1 < 0$
$x_2 = (x_0 + x_1)/2 = \frac{3}{4}$ con $f(x_2) = 0.1446 > 0$
$\Rightarrow$ $x_3 = (x_2 + x_1)/2 = 0.875$

ESERCIZIO 5

Approssimare la radice negativa piú prossima all'origine di: $\sin x - xe^x = 0$
a) Isolare l'intervallo della radice
b) Calcolare l'estremo di Fourier
c) Approssimare la radice dopo un passo del metodo di Newton

Soluzione

a) Determino l'intervallo con il metodo grafico:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sin x = xe^x$$

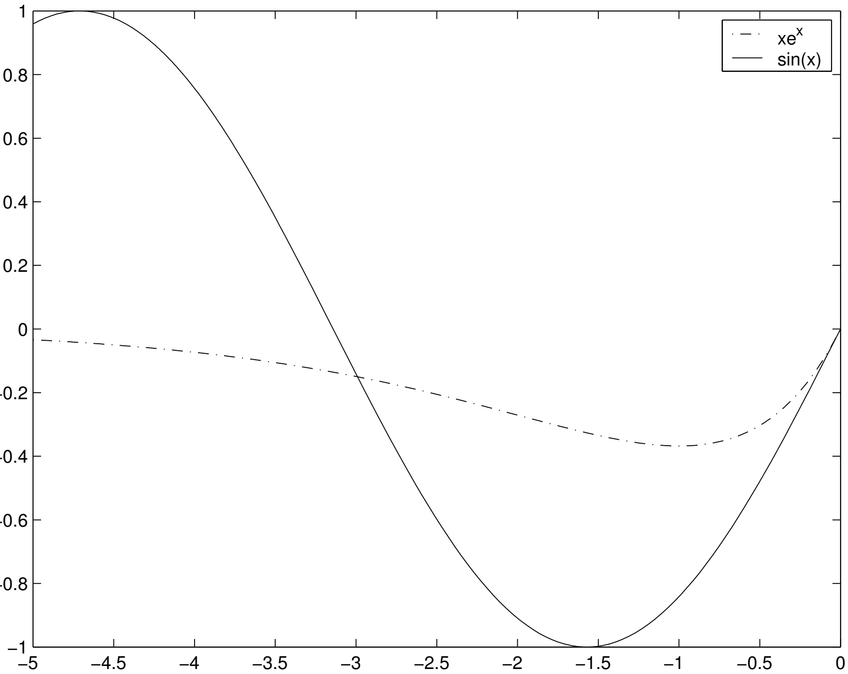

Figura 2.3: grafico dell'esercizio 5

(vedi Figura 2.3)
$\Rightarrow\ [x_0, x_1] = [-\pi, 0]$

b) $f'(x) = \cos x - e^x - xe^x$, $f''(x) = -\sin x - 2e^x - xe^x$
$\Rightarrow\ f(-\pi) = 0.136 > 0$, $f(0) = 0$, $f''(-\pi) = 0.049 > 0$, $f''(0) = -2$
Quindi scelgo $x_0 = -\pi$ come estremo di Fourier.

c) $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = -\pi + 0.136/0.9 = -2.99$

ESERCIZIO 6

Si vuole approssimare la radice dell'equazione: $x^2 + \sin x - 0.3 = 0$
a) Individuare l'intervallo $[x_0, x_1]$
b) Calcolare x_2 con il metodo delle secanti
c) Calcolare l'estremo di Fourier ed approssimare la radice dopo un passo del metodo di Newton

Soluzione

a) Determino l'intervallo con il metodo grafico:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sin x = -x^2 + 0.3$$

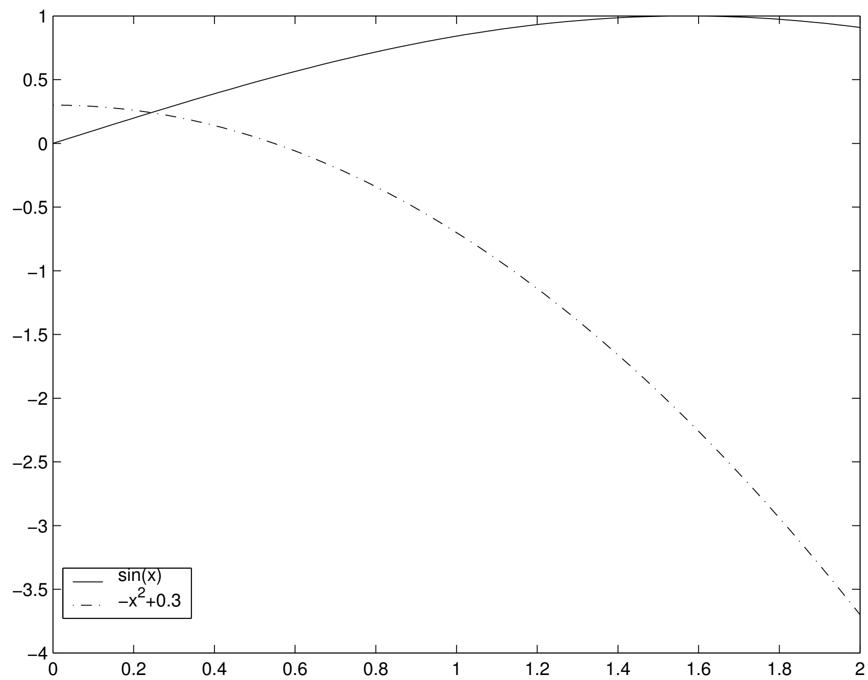

Figura 2.4: grafico dell'esercizio 6

(vedi Figura 2.4)
$\Rightarrow [x_0, x_1] = [0, 1]$ oppure $[x_0, x_1] = [0, \frac{\pi}{2}]$

caso I
b) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$
$\Rightarrow x_2 = x_1 - f(x_1)(x_1 - x_0)/(f(x_1) - f(x_0)) = 0.163$
c) $f'(x) = 2x + \cos x$, $f''(x) = 2 - \sin x$
$\Rightarrow f(0) = -0.3 < 0$, $f(1) = 1.54 > 0$, $f''(0) = 2 > 0$, $f''(1) = 1.16 > 0$
Quindi scelgo $x_0 = 1$ come estremo di Fourier.
$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 0.393$

caso II
b) $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$
$\Rightarrow x_2 = x_1 - f(x_1)(x_1 - x_0)/(f(x_1) - f(x_0)) = 0.136$
c) $f'(x) = 2x + \cos x$, $f''(x) = 2 - \sin x$

$\Rightarrow\ f(0) = -0.3 < 0\ ,\ f(\frac{\pi}{2}) = 3.17 > 0\ ,\ f''(0) = 2 > 0\ ,\ f''(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$
Quindi scelgo $x_0 = \frac{\pi}{2}$ come estremo di Fourier.
$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = 0.562$

ESERCIZIO 7

Sia $f(x) = \lg \frac{1}{x} - x^2$. Determinare un intervallo $[a, b]$ che contenga uno zero α e quindi applicare due passi del metodo di bisezione per determinarlo.

Soluzione

Determino l'intervallo con il metodo grafico:

$$f(x) = 0 \qquad \lg \frac{1}{x} = -\lg x \qquad \Rightarrow -\lg x = x^2$$

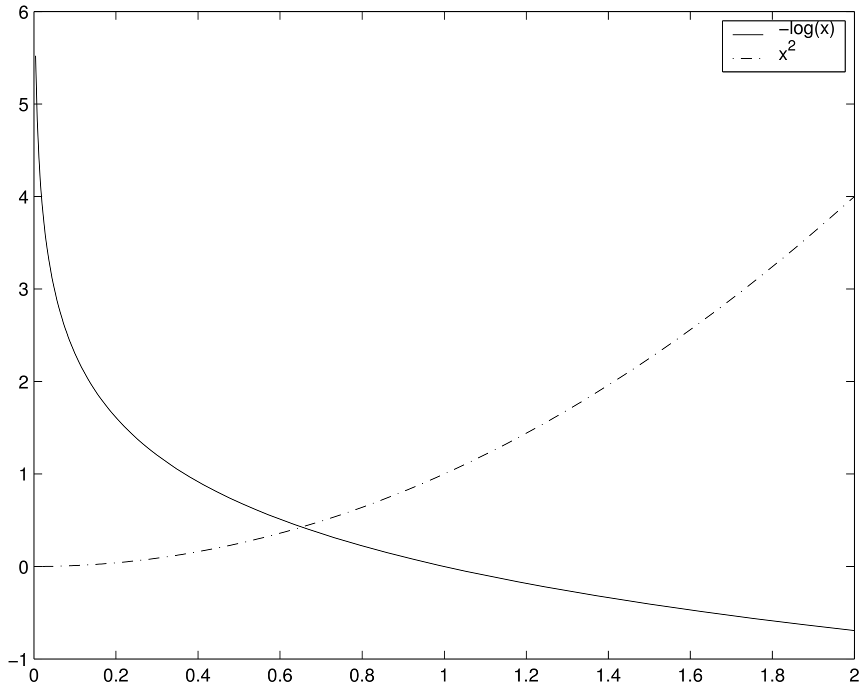

Figura 2.5: grafico dell'esercizio 7

(vedi Figura 2.5)
$\Rightarrow\ [a, b] = [\frac{1}{2}, 1]$ con $f(\frac{1}{2}) = 0.442147 > 0\ ,\ f(1) = -1 < 0$
$x_2 = (a + b)/2 = 0.75$ con $f(x_2) = -0.85 < 0$
$\Rightarrow\ x_3 = (x_2 + a)/2 = 0.625$

ESERCIZIO 8

Sia $f(x) = \sin x - x + 1$. Determinare un intervallo $[a, b]$ che contenga uno zero α e quindi applicare un passo del metodo delle secanti per determinarlo.

Soluzione

Determino l'intervallo con il metodo grafico:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sin x = x - 1$$

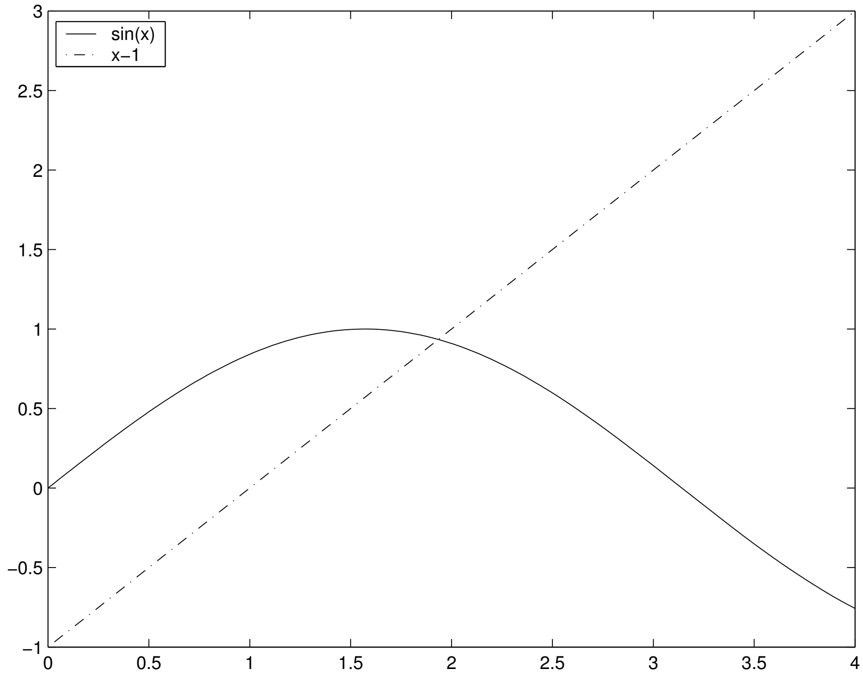

Figura 2.6: grafico dell'esercizio 8

(vedi Figura 2.6)
$\Rightarrow [a, b] = [\frac{\pi}{2}, \pi]$ con $f(a) = 0.4292$, $f(b) = -2.14159$
$\Rightarrow x_2 = b - f(b)(b - a)/(f(b) - f(a)) = 1.83264$

Capitolo 3

Approssimazione di Funzioni

ESERCIZIO 1

Si abbia la seguente tabella di dati sperimentali:

TEMPO	0	1	2	3
CONCENTRAZIONE	0.5	0.25	1	0.5

Trovare un modello polinomiale cubico che possa essere utilizzato per descrivere il fenomeno che si sta analizzando.

Soluzione

Metodo di Newton:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c}
x(0)=0 & 0.5 & & & \\
 & & f[01]=-0.25 & & \\
x(1)=1 & 0.25 & & f[012]=0.5 & \\
 & & f[02]=0.25 & & f[0123]=-0.375 \\
x(2)=2 & 1 & & f[013]=0.125 & \\
 & & f[03]=0 & & \\
x(3)=3 & 0.5 & & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow\ P(x) = f(0) + f[01]x + f[012]x(x-1) + f[0123]x(x-1)(x-2) = 0.5+0.25x+0.5x-0.375x^2+1.125x^3-0.75x = -0.375x^3+1.625x^2-1.5x+0.5$

Metodo di Lagrange:

$L(0) = -\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6)$

$L(1) = \frac{1}{2}(x^3-5x^2+6x)$

$L(2) = -\frac{1}{2}(x^3-4x^2+3x)$

$L(3) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x)$

$\Rightarrow \; P(x) = f(0)L(0) + f(1)L(1) + f(2)L(2) + f(3)L(3) = 0.5[-\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)] + 0.25[\frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x)] - \frac{1}{2}(x^3 - 4x^2 + 3x) + 0.5[\frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x)] = -0.375x^3 + 1.625x^2 - 1.5x + 0.5$

ESERCIZIO 2

Determinare il polinomio interpolatore di quarto grado che passa per i punti:

$$(0, -3) \qquad (1, -3) \qquad (-1, -1) \qquad (2, 11) \qquad (-2, 15)$$

Soluzione

Metodo di Newton:

$x(0) = 0$	-3				
		$f[01] = 0$			
$x(1) = 1$	-3		$f[012] = 2$		
		$f[02] = -2$		$f[0123] = \frac{3}{4}$	
$x(2) = -1$	-1		$f[013] = \frac{7}{2}$		$f[01234] = 1$
		$f[03] = 7$		$f[0124] = -\frac{5}{2}$	
$x(3) = 2$	11		$f[014] = \frac{9}{2}$		
		$f[04] = -9$			
$x(4) = -2$	15				

$\Rightarrow \; P(x) = f(0) + f[01]x + f[012]x(x-1) + f[0123]x(x-1)(x+1) + f[01234]x(x-1)(x+1)(x-2) = -3 + 2x^2 - 2x + \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = x^4 - \frac{5}{4}x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x - 3$

ESERCIZIO 3

Costruire un polinomio interpolatore di Newton che passa per i seguenti punti:

x_k	0	1	2	3	4
y_k	4	6	28	88	204

Soluzione

$x(0)=0$	4				
		$f[01]=2$			
$x(1)=1$	6		$f[012]=5$		
		$f[02]=12$		$f[0123]=\frac{11}{9}$	
$x(2)=2$	28		$f[013]=\frac{26}{3}$		$f[01234]=\frac{19}{144}$
		$f[03]=28$		$f[0124]=\frac{7}{4}$	
$x(3)=3$	88		$f[014]=12$		
		$f[04]=50$			
$x(4)=4$	204				

$$\Rightarrow \quad P(x) = f(0) + f[01]x + f[012]x(x-1) + f[0123]x(x-1)(x-2) + f[01234]x(x-1)(x-2)(x-3) = 4 + 2x + 5x^2 - 5x + \frac{11}{9}x^3 - \frac{11}{3}x^2 - \frac{22}{9}x + \frac{19}{144}x^4 - \frac{19}{24}x^3 - \frac{19}{16}x^2 - \frac{19}{18}x = \frac{19}{144}x^4 + \frac{31}{72}x^3 + \frac{7}{48}x^2 - \frac{117}{18}x + 4$$

Capitolo 4

Minimi Quadrati

ESERCIZIO 1

Risolvere il seguente sistema sovradeterminato con il metodo dei minimi quadrati:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \\ 2a+b=1 \\ a=0 \end{cases}$$

Soluzione

In forma matriciale il sistema é $Ax=b$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Sistema delle equazioni normali: $A^T Ax = A^T b$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^T b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ a = \frac{9}{17} \qquad b = -\frac{6}{17}$$

ESERCIZIO 2

Le variabili X, Y devono soddisfare:
$X + Y = A$, $X - Y = B$, $X = C$, $Y = D$, $2X + Y = E$
con A, B, C, D, E costanti date. Trovare X ed Y con il metodo dei minimi quadrati.

