

POLITECNICO DI MILANO



MECCANICA DEI FLUIDI

ESERCIZI DI STATICA DEI FLUIDI

A cura di: Dalila VESCOVI
Jenny CAMPAGNOL, Diego BERZI

v3.0

Indice

1	Diagramma delle pressioni	3
1.1	Richiami teorici	3
1.2	Esercizi	4
1.2.1	Esercizio 1	4
1.2.2	Esercizio 2	8
1.2.3	Esercizio 3	10
1.2.4	Esercizio 4: Manometro semplice	11
1.2.5	Esercizio 5: Manometro differenziale	14
1.2.6	Esercizio 6: Manometro rovescio	17
1.2.7	Esercizio 7	19
1.2.8	Esercizio 8	21
1.2.9	Esercizio 9	23
1.2.10	Esercizio 10	24
2	Spinte su superfici piane	25
2.1	Richiami teorici	25
2.2	Esercizi	27
2.2.1	Esercizio 1	27
2.2.2	Esercizio 2	30
2.2.3	Esercizio 3	34
2.2.4	Esercizio 4	37
2.2.5	Esercizio 5	41
2.2.6	Esercizio 6	43
3	Spinte su superfici curve	46
3.1	Richiami teorici	46
3.2	Esercizi	48
3.2.1	Esercizio 1	48
3.2.2	Esercizio 2	50
3.2.3	Esercizio 3	54
3.2.4	Esercizio 4	56
3.2.5	Esercizio 5	58
3.2.6	Esercizio 6	60
3.2.7	Esercizio 7	64
3.2.8	Esercizio 8	68
3.3	Applicazioni in relazione al concetto di tensione superficiale	70
3.3.1	Equazione di Laplace	70
3.3.2	Fenomeni di capillarità	73

1 Diagramma delle pressioni

1.1 Richiami teorici

Legge di Stevino

Nelle ipotesi di fluido

- in quiete
- incomprimibile
- pesante

vale la seguente legge di Stevino:

$$\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$$

dove \tilde{z} è la quota geodetica, p/γ l'altezza piezometrica e la somma è detta quota piezometrica.

Applicazioni

Se vale la legge di Stevino, allora:

- una superficie orizzontale è anche una superficie isobara (e viceversa);
- Si definisce **piano dei carichi idrostatici** relativo (P.C.I.) per un determinato fluido γ il piano per cui la pressione relativa è nulla $p = 0$. In un generico punto, la pressione è data da

$$p = \gamma h$$

dove h è l'**affondamento** del punto rispetto al P.C.I.;

- Il diagramma delle pressioni segue un andamento lineare, si parla di distribuzione idrostatica delle pressioni;
- Dati due punti A e B dello stesso fluido, tali che A si trova ad una quota geodetica maggiore di B , allora

$$p_B = p_A + \gamma h_{AB}$$

dove h_{AB} è la differenza tra le quote dei due punti (e non dipende da dove si trova l'origine dell'asse \tilde{z}).

1.2 Esercizi

1.2.1 Esercizio 1

Supponiamo di avere un serbatoio riempito con tre fluidi di peso specifico differente come mostrato in Fig. 1

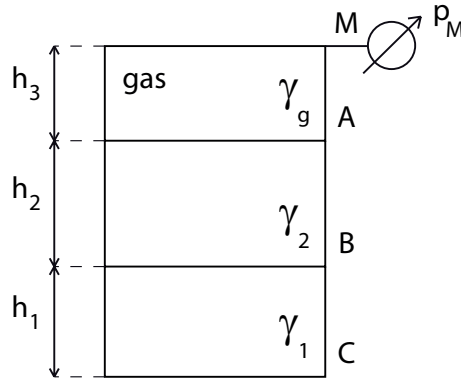


Figura 1: Esercizio 1.

Dati: p_M (pressione misurata dal manometro metallico nel suo baricentro), $\gamma_g, \gamma_1, \gamma_2$, geometria (h_1, h_2, h_3)

Determinare la pressione relativa ed assoluta nei punti A, B, C e la posizione del piano dei carichi idrostatici per i tre fluidi.

Svolgimento:

Consideriamo il fluido più in alto, di peso specifico γ_g . Applicando la legge di Stevino tra i punti A e M si ottiene

$$\tilde{z}_A + \frac{p_A}{\gamma_g} = \tilde{z}_M + \frac{p_M}{\gamma_g}$$

dove \tilde{z}_A e \tilde{z}_M sono le quote geodetiche dei punti A e M , e dipendono da dove si trova l'origine dell'asse \tilde{z} , mentre p_A e p_M sono le pressioni nei due punti. p_M è nota dalla misurazione del manometro metallico (poiché il punto M e il baricentro del manometro si trovano alla stessa quota geodetica), esplicitiamo p_A dalla relazione precedente

$$\begin{aligned} p_A &= p_M + \gamma_g (\tilde{z}_M - \tilde{z}_A) \\ &= p_M + \gamma_g h_3 \end{aligned}$$

indipendentemente da dove si trova l'origine dell'asse \tilde{z} , la differenza tra le quote dei due punti è h_3 ed è nota.

Il fluido in questo caso è un gas, ciò significa che γ_g è molto piccola, praticamente trascurabile, quindi si ottiene semplicemente

$$p_A = p_M.$$

Consideriamo ora il fluido di peso specifico γ_2 . Applicando la legge di Stevino tra i punti B e A si ottiene:

$$\tilde{z}_B + \frac{p_B}{\gamma_2} = \tilde{z}_A + \frac{p_A}{\gamma_2} \Rightarrow$$

$$p_B = p_A + \gamma_2 (\tilde{z}_A - \tilde{z}_B)$$

$$= p_M + \gamma_2 h_2$$

Infine, per l'ultimo fluido otterremo

$$p_C = p_B + \gamma_1 h_1$$

$$= p_M + \gamma_2 h_2 + \gamma_1 h_1.$$

Le pressioni assolute si calcolano a partire da quelle relative aggiungendo la pressione atmosferica assoluta p_{atm}^* :

$$p_A^* = p_A + p_{\text{atm}}^*$$

$$p_B^* = p_B + p_{\text{atm}}^*$$

$$p_C^* = p_C + p_{\text{atm}}^*.$$

Il piano dei carichi idrostatici relativo, per un determinato fluido, è quello per cui la pressione relativa è nulla. Consideriamo il fluido di peso specifico γ_1 e sia C' un punto giacente sul piano dei carichi idrostatici (relativo) per tale fluido. Allora $p_{C'} = 0$, e applicando la legge di Stevino

$$\tilde{z}_{C'} = \tilde{z}_C + \frac{p_C}{\gamma_1}$$

essendo $\tilde{z}_{C'}$ la quota geodetica di C' . Se definiamo $h_C = \tilde{z}_{C'} - \tilde{z}_C$ la distanza tra il P.C.I. relativo del fluido γ_1 e il punto C , allora

$$h_C^{(1)} = \frac{p_C}{\gamma_1}.$$

In pratica h_C è l'affondamento di C rispetto al pelo libero 'virtuale' del liquido che stiamo considerando.

Analogamente per il fluido γ_2

$$h_B^{(2)} = \frac{p_B}{\gamma_2}.$$

Per il gas γ_g si ottiene

$$h_A^{(g)} = \frac{p_A}{\gamma_g}$$

ed essendo γ_g molto piccolo, il P.C.I. del gas è molto lontano (tende ad infinito).

Analogamente, per i piani dei carichi idrostatici assoluti si ottiene

$$\begin{aligned} h_C^{(1)*} &= \frac{p_C^*}{\gamma_1} \\ &= h_C^{(1)} + \frac{p_{atm}^*}{\gamma_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_B^{(2)*} &= \frac{p_B^*}{\gamma_2} \\ &= h_B^{(2)} + \frac{p_{atm}^*}{\gamma_2} \end{aligned}$$

In Fig. 2 sono riportati i diagrammi delle pressioni e i P.C.I., relativi ed assoluti, nel caso $p_M > 0$; in Fig. 3 nel caso $p_M < 0$.

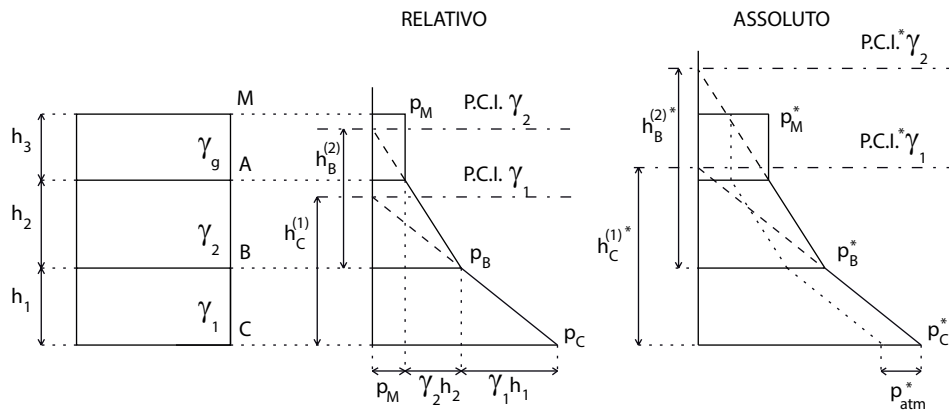


Figura 2: Diagramma delle pressioni e piani dei carichi idrostatici per l'esercizio 1 per $p_M > 0$.