Soluzione

Sistema sovradeterminato:

$$\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \\ X = C \\ Y = D \\ 2X + Y = E \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Sistema delle equazioni normali: $A^T A x = A^T b$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T b = \begin{pmatrix} A + B + C + 2E \\ A + B + D + E \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = -\frac{1}{12}(A + B + D + E) + \frac{1}{6}(A + B + C + 2E) \\ Y = \frac{7}{24}(A + B + D + E) - \frac{1}{12}(A + B + C + 2E) \end{cases}$$

ESERCIZIO 3

La legge di Henry lega la concentrazione di un gas sciolto in un liquido alla pressione del gas in equilibrio con il liquido, seguendo la relazione: $C = kP$, dove k é una costante che dipende dal gas e dal liquido e P é la pressione del gas. Dati i seguenti valori misurati che si riferiscono all'ossigeno sciolto in acqua:

P	0.56	1.07	1.65	2.16	3.30	4.33
C	0.5	1	1.5	2	3	4

si ricavi k con il metodo dei minimi quadrati.

Soluzione

Sistema sovradeterminato:

$$\begin{cases} 0.56k = 0.5 \\ 1.07k = 1 \\ 1.65k = 1.5 \\ 2.16k = 2 \\ 3.30k = 3 \\ 4.33k = 4 \end{cases}$$

6 equazioni, 1 incognita (k) $\quad \Rightarrow \quad A : 6 * 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0.56 \\ 1.07 \\ 1.65 \\ 2.16 \\ 3.30 \\ 4.33 \end{pmatrix}$$

Sistema delle equazioni normali: $A^T A k = A^T b$

$$A^T A = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = (0.56)^2 + (1.07)^2 + (1.65)^2 + (2.16)^2 + (3.30)^2 + (4.33)^2 = 38.2368$$

$$A^T b = \sum_{i=1}^{6} x_i b_i = 35.365$$

$$\Rightarrow 38.2368k = 35.365 \Rightarrow k = 0.9189 \qquad \text{(coefficiente angolare retta)}$$

ESERCIZIO 4

Calcolare con il metodo dei minimi quadrati il polinomio (retta) che meglio approssima la seguente tabella:

X	-1	0	1	2
F(X)	-1.1	1.02	2.99	5

Soluzione

$$Y = aX + b \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} -a + b = -1.1 \\ b = 1.02 \\ a + b = 2.99 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.02 \\ 2.99 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T y = \begin{pmatrix} 14.09 \\ 7.91 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = A^T y \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.09 \\ 7.91 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad a = 0.973 \qquad b = 2.009$$

ESERCIZIO 5

L'astronomo tedesco J. Keplero formuló la terza legge del moto planetario: $T = Cx^{3/2}$ dove x é la distanza dal sole misurata in milioni di kilometri,

T é il periodo orbitale misurato in giorni e C é una costante. Osservando i primi 4 pianeti: Mercurio, Venere, Terra e Marte si ottennero i seguenti dati sperimentali:

(58.88) (108.225) (150.365) (228.687)

Si ricavi C con il metodo dei minimi quadrati.

Soluzione

$$\Phi(C) = \sum_{i=1}^{4} (y_i - C x_i^{3/2})^2$$

x_i	y_i
58	88
108	225
150	365
228	687

$$\Phi'(C) = 2 \sum_{i=1}^{4} (y_i - C x_i^{3/2}) x_i^{3/2}$$

$$\Phi'(C) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{4} (y_i x_i^{3/2}) = C \sum_{i=1}^{4} x_i^3$$

$$\Rightarrow \qquad C = \sum_{i=1}^{4} (y_i x_i^{3/2}) / \sum_{i=1}^{4} x_i^3$$

x_i	$x_i^{3/2}$	x_i^3	y_i	$y_i x_i^{3/2}$
58	441.7148	195112	88	38870.902
108	1122.369	1259712	225	252533.025
150	1837.117	3375000	365	670547.705
228	3442.72	11852352	687	2365148.64

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 = 16682176 \qquad \sum_{i=1}^{4} (y_i x_i^{3/2}) = 3327100.272$$

$$\Rightarrow \qquad C = 0.1994$$

ESERCIZIO 6

Si consideri la legge gravitazionale: $d = \frac{1}{2}gt^2$ dove d é la distanza in metri e t é il tempo in secondi. Trovare la costante gravitazionale utilizzando la tabella sperimentale:

t_i	d_i
0.2	0.196
0.4	0.785
0.6	1.7665
0.8	3.1405
1	4.9079

Soluzione

t_i	d_i	t_i^2	t_i^4	$t_i^2 d_i$
0.2	0.196	0.04	0.0016	0.00784
0.4	0.785	0.16	0.256	0.1256
0.6	1.7665	0.36	0.1296	0.63594
0.8	3.1405	0.64	0.4096	2.00992
1	4.9079	1	1	4.9079

$$\frac{1}{2}g = \sum_{i=1}^{5} t_i^2 d_i / \sum_{i=1}^{5} t_i^4 \qquad \Rightarrow \qquad g = 9.8151$$

ESERCIZIO 7

Usando il metodo di linearizzazione, cercare la curva $y = Ce^{Ax}$ per i seguenti dati:

$$(0, 1.5) \qquad (1, 2.5) \qquad (2, 3.5) \qquad (3, 5) \qquad (4, 7.5)$$

Soluzione

Cambio di variabili:

$X = x, Y = \lg y \quad \Rightarrow \quad \lg y = \lg(Ce^{Ax}) = Ax + \lg C = AX + B$
$\Rightarrow \qquad Y = AX + B$, con $B = \lg C$

x_i	$\lg y_i$
0	0.40547
1	0.91629
2	1.25276
3	1.60944
4	2.0149

Incognite: $A = z$, B

Sistema delle equazioni normali: $A^T A z = A^T y$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} X_i^2 & \sum_{i=1}^{5} X_i \\ \\ \sum_{i=1}^{5} X_i & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} Y_i X_i \\ \\ \sum_{i=1}^{5} Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.30973 \\ \\ 6.19886 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 30A + 10B = 16.30973 \\ \\ 10A + 5B = 6.19886 \end{cases}$$

$\Rightarrow A = 0.3991201$, $B = 0.45737$, $Y = 0.3991201X + 0.45737$

$\Rightarrow y = 1.57991 \cdot e^{0.3991201x}$

ESERCIZIO 8

Il fenomeno della lisi di globuli rossi é descritto dalla legge di Von Krogh:

$$y(x) = b(\frac{x}{1-x})^a$$

con y quantitá di complemento e x proporzione di cellule morte.

Dati sperimentali:

x	y
0.2	10
1	20
4.3	40
6	50
7.5	60
7.8	70
8	80

Utilizzando il metodo di linearizzazione, calcolare a e b.

Soluzione

Cambio di variabili:

$$Y = \lg y \qquad X = \lg(\frac{x}{1-x}) \qquad \Rightarrow \qquad Y = \lg b + aX$$

Incognite: $a = z$, $\lg b$

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4.3 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7.5 & 1 \\ 7.8 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{7} X_i^2 & \sum_{i=1}^{7} X_i \\ \sum_{i=1}^{7} X_i & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad y = 44.85(\frac{x}{1-x})^{\frac{1}{2.85}}$$

ESERCIZIO 9

Un modello ritenuto valido per descrivere l'incidenza del tumore della pelle rispetto ai gradi di latitudine nord é la legge esponenziale: $y = C * e^{Ax}$

dove x é il grado di latitudine a cui si trova la persona e y é l'incidenza della malattia rilevata su 100.000 individui. I rilevamenti ottenuti sono i seguenti:

x	y
32.8	9
33.9	5.9
34.1	6.6
37.9	5.8
40.2	5.5
40.8	3

Trovare il modello che meglio approssima nel senso dei minimi quadrati tali dati sperimentali e stimare l'incidenza del tumore a 45 gradi di latitudine nord.

Soluzione

Cambio di variabili:

$$y = C * e^{Ax} \qquad \Rightarrow \qquad \lg y = \lg C + Ax \qquad \lg C = B$$

x_i	$\lg(y_i)$
32.8	2.2
33.9	1.8
34.1	1.9
37.9	1.75
40.2	1.7
40.8	1.1

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{6} X_i^2 & \sum_{i=1}^{6} X_i \\ \sum_{i=1}^{6} X_i & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8104.95 & 215.7 \\ 215.7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{6} X_i Y_i \\ \sum_{i=1}^{6} Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 379.41 \\ 10.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 8105.95A + 215.7B = 375.41 \\ 215.7A + 6B = 10.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad A = -0.076 \qquad B = 4.51 \qquad C = 91.24$$
$$y = 91.24e^{-0.076x} \qquad \Rightarrow \qquad y(45) = 3.8$$

Capitolo 5

Integrazione Numerica

ESERCIZIO 1

Trovare un'approssimazione dell'integrale:

$$\int_{-1}^{1} (x\sqrt{1+x^2}+2)\,dx$$

mediante la formula dei Trapezi e di Simpson.

Soluzione

Trapezi: $I_1 = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$
$h = 2$
$f_0 = f(-1) = -\sqrt{2} + 2$
$f_1 = f(1) = \sqrt{2} + 2$
$I_1 = -\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 2 = 4$

Simpson: $I_2 = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
$h = 1$
$f_0 = f(-1) = -\sqrt{2} + 2$
$f_1 = f(0) = 2$
$f_2 = f(1) = \sqrt{2} + 2$
$I_2 = \frac{1}{3}(-\sqrt{2} + 2 + 8 + \sqrt{2} + 2) = \frac{12}{3} = 4$

ESERCIZIO 2

Utilizzando le formule dei trapezi e di Simpson determinare un'approssimazione dell'integrale:

$$\int_{0}^{12} (e^{\sqrt{x}} \cdot \sin(x) + 2x + 6)\,dx$$

Soluzione

Trapezi: $I_1 = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$
$h = 12$
$f_0 = f(0) = 6$
$f_1 = f(12) = 12.858$
$I_1 = \frac{12}{2}(6 + 12.858) = 113.15$

Simpson: $I_2 = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
$h = 6$
$f_0 = f(0) = 6$
$f_1 = f(6) = 14.764$
$f_2 = f(12) = 12.858$
$I_2 = \frac{6}{3}(6 + 59.056 + 12.858) = 2 \cdot 77.914 = 155.82$

ESERCIZIO 3

Data la formula di quadratura:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx \alpha_1 f(-\sqrt{2}) + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 f(\sqrt{2})$$

Determinare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in modo tale che risulti di ordine di precisione 2.

Soluzione

Deve essere esatta per polinomi di grado $\leq 2 \Rightarrow$

$$p_0(x) = 1 \Rightarrow \int_{-2}^{2} p_0(x) = 4$$

$$p_1(x) = x \Rightarrow \int_{-2}^{2} p_1(x) = 0$$

$$p_2(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-2}^{2} p_2(x) = \frac{16}{3}$$

Valori approssimati mediante la formula: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 \\ \\ -\sqrt{2}\alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_3 = 0 \\ \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = \frac{16}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{4}{3}$

ESERCIZIO 4

Si vuole approssimare l'integrale:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

utilizzando la formula dei trapezi composta. Determinare il numero di sottointervalli necessari per ottenere un errore $< 0.5 \cdot 10^{-3}$.

Soluzione

$E_{m,1} \leq \frac{1}{12}(b-a)M \cdot H^2$ con $H = (b-a)/m = \frac{1}{m}$ e $M = \max_{x\in(0,1)} |f''(x)|$

Essendo $\max_{x\in(0,1)} |f''(x)| = 2$ si ha:

$E_{m,1} \leq \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{1}{6m^2}$

$\frac{1}{6m^2} < 0.5 \cdot 10^{-3} \;\Rightarrow\; m > 18.25 \;\Rightarrow\; m \geq 19$

ESERCIZIO 5

Calcolare il valore approssimato del seguente integrale:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2}e^{-x^2}\,dx$$

utilizzando la formula dei trapezi e la formula di Simpson. Calcolare l'errore commesso nel primo caso.

Soluzione

Trapezi: $I_T = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$
$h = 2$
$f_0 = f(-1) = \frac{1}{2e}$
$f_1 = f(1) = \frac{1}{2e}$
$I_T = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2e} = \frac{1}{e}$

Simpson: $I_S = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$
$h = 1$
$f_0 = f(-1) = \frac{1}{2e}$
$f_1 = f(0) = \frac{1}{2}$
$f_2 = f(1) = \frac{1}{2e}$

$I_S = \frac{1}{3}(\frac{1}{2e} + \frac{4}{2} + \frac{1}{2e}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{e} + 2)$

Errore con la formula dei trapezi: $E_T = -\frac{h^3}{12} \cdot |f''(\xi)|$
$\max_{[-1,1]} |f''(x)|$:
$f'(x) = -x \cdot e^{-x^2}$ $f''(x) = e^{-x^2}(2x^2 - 1)$
$|f''(-1)| = |f''(1)| = \frac{1}{e}$ $|f''(0)| = 1 \Rightarrow \max = 1$
$E_T = |-\frac{8}{12}| = \frac{2}{3}$

ESERCIZIO 6

Applicare la formula di quadratura di Simpson composta con 4 sottointervalli per risolvere:

$$\int_0^{2\pi} x \cdot \sin^2(x)\, dx$$

Soluzione

Simpson composta:
$h = 4$
$I_S = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + f_8)$

$f_0 = f(0) = 0$ $\quad f_1 = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8}$ $\quad f_2 = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$
$f_3 = (\frac{3\pi}{4}) = \frac{3\pi}{8}$ $\quad f_4 = f(\pi) = 0$ $\quad f_5 = f(\frac{5\pi}{4}) = \frac{5\pi}{8}$
$f_6 = f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}$ $\quad f_7 = f(\frac{7\pi}{4}) = \frac{7\pi}{8}$ $\quad f_8 = f(2\pi) = 0$

$\Rightarrow I_S = \pi^2$

ESERCIZIO 7

Stimare il numero minimo di sottointervalli necessari per calcolare:

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cdot \sin(x)\, dx$$

con un errore minore di 10^{-3} usando la tecnica dei trapezi composta.

Soluzione

$E_{1,m} \leq \frac{1}{12}(b-a)M \cdot H^2$ con $H = (b-a)/m$ e $M = \max_{x \in (0,1)} |f''(x)|$

Essendo $\max_{x\in(0,1)}|f''(x)| = 6$ si ha:

$E_{1,m} \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{m^2} \cdot 6 = \frac{1}{2m^2}$

$\frac{1}{2m^2} < 10^{-3} \;\Rightarrow\; m > 22.36 \;\Rightarrow\; m \geq 23$

NB: Una stima migliore di $\max_{x\in(0,1)}|f''(x)|$ produce un risultato migliore (m piú piccolo).

ESERCIZIO 8

Determinare i coefficienti a_0, a_1, b_0, b_1 in modo che la formula di quadratura:

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx h[a_0 f(0) + a_1 f(h)] + h^2[b_0 f'(0) + b_1 f'(h)]$$

sia esatta per polinomi di grado 3. Che formula si ottiene?

Soluzione

Imponendo che la formula di quadratura sia esatta rispettivamente per $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ si trovano le 4 condizioni:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 1 \\ a_1 + b_0 + b_1 = \frac{1}{2} \\ a_1 + 2b_1 = \frac{1}{3} \\ a_1 + 3b_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow\; a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$ e $b_0 = b_1 = \frac{1}{12}$. Si ottiene la formula dei trapezi modificata:

$$I_T = \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + \frac{h^2}{12}[f'(0) + f'(h)]$$

ESERCIZIO 9

Determinare il grado di precisione della formula di quadratura:

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}[2(f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})) - f(0)]$$

Soluzione

Provando la formula con i polinomi $f(x) = x^n$, con n pari (per simmetria la formula é esatta per tali polinomi con n dispari) si trova subito che il grado di precisione é 3.

ESERCIZIO 10

Calcolare il valore dell'integrale:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx$$

con la formula dei trapezi composta con 4 intervalli. Calcolare il valore dello stesso integrale con la formula di Cavalieri-Simpson composta su 2 intervalli. Confrontare e commentare i risultati ottenuti sapendo che il valore dell'integrale con 10 cifre decimali esatte é 1.1114479705...