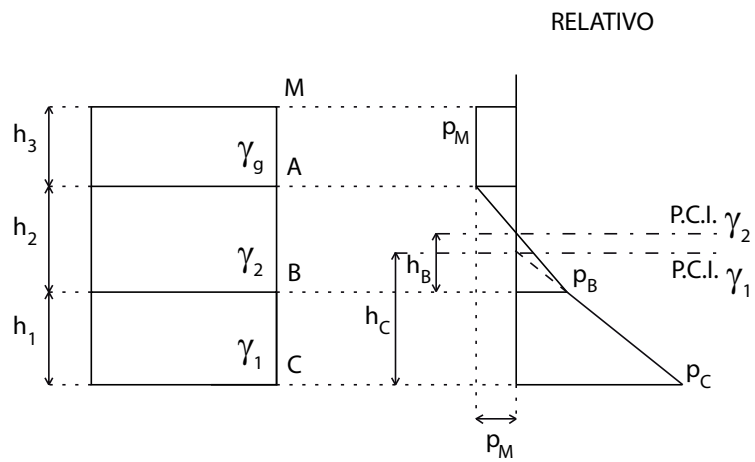


Figura 3: Diagramma delle pressioni e piani dei carichi idrostatici per l'esercizio 1 per $p_M < 0$.

Osservazione: Il P.C.I., per il determinato fluido, passa per il punto di intersezione della retta del diagramma delle pressioni con l'asse $p = 0$.

1.2.2 Esercizio 2

Si tracci, lungo le superfici evidenziate per il serbatoio in Fig. 4, il diagramma delle pressioni.

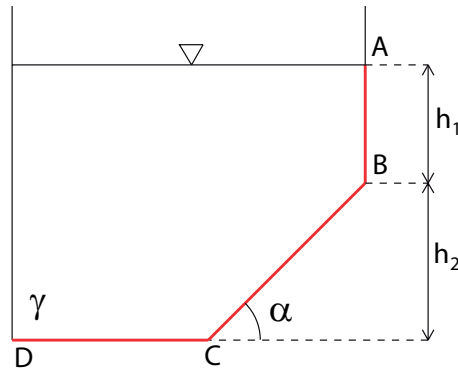


Figura 4: Esercizio 2.

Svolgimento:

Dato un punto che giace su una superficie, la pressione, in quel punto, agisce sempre ortogonalmente alla superficie; il modulo è proporzionale all'affondamento h del punto, rispetto al piano dei carichi idrostatici: $p = \gamma h$ (indipendentemente dall'inclinazione e dalla forma della superficie). Il verso è rivolto contro la parete, per pressioni positive, nella direzione opposta per pressioni negative.

In questo esercizio il piano dei carichi idrostatici relativo è immediatamente individuato dal pelo libero. Calcoliamo le pressioni nei 4 punti indicati:

- punto A: giace sul pelo libero, per cui

$$p_A = 0$$

- punto B: il suo affondamento, rispetto al P.C.I., è pari a h_1 , quindi

$$p_B = \gamma h_1$$

- punto C: ha affondamento $h_1 + h_2$

$$p_C = \gamma(h_1 + h_2)$$

- punto D: ha lo stesso affondamento di C

$$p_D = p_C.$$

Tracciamo il diagramma delle pressioni per le tre superfici:

- Superficie DC : la pressione è costante e pari a $\gamma(h_1 + h_2)$ su tutta la superficie; inoltre le pressioni sono dirette lungo la verticale e rivolte verso il basso (spinte unitarie esercitate dal fluido sulla superficie CD).
- Superficie AB : il diagramma delle pressioni cresce linearmente dal punto A , dove è nullo, al punto B , dove vale γh_1 ; le pressioni sono dirette lungo l'orizzontale e rivolte verso destra. L'angolo che la retta del diagramma delle pressioni forma con l'asse delle $p = 0$ è pari a $\arctan \gamma$.
- Superficie BC : il diagramma delle pressioni è anche in questo caso lineare, e vale γh_1 in B e $\gamma(h_1 + h_2)$ in C . Le pressioni sono ortogonali alla parete BC con verso diretto verso di essa. Con riferimento alla Fig. 5, calcoliamo l'angolo β , tra il prolungamento del piano ove giace BC e la retta del diagramma delle pressioni. Evidentemente

$$p_C = L \tan \beta$$

dove

$$L = \frac{h_1 + h_2}{\sin \alpha}$$

allora

$$\beta = \arctan(\gamma \sin \alpha).$$

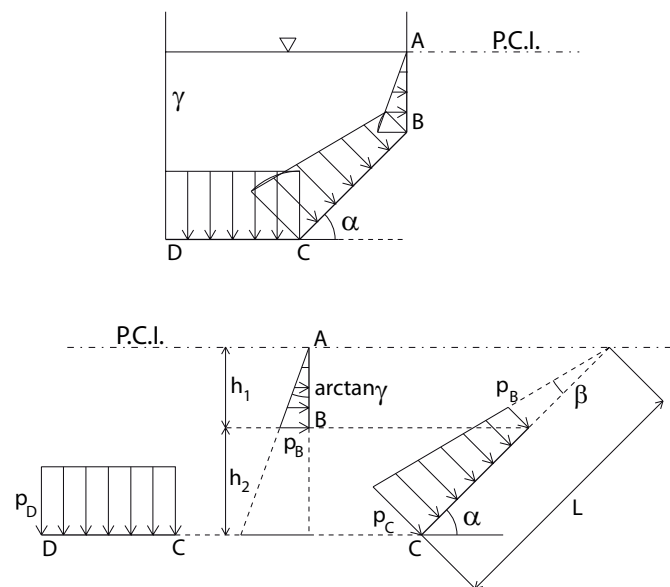


Figura 5: Diagramma delle pressioni dell'esercizio 2.

1.2.3 Esercizio 3

Si tracci, lungo le superfici evidenziate per i due serbatoi in Fig. 6, il diagramma delle pressioni. Si individui qualitativamente la posizione del piano dei carichi idrostatici (relativo).

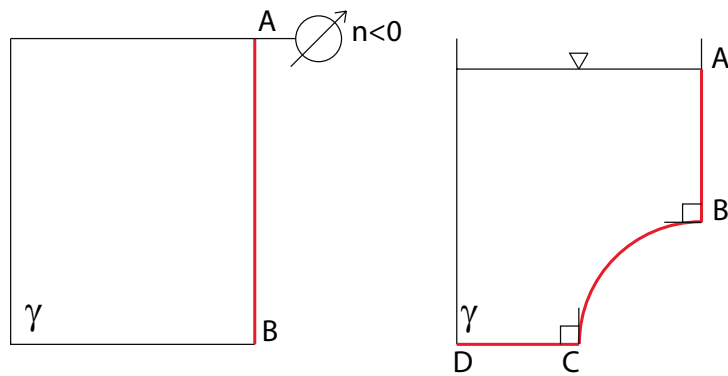


Figura 6: Esercizio 3.

Svolgimento:

In Fig. 7 sono riportati, qualitativamente, il diagramma delle pressioni e i P.C.I. relativi per i due serbatoi.

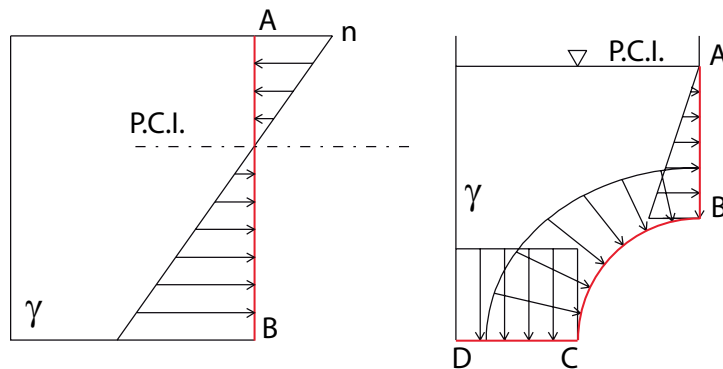


Figura 7: Soluzione esercizio 3.

1.2.4 Esercizio 4: Manometro semplice

Il manometro semplice misura la pressione nel punto in cui è applicato ed è rappresentato in Fig. 8.