Soluzione

$h = \frac{1}{4}$
$f(0) = 1 \qquad f(\frac{1}{4}) = 1.007782219 \qquad f(\frac{1}{2}) = 1.060660172$
$f(\frac{3}{4}) = 1.192424002 \qquad f(1) = 1.414213562$

$I_T = \frac{1}{8}(1+1.007782219) + \frac{1}{8}(1.007782219+1.060660172) + \frac{1}{8}(1.060660172 + 1.192424002) + \frac{1}{8}(1.192424002 + 1.414213562) = 1.1168542$

$I_S = \frac{1}{12}(1+4\cdot 1.007782219+1.060660172)+\frac{1}{12}(1.060660172+4\cdot 1.192424002+ 1.414213562) = 1.111363232$

ESERCIZIO 11

Applicare la formula di quadratura dei trapezi composta utilizzando quattro sottointervalli per calcolare l'integrale:

$$\int_{2}^{4} \sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + 1}\, dx$$

Soluzione

$h = \frac{1}{2}$
$f(2) = \sqrt{6}$ $\quad f(\frac{5}{2}) = \sqrt{\frac{34}{4}}$ $\quad f(3) = \sqrt{\frac{23}{2}}$
$f(\frac{7}{2}) = \sqrt{15}$ $\quad f(4) = \sqrt{19}$

$\Rightarrow\ I_T = \frac{1}{4}[\sqrt{6} + \sqrt{34} + 2\sqrt{\frac{23}{2}} + 2\sqrt{15} + \sqrt{19}]$

ESERCIZIO 12

Calcolare il valore dell'integrale:

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{x^3 + 2x^2}\, dx$$

con la formula dei trapezi composta con 3 intervalli. Calcolare il valore dello stesso integrale con la formula di Cavalieri-Simpson composta su 2 intervalli.

Soluzione

$h = 1$
$f(-1) = 1$ $\quad f(0) = 0$ $\quad f(1) = \sqrt{3}$ $\quad f(2) = 4$

$\Rightarrow\ I_T = \frac{1}{2}[1 + 2\sqrt{3} + 4] = \frac{5+2\sqrt{3}}{2}$

$h = \frac{3}{4}$
$f(-1) = 1$ $\quad f(-\frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{7}}{8}$ $\quad f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}$
$f(\frac{5}{4}) = \frac{5}{8} \cdot \sqrt{13}$ $\quad f(2) = 4$

$\Rightarrow\ I_S = \frac{1}{4}[1 + \frac{\sqrt{7}}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{13} + 4]$

ESERCIZIO 13

Si consideri la seguente formula di quadratura:

$$\int_{0}^{b} \sqrt{x} f(x)\, dx \approx w \cdot f(x_1)$$

Trovare w e x_1 in modo da ottenere la massima precisione.

Soluzione

Impongo che la soluzione sia esatta per le costanti $\Rightarrow\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^b \sqrt{x} f(x)\, dx = \int_0^b \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^b dx = b = w \cdot f(x_1) = w \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1}}$$

$$\Rightarrow\ w = b \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1}}$$

Impongo che la soluzione sia esatta per polinomi di grado 1 $\Rightarrow\ f(x) = \sqrt{x}$

$$\int_0^b \sqrt{x} f(x) dx = \int_0^b \sqrt{x}\sqrt{x} dx = \int_0^b x dx = \frac{b^2}{2} \ \Rightarrow\ \frac{b^2}{2} = w \cdot f(x_1) = b \cdot \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_1} = b \cdot x_1$$

$$\Rightarrow\ x_1 = \frac{b}{2}\ \Rightarrow\ w = b \cdot \sqrt{x_1} = \sqrt{\frac{b^3}{2}}$$

Controllo se la formula risulta esatta anche per i polinomi di grado 2 $\Rightarrow$ $f(x) = x\sqrt{x}$

$$\int_0^b \sqrt{x} f(x)\, dx = \int_0^b \sqrt{x} x \sqrt{x}\, dx = \int_0^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3}$$

$$\Rightarrow\ \int_0^b \sqrt{x} x \sqrt{x}\, dx \approx \sqrt{\frac{b^3}{2}} \cdot \frac{b}{2}\sqrt{\frac{b}{2}} = \frac{b^3}{4}$$

Quindi $x_1 = \frac{b}{2}$, $w = \sqrt{\frac{b^3}{2}}$ e la formula ha grado di precisione 1.

ESERCIZIO 14

Applicare la formula di quadratura di Simpson composta per calcolare l'integrale dei seguenti valori tabulati nell'intervallo di tempo $\delta t = 10$h.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(t)$	2.43	2.12	2.56	3.04	3.15	3.74	3.55	3.27	3.00	2.75	2.95

Soluzione

$\int_1^{11} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+4f_5+2f_6+4f_7+2f_8+4f_9+f_{10}] = \frac{1}{3}[2.43+4*2.12+2*2.56+4*3.04+2*3.15+4*3.74+2*3.554*3.27+2*3.00+4*2.75+2.95] = \frac{1}{3}(89.58) = 29.86$

ESERCIZIO 15

Si vuole approssimare l'integrale: $\int_0^3 f(x)dx$ dove $f(x) = x \cdot e^{-4x}$ mediante la formula dei trapezi composta. Determinare il numero minimo n di intervalli necessari per ottenere un errore $|E_{1,n}| \leq 10^{-6}$.

Soluzione

$|E_{1,n}| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$ con $h = (b-a)/n = \frac{3}{n}$

$f'(x) = e^{-4x} \cdot (1-4x) \qquad f''(x) = (-4e^{-4x}) \cdot (2-4x)$

$f''(x) > 0 \;\Rightarrow\; x < \frac{3}{4}$ max

$f''(\frac{3}{4}) = -4e^{-3} \cdot (2-3) = 4e^{-3}$

$|E_{1,n}| \leq \frac{9}{n^2} \cdot \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 4e^{-3} \leq 10^{-6} \;\Rightarrow\; \frac{9e^{-3}}{n^2} \leq 10^{-6} \;\Rightarrow\; n > 669.3 \;\Rightarrow\; n = 670$

Capitolo 6

Sistemi di Equazioni Lineari

ESERCIZIO 1

Calcolare $\det(\mathcal{A})$ con la decomposizione LU, dove

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -11 \end{pmatrix}$$

$$P\mathcal{A} = PLU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathcal{A}) = \det(L) \cdot \det(U) = -1 \cdot (-18) = 18$

ESERCIZIO 2

Calcolare, con la decomposizione LU, l'inversa della matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Soluzione

Decomposizione LU

$$\mathcal{A}_{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Risoluzione dei sistemi $Ly_i = I_i$

$$L \cdot \begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \\ y_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L \cdot \begin{pmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \\ y_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L \cdot \begin{pmatrix} y_3^1 \\ y_3^2 \\ y_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1^1 = 1 \\ \frac{2}{3} + y_1^2 = 0 \\ \frac{5}{3} + \frac{4}{3} + y_1^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2^1 = 0 \\ y_2^2 = 1 \\ -2 + y_2^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3^1 = 0 \\ y_3^2 = 0 \\ y_3^3 = 1 \end{cases}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -3 \end{pmatrix} \qquad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione dei sistemi $Ux_i = y_i$

$$U \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -3 \end{pmatrix} \qquad U \cdot \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad U \cdot \begin{pmatrix} x_3^1 \\ x_3^2 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1^1 - 5 + \frac{21}{2} = 1 \\ \\ -\frac{1}{3}x_1^2 - 1 = -\frac{2}{3} \\ \\ x_1^3 = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_2^1 - 5 - 7 = 0 \\ \\ \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{2}{3} = 1 \\ \\ x_2^3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_3^1 + 5 - \frac{7}{2} = 0 \\ \\ -\frac{1}{3}x_3^2 = -\frac{1}{3} \\ \\ x_3^3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \\ -1 \\ \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ \\ -1 \\ \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \\ 1 \\ \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ \\ -1 & -1 & 1 \\ \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 3

Si consideri la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ \\ 0 & 2 & a \\ \\ -1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori di a la matrice ammette fattorizzazione LU?
2) Posto $a = 1$ e $b = (2, 0, 1)^T$ si consideri il sistema $\mathcal{A}x = b$. Trovare allora U, L, x.

Soluzione

1) Affinché sia possibile l'eliminazione di Gauss occorre che i minori principali siano diversi da zero:

$det(\mathcal{A}) = 4(6 - a^2) - 2 = 22 - 4a^2 \neq 0$ per $a \neq \pm\sqrt{\frac{11}{2}}$

minore di ordine due $\rightarrow 8 \neq 0$ sempre

$\Rightarrow$ la matrice ammette fattorizzazione LU per $a \neq \pm\sqrt{\frac{11}{2}}$

2)

$$\mathcal{A}_{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Ly = b$

$$L \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 0 \\ -\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Ux = y$

$$U \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 4x_1 - \frac{2}{3} = 2 \\ 2x_2 + \frac{2}{3} = 0 \\ x_3 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 4

Si consideri la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di a la matrice ammette fattorizzazione LU?
Posto $a = 1$ e $b = (2, 0, 1)^T$ si consideri il sistema $\mathcal{A}x = c$ ottenuto con tale fattorizzazione. Trovare U, c, x.

Soluzione

Affinché sia possibile l'eliminazione di Gauss occorre che i minori principali siano diversi da zero:

$det(\mathcal{A}) = 1(4 - 1) - 1(2 - a) - (1 - 2a) = 3a \neq 0$ per $a \neq 0$

minore di ordine due $\rightarrow 1 \neq 0$ sempre

$\Rightarrow$ la matrice ammette fattorizzazione LU per $a \neq 0$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Lc = b$

$$L \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} c_1 = 2 \\ 2 + c_2 = 0 \\ 2 + c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Ux = c$

$$U \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 2 \\ x_2 - \frac{2}{3} = -2 \\ x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 5

Trovare $k : \mathcal{A} = LU$, con

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}$$

Posto $k = 6$ e $b = (0, 2, 1)^T$ si consideri il sistema $\mathcal{A}x = b$. Sia $Ux = c$ il sistema ottenuto mediante pivoting parziale con U triangolare superiore. Trovare U, c, x.

Soluzione

Affinché sia possibile l'eliminazione di Gauss occorre che i minori principali siano diversi da zero:

$det(\mathcal{A}) = 2k - 9 \neq 0$ per $k \neq \frac{9}{2}$
$\Rightarrow$ la matrice ammette fattorizzazione LU per $k \neq \frac{9}{2}$
(scambio la seconda riga con la terza)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Lc = Pb$

$$L \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ \frac{2}{3} + c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Ux = c$

$$U \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_2 - 8 = 1 \\ x_3 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 6

Dato il sistema $\mathcal{A}x = b$ con

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sia $Ux = c$ il sistema ottenuto mediante pivoting parziale. Trovare U, c, x.

Soluzione

(scambio la prima riga con la terza)

$$\mathcal{A}_{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \qquad b_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{(3)} = U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Lc = Pb$

$$L \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Ux = c$

$$U \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 3x_1 + \frac{4}{7} - \frac{10}{7} = 0 \\ -\frac{5}{3}x_2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{7} = 0 \\ -\frac{7}{5}x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 7

Si consideri la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinare i valori di a per i quali esiste la fattorizzazione LU. Posto $a = 0$ trovare $L, U, \mathcal{A}^{-1}$.

Soluzione

Affinché sia possibile l'eliminazione di Gauss occorre che i minori principali siano diversi da zero:

$det(\mathcal{A}) = 2(3a+1)+6 \neq 0$ per $a \neq -\frac{4}{3}$
minore di ordine due $\rightarrow 2a+2 \neq 0$ per $a \neq -1$
$\Rightarrow$ la matrice ammette fattorizzazione LU per $a \neq -\frac{4}{3}$ e $a \neq -1$

$$\mathcal{A}_{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Risoluzione dei sistemi $Lc_i = I_i$

$$L \cdot \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \\ c_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L \cdot \begin{pmatrix} c_2^1 \\ c_2^2 \\ c_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L \cdot \begin{pmatrix} c_3^1 \\ c_3^2 \\ c_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione dei sistemi $Ux_i = c_i$

$$U \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad U \cdot \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad U \cdot \begin{pmatrix} x_3^1 \\ x_3^2 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1^1 + \frac{3}{4} = 1 \\ x_1^2 - \frac{1}{4} = -1 \\ x_1^3 = -\frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_2^1 - \frac{3}{4} = 0 \\ x_2^2 + \frac{1}{4} = 0 \\ 4x_2^3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_3^1 + \frac{1}{4} = 0 \\ x_3^2 + \frac{1}{4} = 0 \\ x_3^3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ & & \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ & & \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 8

Si debba risolvere il sistema di equazioni lineari $\mathcal{A}x = b$, dove:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ & & \\ -1 & a & -1 \\ & & \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) Per quali valori di a la matrice ammette la fattorizzazione di Cholewsky?
2) Posto $a = 2$ trovare la fattorizzazione di Gauss $\mathcal{A} = LU$ e risolvere il sistema.
3) Con lo stesso valore del parametro a trovare la fattorizzazione di Cholewsky e risolvere il sistema.

Soluzione

1) Affinché sia possibile la fattorizzazioe di Cholewsky occorre che i minori principali siano positivi:

minore di ordine uno $\rightarrow a > 0$

minore di ordine due $\rightarrow a < -1 \vee a > 1$

minore di ordine tre $\rightarrow a > \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ la matrice ammette fattorizzazione di Cholewsky per $a > \sqrt{2}$

2) Decomposizione LU

$$\mathcal{A}_{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ & & \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ & & \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ & & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ & & \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ & & \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Ly = b$

$$L \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \\ \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y_1 = 1 \\ \\ y_2 = \frac{3}{2} \\ \\ y_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{3}{2} \\ \\ 2 \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Ux = y$

$$U \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \\ \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{3}{2} \\ \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ \\ x_2 = 2 \\ \\ x_3 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \\ 2 \\ \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

3) Decomposizione RR^T

primo metodo: teniamo conto della decomposizione $LU \Rightarrow R = L \cdot diag[\sqrt{U}]$

$$L \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix}$$

secondo metodo:

$\mathcal{A} = RR^T$

$r_{11}^2 = 2 \Rightarrow r_{11} = \sqrt{2}$

$r_{11}r_{21} = -1 \Rightarrow r_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$r_{11}r_{31} = 0 \Rightarrow r_{31} = 0$

$r_{11}^2 + r_{22}^2 = 2 \Rightarrow r_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} = -1 \Rightarrow r_{32} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 2 \Rightarrow r_{33} = \sqrt{\frac{4}{3}}$

Risoluzione del sistema $Ry = b$

$$R \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ y_3 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Risoluzione del sistema $R^T x = y$

$$R^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO 9

Si consideri la matrice:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Determinare i valori di x per i quali la matrice ammette la decomposizione LU, con L matrice triangolare inferiore e U matrice triangolare superiore.
b) Posto $x = 1$ e $b = (2, -1, 0)^T$ si consideri il sistema $\mathcal{A}x = b$. Sia $Mx = c$ il sistema ottenuto da questo mediante pivoting parziale con M matrice triangolare superiore. Determinare M, c e x.
c) Determinare le matrici P, L, U che realizzano la fattorizzazione $P\mathcal{A} = LU$.

Soluzione

a) La matrice ammette la decomposizione LU per $x \neq \pm 1$
b)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \\ 0 & 1 & 0 \\ \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = M$$

ESERCIZIO 10

Si consideri la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \\ 0 & 4 & a \\ \\ -1 & a & 5 \end{pmatrix}$$

i) Per quali valori di a la matrice ammette la decomposizione LL^T con L matrice triangolare inferiore?
ii) Scrivere, in funzione di a, la fattorizzazione LL^T di $\mathcal{A}$.
iii) Scelto $a = 0$, risolvere i sistemi

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases}$$

con $b^T = (1, 2, -1)$.