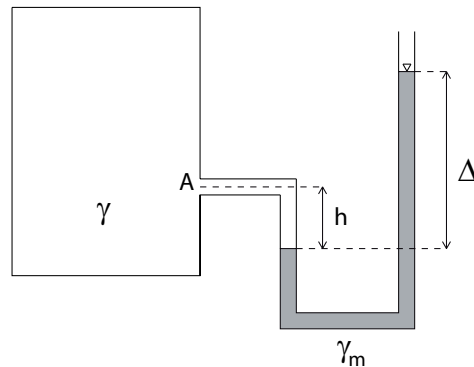


Figura 8: Manometro semplice.

Dati: γ , γ_m e la geometria (h , Δ)

Determinare la pressione relativa nel punto A e il piano dei carichi idrostatici relativi per il fluido di peso specifico γ .

Svolgimento:

Tracciamo un'isobara (linea orizzontale) in corrispondenza dell'interfaccia tra i due fluidi (punto B), e chiamiamo B' la sezione in cui la parte destra del manometro viene intercettata dall'isobara (Fig. 9). Allora le pressioni in B e B' sono uguali: $p_B = p_{B'}$.

Consideriamo il fluido nel manometro (γ_m) e applichiamo la legge di Stevino tra i punti B' e C :

$$\tilde{z}_{B'} + \frac{p_{B'}}{\gamma_m} = \tilde{z}_C + \frac{p_C}{\gamma_m}$$

dove $\tilde{z}_{B'}$ e \tilde{z}_C sono le quote geodetiche dei punti B' e C , e dipendono da dove si trova l'origine dell'asse \tilde{z} , mentre $p_{B'}$ e p_C sono le pressioni nei due punti. Allora si ricava

$$p_{B'} = p_C + \gamma_m (\tilde{z}_C - \tilde{z}_{B'}).$$

Essendo il manometro a contatto con l'atmosfera nell'estremo superiore, $p_C = 0$; inoltre $\tilde{z}_C - \tilde{z}_{B'} = \Delta$, per cui

$$p_{B'} = \gamma_m \Delta.$$

Consideriamo ora il fluido di peso specifico γ contenuto nel serbatoio; applicando per la legge di Stevino tra i punti A e B si ottiene:

$$\tilde{z}_A + \frac{p_A}{\gamma} = \tilde{z}_B + \frac{p_B}{\gamma}$$

per cui

$$\begin{aligned} p_A &= p_B + \gamma(\tilde{z}_B - \tilde{z}_A) \\ &= \gamma_m \Delta + \gamma(-h) \\ &= \gamma_m \Delta - \gamma h. \end{aligned}$$

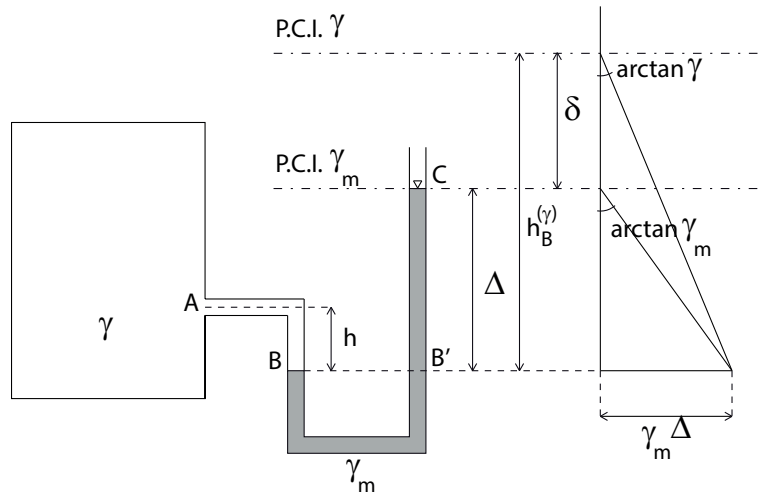


Figura 9: Diagramma delle pressioni e piani dei carichi idrostatici per i due fluidi γ e γ_m .

Calcoliamo le posizioni dei piani dei carichi idrostatici relativi per i due fluidi. Siano $h_B^{(\gamma)}$ e $h_B^{(\gamma_m)}$ gli affondamenti della superficie di interfaccia tra i due fluidi (punto B) rispetto al P.C.I. del fluido γ e quello del fluido γ_m , rispettivamente; allora

$$\begin{aligned} h_B^{(\gamma)} &= \frac{p_B}{\gamma} \\ &= \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta; \\ h_B^{(\gamma_m)} &= \frac{p_B}{\gamma_m} \\ &= \Delta. \end{aligned}$$

Infine, la distanza tra i piani dei carichi idrostatici dei due fluidi, δ , risulta

$$\begin{aligned}\delta &= h_B^{(\gamma)} - h_B^{(\gamma_m)} \\ &= \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma} \Delta.\end{aligned}$$

In Fig. 9 sono riportati i diagrammi delle pressioni per i due fluidi e i rispettivi piani dei carichi idrostatici relativi.

1.2.5 Esercizio 5: Manometro differenziale

Il manometro differenziale misura la differenza di pressione tra i due punti in cui è applicato (Fig. 10).

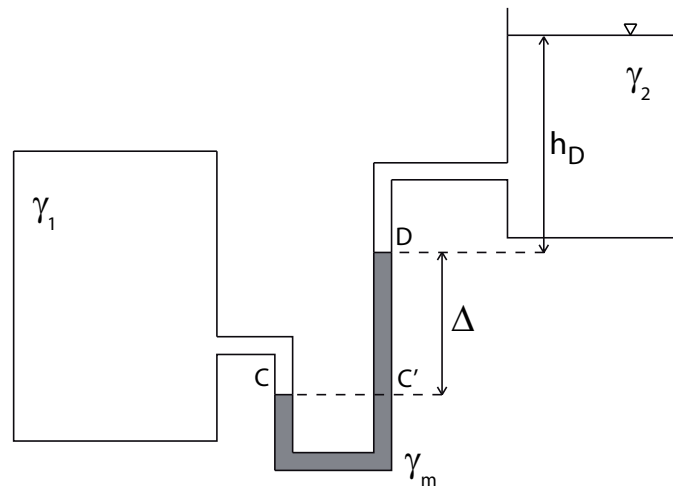


Figura 10: Manometro differenziale.

Dati: γ_1 , γ_2 , γ_m e la geometria (Δ , h_D)

Determinare la distanza δ tra i piani dei carichi idrostatici relativi dei fluidi γ_1 e γ_2 e il diagramma delle pressioni per i due fluidi.

Svolgimento:

Sia h_C la distanza tra il P.C.I. del fluido γ_1 dalla superficie di interfaccia tra γ_1 e γ_m ; allora h_C è l'affondamento del punto C rispetto al P.C.I. del fluido γ_1 (così come h_D è l'affondamento del punto D rispetto al P.C.I. del fluido γ_2).

Supponiamo che il P.C.I. di γ_1 si trovi sopra al P.C.I. di γ_2 (Fig. 11); allora risulta

$$h_C = \Delta + h_D + \delta$$

Tracciamo l'isobara in corrispondenza dell'interfaccia tra il fluido γ_1 e il fluido γ_m (punti C e C'), allora $p_C = p_{C'}$. Applichiamo il teorema di Stevino

- tra C e il P.C.I. per γ_1 :

$$p_C = \gamma_1 h_C$$

- tra C' e D :

$$p_{C'} = p_D + \gamma_m \Delta$$

- tra D e il P.C.I. per γ_2 :

$$p_D = \gamma_2 h_D.$$

Mettendo insieme le tre relazioni si ottiene

$$\gamma_1 h_C = \gamma_2 h_D + \gamma_m \Delta$$

da cui si ricava h_C . Infine

$$\begin{aligned} \delta &= h_C - h_D - \Delta \\ &= \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_1} h_D + \frac{(\gamma_m - \gamma_1)}{\gamma_1} \Delta. \end{aligned}$$

In Fig. 11 sono riportate la posizione del P.C.I. per γ_1 e il diagramma delle pressioni per i due fluidi.

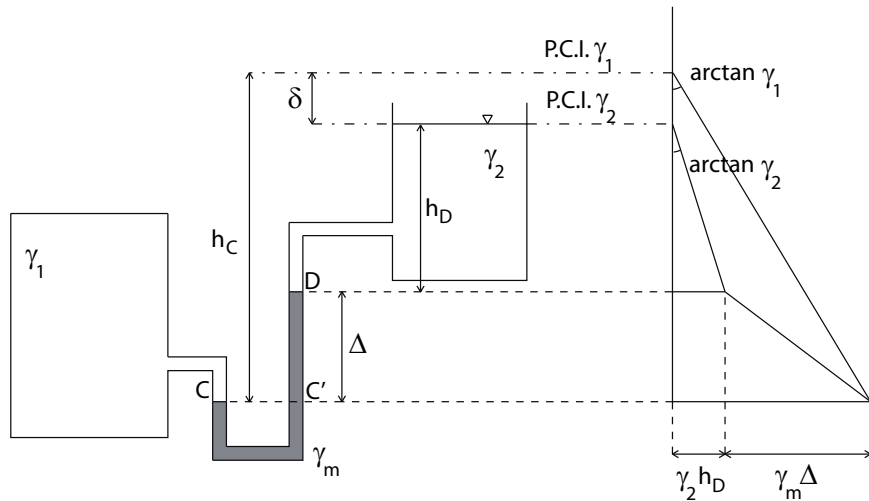


Figura 11: Diagramma delle pressioni e piani dei carichi idrostatici ($\delta > 0$).

Si osservi che, in questo esercizio si è ipotizzato $\gamma_1 > \gamma_2$ (ovviamente $\gamma_m > \gamma_1$); pertanto la pendenza del diagramma delle pressioni per il fluido γ_1 è maggiore di quella del fluido γ_2 . δ può essere positivo o negativo, infatti

$$\delta = \frac{(\gamma_m - \gamma_1)}{\gamma_1} \Delta - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1} h_D$$

La Fig. 11 rappresenta il caso di δ positivo, in Fig. 12 si riporta il caso $\delta < 0$.

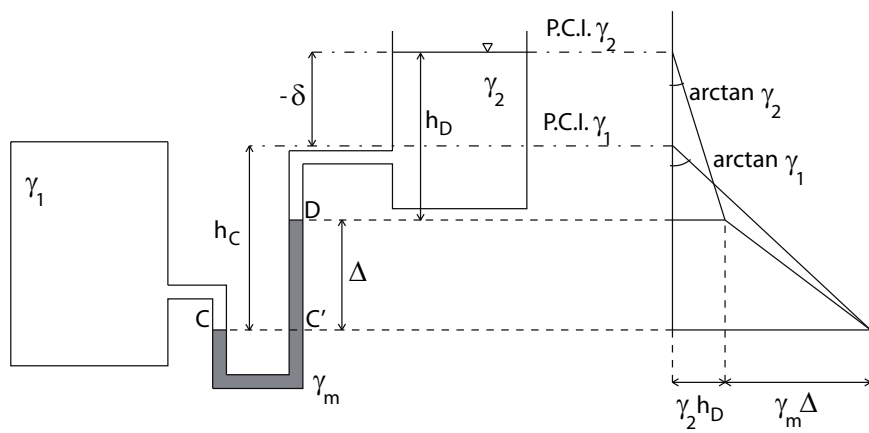


Figura 12: Diagramma delle pressioni e piani dei carichi idrostatici ($\delta < 0$).

1.2.6 Esercizio 6: Manometro rovescio

In questo strumento (Fig. 13), il liquido contenuto nel manometro ha un peso specifico inferiore a quello contenuto nei due serbatoi: $\gamma_m < \gamma$.

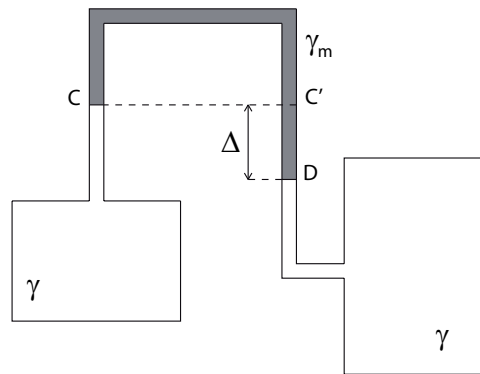


Figura 13: Manometro rovescio.

Dati: γ, γ_m, Δ

Determinare la distanza δ tra i piani dei carichi idrostatici relativi dei due fluidi.

Svolgimento:

Sia h_C l'affondamento del punto C rispetto al P.C.I. del fluido γ del serbatoio di sinistra e h_D quello di D rispetto al P.C.I. del fluido del serbatoio di destra. In questo caso è possibile stabilire a priori che il P.C.I. di destra si troverà più in basso di quello di sinistra, poiché i due serbatoi contengono lo stesso liquido ed essendo $\gamma_m < \gamma$ (Fig. 14). Pertanto risulta

$$h_C + \Delta = \delta + h_D$$

Tracciamo l'isobara in corrispondenza dell'interfaccia tra il fluido γ del serbatoio di sinistra e il fluido γ_m (punti C e C'), allora $p_C = p_{C'}$. Applichiamo il teorema di Stevino

- tra C e il P.C.I. per il serbatoio di sinistra:

$$p_C = \gamma h_C$$

- tra C' e D :

$$p_D = p_{C'} + \gamma_m \Delta$$

- tra D e il P.C.I. per il serbatoio di destra:

$$p_D = \gamma h_D.$$

Mettendo insieme le tre relazioni si ottiene

$$\gamma h_D = \gamma h_C + \gamma_m \Delta$$

per cui

$$h_C = h_D - \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$$

quindi

$$\begin{aligned} \delta &= h_C + \Delta - h_D \\ &= h_D - \gamma_m \Delta + \Delta - h_D \\ &= \frac{(\gamma - \gamma_m)}{\gamma} \Delta. \end{aligned}$$

In Fig. 14 sono riportate le posizioni del P.C.I. e il diagramma delle pressioni per i due serbatoi.

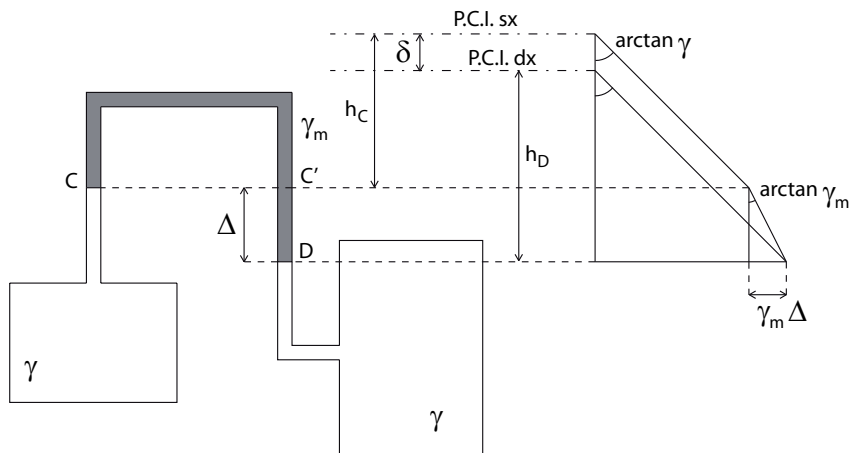


Figura 14: Diagramma delle pressioni e piani dei carichi idrostatici.

Nota: esiste una terza tipologia di manometri, il **manometro metallico**. Questo misura la pressione nel suo baricentro (e non nel punto di applicazione!).

1.2.7 Esercizio 7

Si consideri il serbatoio in Fig. 15 al quale sono stati applicati due manometri semplici.

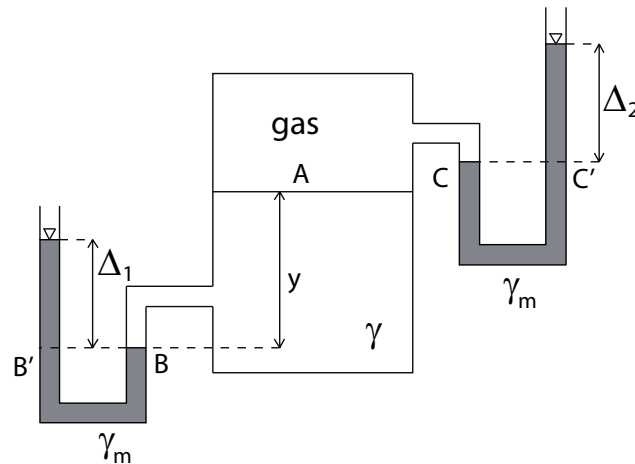


Figura 15: Esercizio 4.

Dati: γ , γ_m , geometria (Δ_1 , Δ_2)

Determinare y tale per cui il sistema è in equilibrio. Disegnare inoltre l'andamento delle pressioni nel serbatoio.

Svolgimento:

In condizioni di equilibrio, la pressione esercitata sulla superficie di interfaccia dal gas è pari a quella esercitata dal liquido:

$$p_{A,\text{gas}} = p_{A,l}$$

Consideriamo il gas:

$$p_{A,\text{gas}} = p_C = \gamma_m \Delta_2$$

essendo la pressione del gas circa costante.