Soluzione

i) La decomposizione di Cholewsky LL^T é valida per matrici simmetriche e definite positive. Condizione necessaria e sufficiente (Criterio di Sylvester) affinché $\mathcal{A}$ sia definita positiva é: $det(\mathcal{A}_k) > 0 \quad k = 1, 2, ..., n$. Quindi:
minore di ordine uno $\rightarrow 1 > 0 \quad \forall a$
minore di ordine due $\rightarrow 4 > 0 \quad \forall a$
minore di ordine tre $\rightarrow 20 - a^2 - 4 > 0 \Rightarrow -4 < a < 4$
$\Rightarrow$ la matrice ammette fattorizzazione di Cholewsky per $-4 < a < 4$

ii)

$$\mathcal{A} = LL^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \\ 0 & 4 & a \\ \\ -1 & a & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} l_{11}^2 = 1 \\ l_{11}l_{21} = 0 \\ l_{11}l_{31} = -1 \\ l_{11}^2 + l_{22}^2 = 4 \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = a \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & \frac{a}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{16-a^2} \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{16-a^2} \end{pmatrix}$$

iii) $(a = 0)$ Risoluzione del sistema $Ly = b$

$$L \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Risoluzione del sistema $L^T x = y$

$$L^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 11

Data la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & k \\ 2 & 4 & 0 \\ k & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di k la matrice ammette la fattorizzazione LL^T?
Posto $k = 1$ e $b = (2, 0, \sqrt{2})$ sia $L^T x = c$ il sistema ottenuto mediante la fattorizzazione LL^T. Calcolare L^T, c, x.

Soluzione

minore di ordine uno $\rightarrow 2 > 0 \quad \forall k$

minore di ordine due $\rightarrow 4 > 0 \quad \forall k$

minore di ordine tre $\rightarrow 12 - 4k^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ la matrice ammette fattorizzazione di Cholewsky per $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$

$$\mathcal{A} = LL^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} l_{11}^2 = 2 \\ l_{11}l_{21} = -2 \\ l_{11}l_{31} = 1 \\ l_{11}^2 + l_{22}^2 = 4 \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 0 \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Lc = b$

$$L \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = \sqrt{2} \\ c_2 = \sqrt{2} \\ c_3 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Risoluzione del sistema $L^T x = c$

$$L^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \\ \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \\ \sqrt{2} \\ \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} \\ \\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \\ x_3 = (1-\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO 12

Si consideri la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & k \\ \\ 0 & 5 & 3 \\ \\ k & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di k la matrice ammette la fattorizzazione LL^T?
Posto $k = 1$ trovare L.

Soluzione

minore di ordine uno $\rightarrow 6 > 0 \quad \forall k$
minore di ordine due $\rightarrow 30 > 0 \quad \forall k$
minore di ordine tre $\rightarrow 6 + 5k - k^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{6}{5}} < k < \sqrt{\frac{6}{5}}$
$\Rightarrow$ la matrice ammette fattorizzazione di Cholewsky per $-\sqrt{\frac{6}{5}} < k < \sqrt{\frac{6}{5}}$

$$\mathcal{A} = LL^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ \\ 0 & 5 & 3 \\ \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ \\ \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{3}{5}} & \sqrt{\frac{1}{30}} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 13

Si consideri il sistema $\mathcal{A}x = b$ con:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e lo si risolva con la tecnica del pivoting parziale.

Soluzione

(scambio la terza riga con la prima)

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{7}{6} \\ 0 & \frac{5}{18} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & & 1 \end{pmatrix}$$

(scambio la terza riga con la seconda)

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{18} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \qquad \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{18} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{19}{30} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \tilde{b}_1$$

$P\mathcal{A} = LU$ con $P =$"storia degli scambi":

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificare che $P\mathcal{A} = LU$ e che $Pb = b_2$.
Risoluzione del sistema triangolare $Lc = b_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Risoluzione del sistema $Ux = c$

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{18} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{19}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x = \begin{pmatrix} \frac{10}{19} \\ \frac{6}{19} \\ -\frac{12}{19} \end{pmatrix}$$

Capitolo 7

Matlab

ESERCIZIO 1

Valutare la funzione $f(x) = x^2 \cdot cos(x)$ sull'intervallo $I = [-1, 2]$ e rappresentarla graficamente.

Soluzione

Definire un insieme discreto di punti (50 punti equispaziati):
```
>> x = linspace (-1,2,50)
```
Definire la funzione e valutarla:
```
>> f = 'x.^2.*cos(x)'
>> y = eval(f)
```
Rappresentare i punti (x_i, y_i) nel piano:
```
>> plot (x,y)
```

ESERCIZIO 2

Creare un M-file che disegni nella stessa finestra i grafici di:

$$f(x) = (2x - \sqrt{2}) \cdot sin(x)$$
$$g(x) = exp(x) \cdot cos(x)$$

sull'intervallo $I = [-1, 2]$.

Soluzione

M-file:

```
clf
x=linspace(-1,2,50);
f='(2*x - sqrt(2))*sin(2*x)';
fplot(f,[-1,2])
xlabel('x');ylabel('y');
title('Due grafici sulla stessa finestra')
hold on
g='exp(x)*cos(x)';
fplot(g,[-1,2],'r')
legend('f=(2x-sqrt(2))*sin(2x)','g=exp(x)*cos(x)')
```

ESERCIZIO 3

Rappresentare graficamente $f(x, y) = x \cdot e^{-x^2-y^2}$ sul dominio $D = [-2, 2]^2$.

Soluzione

Definire una griglia su D:

```
>> [x,y]=meshgrid(-2:1:2,-2:1:2);
```

Definire $f(x)$ e valutarla:

```
>> f='x.*exp(-x.∧2-y∧2)';
>> z=eval(f)
```

Grafico:

```
>> surf(x,y,z);
>> colorbar
```

ESERCIZIO 4

Calcolare $c = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$.

Soluzione

M-file:

```
e=exp(1);
disp(sprintf('n\t exp(n)\t \t Errore'))
for k = 0:2:16
      n = 10∧k;
      en = (1+1/n)∧n;
```

```
      err = abs(e-en);
      fprintf('%2.1e\t %11.10f\t %e\n', n, en, err)
end
```

ESERCIZIO 5

Scrivere il file.m che calcola il volume di un gas ideale e rappresentare graficamente i risultati.

Soluzione

M-file:

```
disp('Calcolo del volume di un gas ideale')
R=8314;           % costante del gas
t=input('Vettore delle temperature (k) =');
p=input('Pressione (bar) =')*1e5;
v=(R/p)*t;           % legge del gas ideale
plot(t,v)           % grafico del risultato
xlabel('T(K)')
ylabel('V(m^3/kmol)')
title('Volume di un gas ideale vs temperatura')
```

ESERCIZIO 6

Scrivere un programma in Matlab che calcola il numero di batteri presenti in una soluzione al tempo $t = 10$ partendo dai dati iniziali: $a = 0.9$ e $y(0) = 2$. Confrontare (graficamente) il risultato ottenuto con quello che si otterrebbe se $a = 1.3$.

Soluzione

M-file:

```
clear
format long
t=0:10
a=1.3;
y(1)=2;
for i=1:10
```

```
    y(i+1)=a*y(i)
end
plot(t,y)
```

ESERCIZIO 7

Implementare il metodo di bisezione . Scrivere quindi una funzione:

```
function[alfa,fa]=bisez(f,a,b,e)
```

Soluzione

M-file:

```
function[alfa,fa,x]=bisez(f,a,b,toll)
n=log2((b-a)/toll);
n=ceil(n) % + piccolo intero + grande di n
x(1)=a; x(2)=b;
fa=feval(f,a); fb=feval(f,b);
for k=3:n+2
    x(k)=(a+b)/2;
    fxk=feval(f,x(k));
    y=fxk*fa;
    if y==0
        alfa=x(k);
        fa=fxk;
        return
      elseif y<0
        b=x(k);
      else
        a=x(k);
    end
end
alfa=(a+b)/2;
fa=feval(f,alfa);
return
```

ESERCIZIO 8

La temperatura T in prossimitá del suolo varia al variare della concentrazione k dell'acido carbonico e della latitudine L. Per $k = 1.5$ la temperatura al suolo subisce una variazione dipendente dalla temperatura secondo la seguente tabella:

L	-55	-45	-35	-25	-15	-5	5
Δ T	3.7	3.7	3.52	3.27	3.2	3.15	3.15

L	15	25	35	45	55	65
Δ T	3.25	3.47	3.52	3.65	3.67	3.52

Si vuole costruire un MODELLO che descriva la legge T=T(L) anche per latitudini non misurate. Ad esempio si vuole valutare la variazione di temperatura a Roma (L=42^o).