Consideriamo la pressione esercitata dal liquido:

$$p_{A,l} = p_B - \gamma y$$

$$p_B = p_{B'} = \gamma_m \Delta_1$$

per cui

$$p_{A,l} = \gamma_m \Delta_1 - \gamma y.$$

Sfruttando la condizione di equilibrio si ottiene

$$y = \frac{\gamma_m}{\gamma}(\Delta_1 - \Delta_2).$$

Il diagramma delle pressioni nel serbatoio è riportato in Fig. 16.

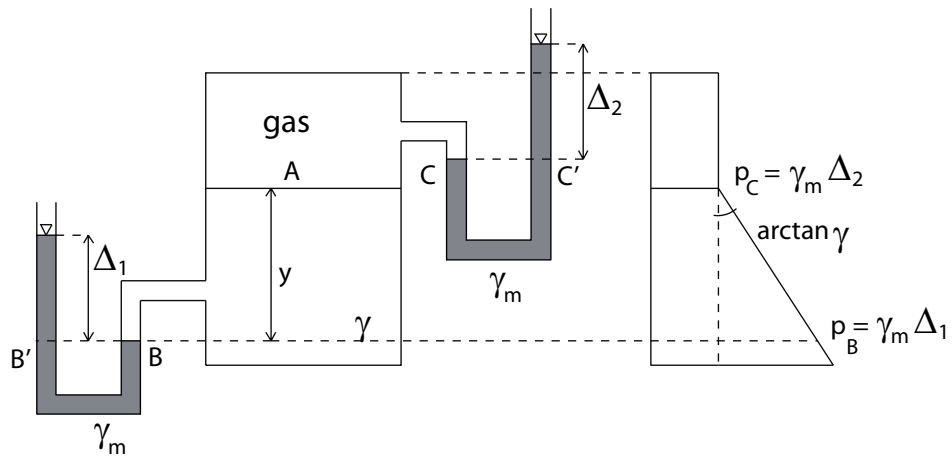


Figura 16: Diagramma delle pressioni per l'esercizio 4.

1.2.8 Esercizio 8

Si consideri il serbatoio Fig. 17 al quale sono stati applicati un manometro semplice e un manometro metallico.

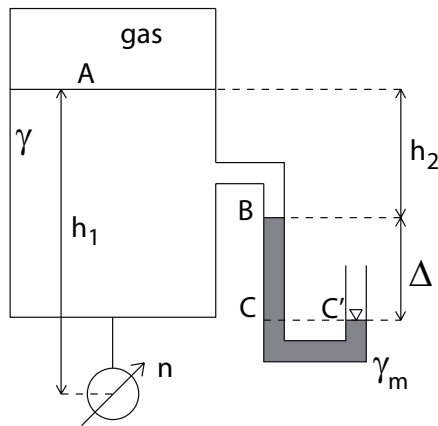


Figura 17: Esercizio 5.

Dati: $\gamma, \gamma_m, \Delta, h_1, h_2$

Determinare la lettura del manometro metallico n .

Svolgimento:

$$n = p_B + \gamma(h_1 - h_2)$$

$$p_B = p_C - \gamma_m \Delta$$

$$p_C = p_{C'} = 0$$

allora

$$n = \gamma(h_1 - h_2) - \gamma_m \Delta.$$

Il punto B si trova in depressione, il segno di n dipende invece dal fatto che $\gamma(h_1 - h_2)$ sia più grande o più piccolo di $\gamma_m \Delta$; nel grafico di Fig. 18 n è stata ipotizzata positiva.

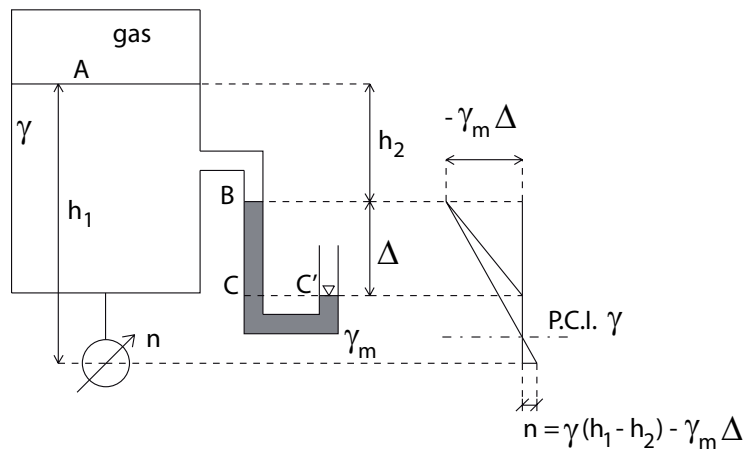


Figura 18: Diagramma delle pressioni per l'esercizio 5.

1.2.9 Esercizio 9

Si consideri il serbatoio in pressione di Fig. 19 contenente due liquidi di densità diversa. Al serbatoio è stato applicato un manometro semplice.

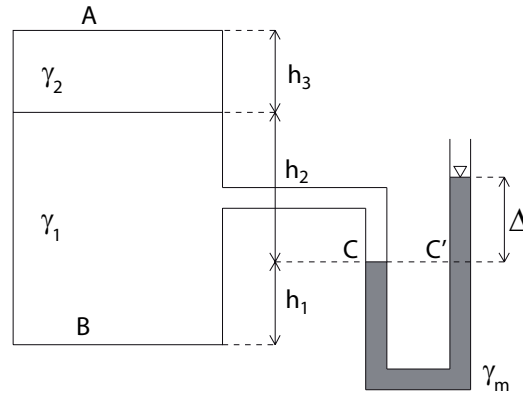


Figura 19: Esercizio 6.

Dati: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_m, \Delta, h_1, h_2, h_3$

Determinare le pressioni in sommità e sul fondo del serbatoio, rispettivamente p_A e p_B .

Svolgimento:

$$p_A = \gamma_m \Delta - \gamma_1 h_2 - \gamma_2 h_3$$

$$p_B = \gamma_m \Delta + \gamma_1 h_1.$$

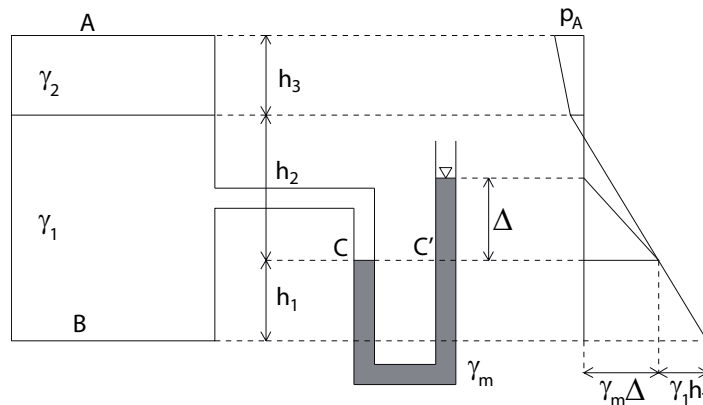


Figura 20: Diagramma delle pressioni per l'esercizio 6.

1.2.10 Esercizio 10

Si considerino i due serbatoi a pelo libero collegati da un manometro differenziale di Fig. 21.

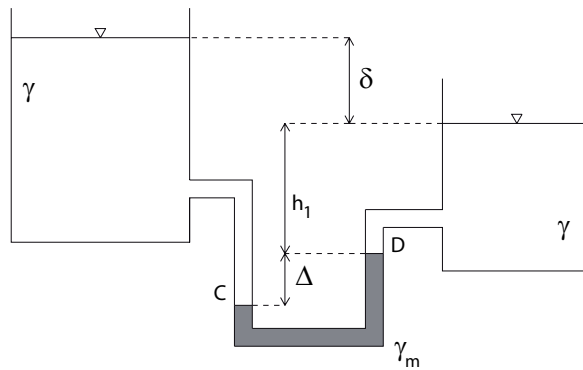


Figura 21: Esercizio 7.

Dati: $\gamma, \gamma_m, \delta, h_1$
Determinare Δ .

Svolgimento:

$$p_C = p_D + \gamma_m \Delta$$

$$p_C = \gamma(\Delta + h_1 + \delta)$$

$$p_D = \gamma h_1$$

quindi

$$\gamma \Delta + \gamma h_1 + \gamma \delta = \gamma h_1 + \gamma_m \Delta$$

da cui

$$\Delta = \frac{\gamma}{\gamma_m - \gamma} \delta.$$

2 Spinte su superfici piane

2.1 Richiami teorici

Si consideri la superficie di area A che giace su un piano inclinato di un angolo α rispetto al piano dei carichi idrostatici P.C.I. (orizzontale) come rappresentato in Fig. 22. La retta di intersezione tra il P.C.I. e il piano contenente la superficie è detta **retta di sponda**. Fissiamo un sistema di riferimento in cui l'asse Y coincide con la retta di sponda e l'asse X giace sul piano contenente A ed è ortogonale a Y .

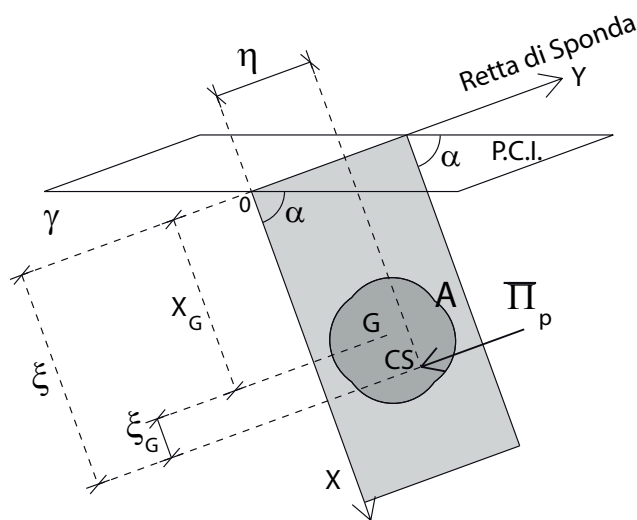


Figura 22: Spinta su superficie piana generica.

La spinta esercitata dalla superficie sul fluido è pari a

$$\bar{\Pi}_p = \int_A p \hat{\mathbf{n}} dA$$

dove A è l'area della superficie, p è la pressione e $\hat{\mathbf{n}}$ è la normale alla parete entrante nel volume di fluido.

Nel caso di superfici piane, $\hat{\mathbf{n}}$ è costante, per cui

$$\bar{\Pi}_p = \left(\int_A p dA \right) \hat{\mathbf{n}}.$$

Inoltre,

$$\int_A p dA = p_G A$$

essendo p_G la pressione nel baricentro G della superficie. Allora

$$\bar{\Pi}_p = p_G A \hat{\mathbf{n}}.$$

Si osservi che la spinta $\bar{\mathbf{S}}$, esercitata dal fluido sulla superficie, è uguale ed opposta alla spinta $\bar{\mathbf{\Pi}}_p$, esercitata dalla superficie sul fluido:

$$\bar{\mathbf{S}} = -\bar{\mathbf{\Pi}}_p = -p_G A \hat{\mathbf{n}}.$$

La retta di applicazione di $\bar{\mathbf{S}}$ è ortogonale alla superficie, e il punto di intersezione tra tale retta e il piano contenente A è detto **centro di spinta** CS . Sia ξ la coordinata X di CS (distanza del centro di spinta dalla retta di sponda) e η la coordinata Y . Dall'equilibrio dei momenti si ricava che

$$\xi = \frac{I}{M}$$

$$\eta = \frac{I_{xy}}{M}$$

dove:

$$M = \int_A X dA = X_G A$$

$$I = \int_A X^2 dA$$

$$I_{xy} = \int_A XY dA$$

sono rispettivamente il momento statico, il momento di inerzia e il momento centrifugo della superficie A rispetto alla retta di sponda (asse Y), mentre X_G è la coordinata lungo l'asse X del baricentro ($[I] = [L]^4$; $[M] = [L]^3$).

Per il teorema degli assi paralleli di Huygens-Steiner si ha

$$\xi = \xi_G + X_G$$

dove

$$\xi_G = \frac{I_G}{M}$$

e

$$I_G = \int_A (X - X_G)^2 dA$$

è il momento di inerzia della superficie A rispetto all'asse parallelo all'asse Y passante per il baricentro G . I_G non dipende dalla posizione del P.C.I. perché è riferito al baricentro: dipende solo dalla forma della superficie; ξ_G è la distanza, sull'asse Y , tra il baricentro G e il centro di spinta CS (Fig. 22). Si noti che il centro di spinta CS è sempre più distante del baricentro dalla retta di sponda.

2.2 Esercizi

2.2.1 Esercizio 1

Consideriamo la Fig. 23 e calcoliamo la spinta $\bar{\mathbf{S}}$ esercitata dal fluido γ sulla parete verticale piana $ABB'A'$.

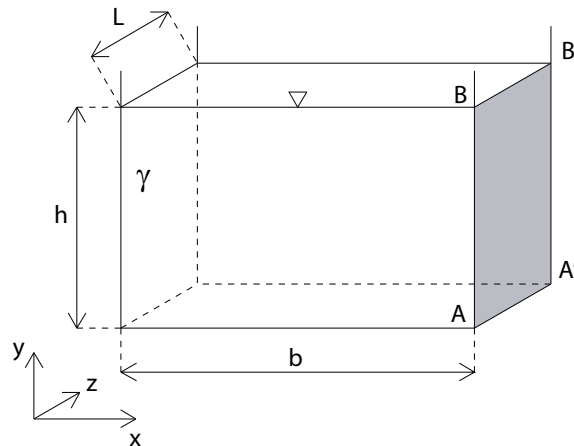


Figura 23: Esercizio 1.

- **Direzione:** la spinta è ortogonale alla parete, quindi è diretta orizzontalmente ($S_y = 0$): $\bar{\mathbf{S}} = S_x \hat{\mathbf{i}}$;
- **Verso:** essendo le pressioni positive, la spinta sarà rivolta contro la parete (per pressione positiva), quindi nel verso delle x positive:
 $S_x = |\bar{\mathbf{S}}|$;
- **Modulo:**

$$|\bar{\mathbf{S}}| = p_G A$$

la superficie $ABB'A'$ è un rettangolo, per cui $A = Lh$; inoltre il baricentro si trova a metà altezza, per cui

$$p_G = \gamma \frac{h}{2}.$$

Allora

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \frac{1}{2} \gamma h^2 L;$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \gamma h^2 L \hat{\mathbf{i}}.$$

- **Retta di applicazione:** In questo caso la retta di sponda è ortogonale al piano xy , in Fig. 25 è rappresentata dal punto B; inoltre l'asse X ha

stessa direzione e verso opposto all'asse y . Calcoliamo le coordinate del centro di spinta CS . Sia ξ la distanza di CS dalla retta di sponda (punto B) lungo l'asse y , allora

$$\xi = X_G + \xi_G$$

dove $X_G = \frac{h}{2}$ e

$$\begin{aligned} \xi_G &= \frac{I_G}{M} \\ &= \frac{I_G}{X_G A}. \end{aligned}$$

Il valore di I_G si trova tabulato per diverse figure geometriche. Per un generico rettangolo di base B ed altezza H , come riportato in Fig. 24, si trova

$$I_G = \frac{BH^3}{12}.$$

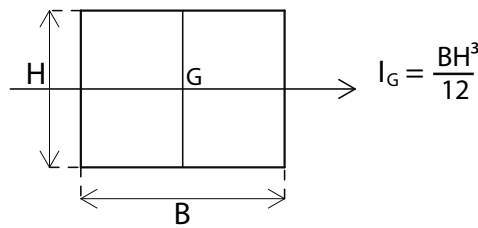


Figura 24: Momento di inerzia di un rettangolo rispetto ad un asse baricentrico.

Per la superficie $ABB'A'$, la base del rettangolo, rispetto ad una retta parallela alla retta di sponda, è $B = L$ e l'altezza $H = h$, per cui

$$\xi_G = \frac{\frac{Lh^3}{12}}{\frac{h}{2} \cdot Lh} = \frac{h}{6}$$

e quindi

$$\xi = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2}{3}h.$$

Si poteva procedere anche in un altro modo. Infatti, sappiamo che la retta di applicazione passa per il baricentro del solido delle pressioni. Il solido delle pressioni è un prisma a base triangolare e il suo baricentro dista $\frac{2}{3}h$ dal vertice B ; quindi, semplicemente, $\xi = \frac{2}{3}h$.

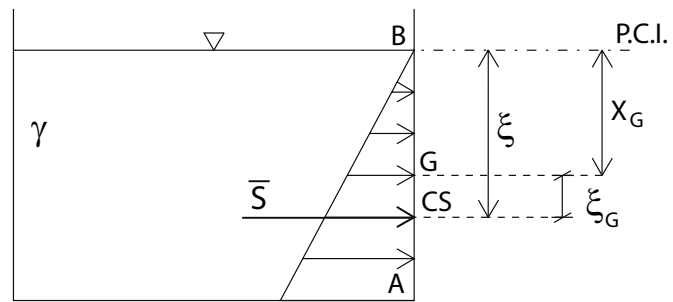


Figura 25: Diagramma delle pressioni e spinta \bar{S} .

2.2.2 Esercizio 2

Determinare la spinta $\bar{\mathbf{S}}$ agente sulla superficie $ABB'A'$ di Fig. 26, dati h_1 , h_2 , L , γ_1 , γ_2 . Calcolare inoltre il centro di spinta.