Soluzione

Vediamo diversi metodi.

```
>> lat=linspace(-55,65,13);
>> temp=[3.7 3.7 3.52 3.27 3.2 3.15 3.25 3.47 3.52
     3.65 3.67 3.52];
>> plot(lat,temp,'h');
>> xlabel('Latitudine'); ylabel('Variazione della Temperatura');
```

1 - INTERPOLAZIONE CON POLINOMIO DI GRADO 12

```
>> c=polyfit(lat,temp,12);
```

Segnalazione di Warning!

```
>> roma=polyval(c,42);
>> fprintf('Variazione di temperatura a Roma %6.4e\n',roma)
>> x1=(-55:1:65); y1=polyval(c,x1);
>> hold on
>> plot(x1,y1)
```

La segnalazione di Warning induce a controllare l'accuratezza dei risultati calcolando il residuo.
`res12` fornisce una misura della bontá dell'approssimazione fatta.

```
>> yy12=polyval(c,lat);
>> res12=temp-yy12;
>> fprintf('res12= \t% 6.4e\n',res12)
>> eps
```

OSSERVAZIONE: Il modello non é buono, in alcuni nodi il residuo é di due ordini maggiore della precisione macchina.

L'interpolazione polinomiale globale di Lagrange produce una funzione molto regolare ma presenta problemi di stabilitá numerica e di approssimazione.

2 - INTERPOLAZIONE LINEARE A TRATTI

Si costruisce una suddivisione piú fine per valutare la spezzata in tali punti.

```
>> x1=(-55:1:65);
>> y1=interp1(lat,temp,x1);
>> hold on
>> plot(x1,y1,'r')
>> roma=interp1(lat,temp,42);
>> fprintf('Variazione di temperatura a Roma %6.4e\n',roma)
```

OSSERVAZIONE: Non vengono forniti i coefficienti associati alla forma analitica della funzione. Il modello puó solo essere calcolato per punti. Il polinomio lineare a tratti é continuo non derivabile.

3 - INTERPOLAZIONE SPLINE CUBICA

Si costruisce una funzione continua con derivate prime e seconde continue e che su ogni intervallino é un polinomo di grado 3.

```
>> y3=interp1(lat,temp,x1,'spine');
>> roma3=interp1(lat,temp,42,'spline');
>> fprintf('Variazione di temperatura a Roma %6.4e\n',roma3)
>> figure(2)
>> plot(lat,temp,lat,'spline');
>> yy3=interp1(lat,temp,lat,'spline');
>> res3=temp-yy3;
>> fprintf('res3= \t% 6.4e\n',res3)
```

In questo caso il residuo ha tutte le componenti nulle!

4 - INTERPOLAZIONE RIDOTTA

Si scelgono, ad esempio, 5 punti tra quelli assegnati e si costruisce il polinomio di grado 4.

```
>> xr=[-55, -25, 5, 35, 65];
>> yr=[3.7 3.27 3.15 3.25 3.52];
>> cr=polyfit(xr,yr,4);
>> y4=polyval(cr,x1);
>> figure(3)
>> plot(lat,temp,'h',xr,yr,'h',x1,y4)
>> roma4=plyval(cr,42);
>> fprintf('Variazione di temperatura a Roma %6.4e\n',roma4)
>> yy4=polyval(cr,lat);
>> res4=temp-yy4;
>> fprintf('res4=\t% 6.4e\n',res4)
```

Anche in questo caso i residui sono molto alti.

5 - APPROSSIMAZIONE AI MINIMI QUADRATI

```
>> m=4;
>> cmq=polyfit(lat,temp,m);
>> y5=polyval(cmq,x1);
>> figure(4)
>> plot(lat,temp,'hr',x1,y5)
>> roma5=polyval(cmq,42);
>> fprintf('Variazione di temperatura a Roma %6.4e\n',roma5)
>> yy5=polyval(cmq,lat);
>> res5=temp-yy5;
>> R=norm(res5)^2;
>> fprintf('res5=\t% 6.4e\n % 6.4e',res5,R)
```

ESERCIZIO 9

La seguente tabella é relativa alla fermentazione del Penicillium chrysogenum che produce la penicillina antibiotica.

tempo di fermentazione(h)	DC g/h	O g/h
140	15.72	15.49
141	15.53	16.16
142	15.19	15.35
143	16.56	15.13
144	16.21	14.20
145	17.39	14.23
146	17.36	14.29
147	17.42	12.74
148	17.60	14.74
149	17.75	13.68
150	19.95	14.51

(DC= diossido di carbonio, O= ossigeno)
Usando Simpson, calcolare la quantitá di DC prodotta e la quantitá di O assorbito (consumato) durante un processo di fermentazione durato 10h. Scrivere una function in Matlab e confrontare i risultati con quelli ottenuti con trapz.

Soluzione

M-file:

```
dc=[15.72 15.53 15.19 16.56 16.21 17.39 17.36 17.42 17.60
           17.75 18.95];
o=[15.49 16.16 15.35 15.13 14.20 14.23 14.29 12.74 14.74
           13.68 14.51];
x=[140:1:150]
dx=diff(x);
h=dx(1);
n=11;
y1=dc(2:2:n-1);
y2=dc(3:2:n-2);
s1=sum(y1);
s2=sum(y2);
int1=dc(1)+4*s1+2*s2+dc(n);
int1=int1*h/3
y1o=o(2:2:n-1);
y2o=o(3:2:n-2);
s1o=sum(y1o);
s2o=sum(y2o);
int2=o(1)+4*s1o+2*s2o+o(n);
int2=int2*h/3
```

ESERCIZIO 10

Ordine di convergenza formule di Simpson e trapezi composte.

Soluzione

M-file:

```
f=inline('exp(x)');
a=0;
b=1;
n=[3 7 125 31 63 127];
h=(b-a)./(n-1);
h2=h.^2;
h4=h.^4;
h6=h.^6;
ex=exp(1)-1;
m12=exp(1)/12;
```

```
m180=exp(1)/180;
fprintf('Valore esatto= %15.10f\n',ex)
for i=1:6
      x=[a:h(i):b];
      y=feval(f,x);
      it(i)=trapz(x,y);
      is(i)=Simpson(f,a,b,(i));
end
disp('n Trapezi Errore/h∧2 M/12')
disp()
for k=1:6
      er(k)=abs(ex-it(k);
      er(k)=er(k)/h6(k);
      disp(sprintf('%3.0f%15.10f%15.10f%15.10f\n',n(k),it(k),
           er(k),m180))
end
disp('n Trapezi Errore/h∧6 M/180')
disp()
for k=1:6
      er1(k)=abs(ex-is(k);
      er1(k)=er1(k)/h5(k);
      disp(sprintf('%3.0f%15.10f%15.10f%15.10f\n',n(k),is(k),
           er1(k),m180))
end
```

ESERCIZIO 11

Scrivere un programma Matlab che calcola il Ph di una soluzione $C_0 = 0.1M$ di acido acetico sapendo che la sua costante di dissociazione é $K_a = 1.74 \cdot 10^{-5}$ e che la costante di ionizzazione dell'acqua é $K_w = 10^{-14}$.

Soluzione

Utilizzando la legge di conservazione di carica e di massa il problema viene ricondotto alla ricerca degli zeri del seguente polinomio di terzo grado: $x_{13} + K_a \cdot x_{12} - x_1(K_w - C_0 K_a) - K_w \cdot K_a$.

M-file:

```
format long, e
Ka=1.74e-5
Kw=1.e-14
C0=0.1
```

```
KK=Kw+Ka*C0
Kwa=Ka*Kw
coef=[1,Ka,-KK,-Kwa]
y=roots(coef)
for k=1:3
      if y(k)>0
         ph=-log10(y(k))
      end
end
```

ESERCIZIO 12

Implementare la formula di Simpson composta. Scrivere quindi una funzione:

```
function int=Simpson(f,a,b,n)
```

Soluzione

M-file:

```
function int=Simpson(f,a,b,n)
h=(b-a)/(n-1);
x=[a:h:b];
y=feval(f,x);
y1=y(2:2:n-1);
y2=y(3:2:n-1);
s1=sum(y1);
s2=sum(y2);
int=y(1)+4*s1+2*s2+y(n);
int=int*h/3;
fprintf('Valore dell integrale con Simpson, %6.4',int)
return
```