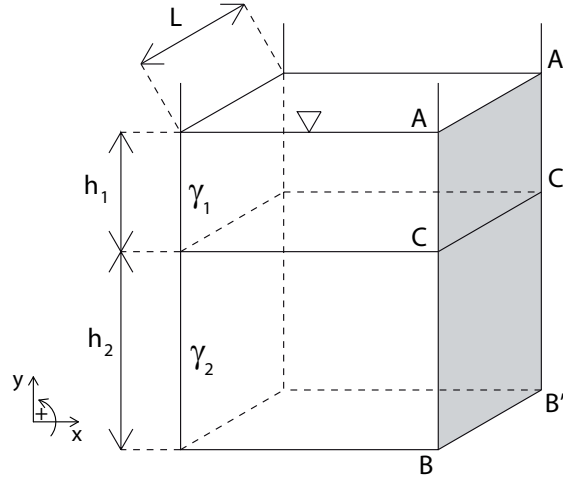


Figura 26: Esercizio 2.

Svolgimento:

Scomponiamo l'effetto dovuto ai due fluidi. Sia $\bar{\mathbf{S}}_1$ la spinta esercitata dal fluido γ_1 sulla superficie $ACC'A'$ e $\bar{\mathbf{S}}_2$ la spinta esercitata dal fluido γ_2 sulla superficie $BCC'B'$. Allora

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}_1 + \bar{\mathbf{S}}_2.$$

- **Direzione:** la spinta è ortogonale alla parete, quindi è diretta orizzontalmente ($S_y = S_{1,y} = S_{2,y} = 0$): $\bar{\mathbf{S}} = S_x \hat{\mathbf{i}}$;
- **Verso:** essendo le pressioni positive, la spinta sarà rivolta contro la parete, quindi nel verso delle x positive: $S_x = |\bar{\mathbf{S}}|$;
- **Modulo:** $|\bar{\mathbf{S}}| = |\bar{\mathbf{S}}_1| + |\bar{\mathbf{S}}_2|$.

$$|\bar{\mathbf{S}}_1| = p_{G,1} A_1$$

$$|\bar{\mathbf{S}}_2| = p_{G,2} A_2$$

dove

$$A_1 = h_1 L \quad \text{area della superficie } ACC'A'$$

$$p_{G,1} = \gamma_1 \frac{h_1}{2} \quad \text{pressione baricentro } G_1 \text{ di } A_1$$

$$A_2 = h_2 L \quad \text{area della superficie } BCC'B'$$

$$p_{G,2} = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 \frac{h_2}{2} \quad \text{pressione baricentro } G_2 \text{ di } A_2$$

per cui

$$|\bar{\mathbf{S}}_1| = \frac{1}{2}\gamma_1 h_1^2 L$$

$$|\bar{\mathbf{S}}_2| = \left(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 \frac{h_2}{2} \right) h_2 L$$

$$|\bar{\mathbf{S}}| = |\bar{\mathbf{S}}_1| + |\bar{\mathbf{S}}_2|.$$

- **Retta di applicazione:** consideriamo la Fig. 27. Il momento esercitato dalla spinta $\bar{\mathbf{S}}$, rispetto ad un qualsiasi polo, deve essere pari alla somma dei momenti di $\bar{\mathbf{S}}_1$ e $\bar{\mathbf{S}}_2$ rispetto allo stesso polo. Scegliamo per esempio il punto A , rispetto al quale calcolare i momenti; siano b , b_1 e b_2 le distanze di $\bar{\mathbf{S}}$, $\bar{\mathbf{S}}_1$ e $\bar{\mathbf{S}}_2$ dal punto A ; allora

$$|\bar{\mathbf{S}}| b = |\bar{\mathbf{S}}_1| b_1 + |\bar{\mathbf{S}}_2| b_2.$$

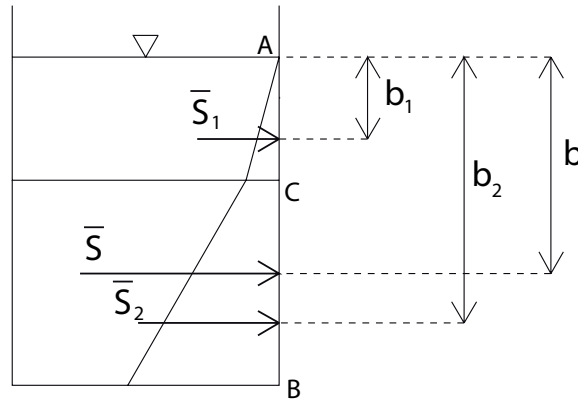


Figura 27: Spinte e diagramma delle pressioni per l'esercizio 2.

Calcoliamo b_1 come la distanza del baricentro del solido delle pressioni agenti sulla superficie $ACC'A'$ dal punto A . Essendo il solido un prisma a base triangolare, si ha che

$$b_1 = \frac{2}{3}h_1.$$

Analogamente b_2 è pari alla distanza del baricentro del solido delle pressioni agenti sulla superficie $BCC'B'$ dal punto A . Il solido delle pressioni è un prisma a base trapezoidale: vediamo come calcolarne il baricentro. Facciamo riferimento alla Fig. 28.

Allora

$$b_2 = h_1 + h^*$$

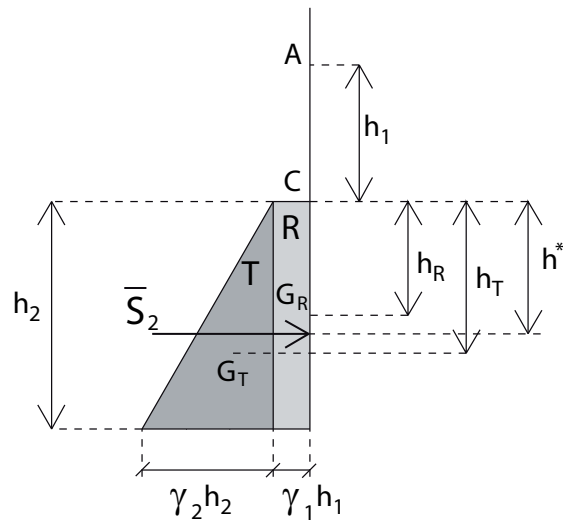


Figura 28: Baricentro del solido delle pressioni agenti sulla superficie $BCC'B'$.

dove h^* è la distanza dal punto C del baricentro del trapezio. Per stimare h^* basta dividere il trapezio nella somma di un rettangolo e di un triangolo e applicare la seguente formula:

$$h^* = \frac{h_R A_R + h_T A_T}{A_R + A_T}$$

dove:

A_R è l'area del rettangolo:

$$A_R = \gamma_1 h_1 \cdot h_2$$

A_T è l'area del triangolo:

$$A_T = \frac{1}{2} \gamma_2 h_2 \cdot h_2$$

h_R è la distanza da C del baricentro del rettangolo:

$$h_R = \frac{h_2}{2}$$

h_T è la distanza da C del baricentro del triangolo:

$$h_T = \frac{2}{3} h_2.$$

Risulta pertanto

$$b_2 = h_1 + \frac{\frac{1}{2}\gamma_1 h_1 h_2 + \frac{1}{3}\gamma_2 h_2^2}{\gamma_1 h_1 + \frac{1}{2}\gamma_2 h_2}.$$

Infine

$$b = \frac{|\bar{\mathbf{S}}_1| b_1 + |\bar{\mathbf{S}}_2| b_2}{|\bar{\mathbf{S}}_1| + |\bar{\mathbf{S}}_2|}.$$

Osservazione: in questo esercizio si è scelto di calcolare i centri di spinta delle due spinte $\bar{\mathbf{S}}_1$ e $\bar{\mathbf{S}}_2$ passando attraverso il baricentro del solido delle pressioni. In modo equivalente, si sarebbe potuto far riferimento alla retta di sponda e calcolare le posizioni dei centri di spinta tramite la $\xi = X_G + \xi_G$. In questo caso si sarebbero dovute determinare le posizioni dei piani dei carichi idrostatici relativi per i due fluidi (e quindi delle rette di sponda).

2.2.3 Esercizio 3

Determinare la spinta \bar{S} agente sulla superficie AB di Fig. 29, noti: h_1 , h_2 , h_3 , α , γ , L (profondità del serbatoio) e la pressione misurata dal manometro metallico, $n < 0$. Calcolare inoltre la posizione del centro di spinta.

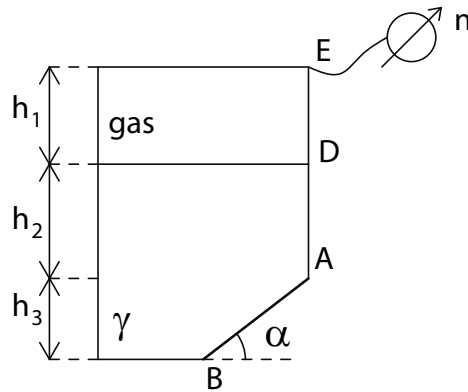


Figura 29: Esercizio 3.

Svolgimento:

Tracciamo il diagramma delle pressioni sulla parete AB , supponendo che sia interamente in depressione (Fig. 30):

$$p_A = n + \gamma h_2$$

$$p_B = n + \gamma(h_2 + h_3).$$

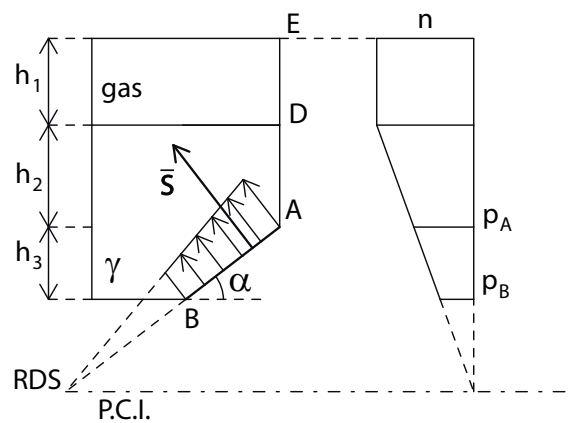


Figura 30: Diagramma delle pressioni e P.C.I. per l'esercizio 3.

Essendo in depressione, il fluido genera un diagramma delle pressioni ‘negativo’, con verso entrante nel serbatoio rispetto alla parete.

Calcoliamo la spinta $\bar{\mathbf{S}}$ sulla parete AB . $\bar{\mathbf{S}}$ è diretta ortogonalmente ad AB entrante nel volume di fluido. Il modulo è dato da

$$|\bar{\mathbf{S}}| = |p_G|A$$

dove

$$A = \overline{AB} \cdot L \quad \text{area della superficie } AB$$

$$\overline{AB} = \frac{h_3}{\sin \alpha}$$

$$p_G = n + \gamma \left(h_2 + \frac{h_3}{2} \right) \quad \text{pressione nel baricentro } G \text{ di } A \text{ (è negativa)}$$

per cui

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \left| n + \gamma \left(h_2 + \frac{h_3}{2} \right) \right| \frac{h_3 L}{\sin \alpha}.$$

Infine, determiniamo la posizione del centro di spinta CS di $\bar{\mathbf{S}}$. Conosciamo dove si trova il piano dei carichi idrostatici e, quindi, la retta di sponda. Sia ξ la distanza del centro di spinta dalla retta di sponda lungo la retta passante per i punti A e B (Fig. 31), e X_G la distanza del baricentro G della superficie dalla retta di sponda.

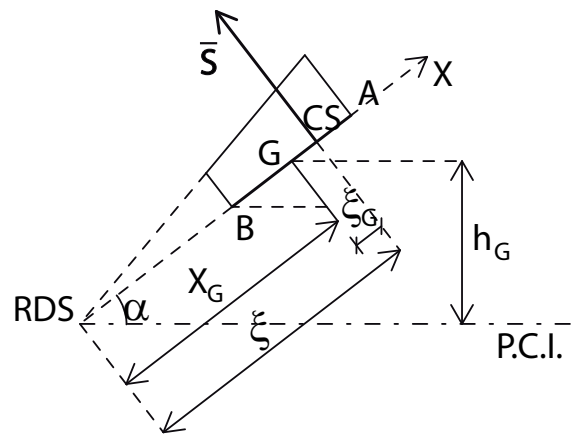


Figura 31: Posizione del centro di spinta per l'esercizio 3.

Allora

$$\xi = X_G + \xi_G$$

dove ξ_G è la distanza tra CS e G lungo la retta passante per A e B

$$\xi_G = \frac{I_G}{M} = \frac{I_G}{X_G A}$$

e, essendo la parete un rettangolo di lati L e \overline{AB} , si trova che

$$I_G = \frac{L \overline{AB}^3}{12} = \frac{L}{12} \left(\frac{h_3}{\sin \alpha} \right)^3.$$

Resta da determinare solo X_G . Dalla geometria, risulta

$$X_G = \frac{h_G}{\sin \alpha}$$

dove h_G è l'affondamento del punto G rispetto al piano dei carichi idrostatici (ovvero la distanza, sull'asse verticale, tra G e il P.C.I.). Allora

$$h_G = \frac{|p_G|}{\gamma}$$

e

$$X_G = \frac{|p_G|}{\gamma \sin \alpha}.$$

2.2.4 Esercizio 4

Determinare la spinta \bar{S} agente sulla superficie AB di Fig. 32 noti h_1 , h_2 , h_3 , γ , L (profondità del serbatoio). Calcolare inoltre la posizione della retta di applicazione.

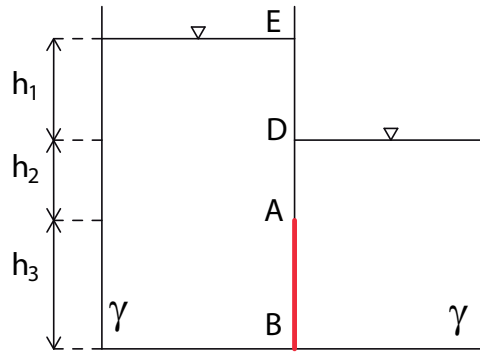


Figura 32: Esercizio 4.

Svolgimento:

Il fluido nei due serbatoi esercita pressioni diverse sulle due facce della parete AB . Tracciamo il diagramma delle pressioni (Fig. 33).

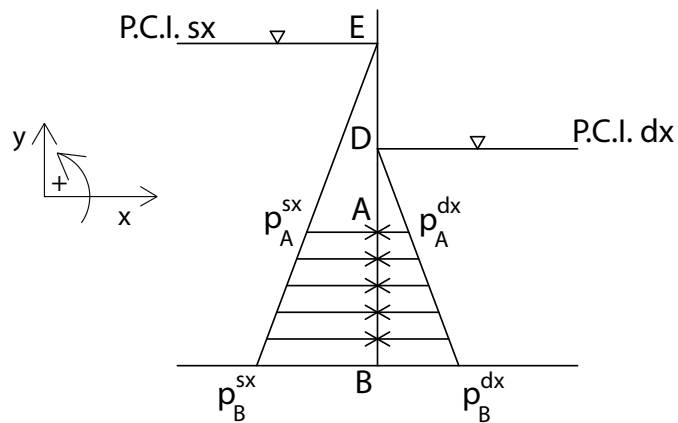


Figura 33: Diagramma delle pressioni per l'esercizio 4.

La spinta \bar{S} su AB è data dalla risultante delle spinte esercitate dai fluidi nei due serbatoi, \bar{S}^{sx} e \bar{S}^{dx} :

$$\bar{S} = \bar{S}^{sx} + \bar{S}^{dx}.$$

Proiettando lungo i due assi x e y si ottiene

$$S_x = S_x^{\text{sx}} + S_x^{\text{dx}}$$

$$S_y = S_y^{\text{sx}} + S_y^{\text{dx}} = 0$$

essendo la parete verticale (e, quindi, la spinta orizzontale).
Calcoliamo le due componenti:

$$S_x^{\text{sx}} = p_G^{\text{sx}} A$$

$$S_x^{\text{dx}} = -p_G^{\text{dx}} A$$

il segno meno nella seconda componente indica il fatto che è rivolta nel verso delle x negative.

$$A = h_3 \cdot L$$

$$p_G^{\text{sx}} = \gamma \left(h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2} \right)$$

$$p_G^{\text{dx}} = \gamma \left(h_2 + \frac{h_3}{2} \right)$$

per cui

$$S_x = \gamma h_1 h_3 L$$

ed essendo positiva, $\bar{\mathbf{S}}$ è rivolta nel verso delle x positive.

Si osservi che avremmo potuto determinare S_x anche a partire dal diagramma delle pressioni risultanti. Infatti, sottraendo al diagramma di sinistra quello di destra si ottiene, sulla superficie AB , un diagramma rettangolare e pari a γh_1 .

Quindi

$$S_x = p_G A = \gamma h_1 h_3 L.$$

Per determinare la posizione del centro di spinta consideriamo i due trapezi delle pressioni agenti su AB . Il momento della spinta $\bar{\mathbf{S}}$ rispetto ad un punto qualsiasi, deve essere uguale alla risultante dei momenti di $\bar{\mathbf{S}}^{\text{sx}}$ e $\bar{\mathbf{S}}^{\text{dx}}$ rispetto allo stesso punto. Consideriamo il punto A e siano b , b^{sx} , b^{dx} le distanze dal punto A rispettivamente del centro di spinta, del baricentro del trapezio di sinistra e del baricentro del trapezio di destra (come illustrato in Fig. 34).

Allora

$$b = \frac{b^{\text{sx}} |S_x^{\text{sx}}| - b^{\text{dx}} |S_x^{\text{dx}}|}{|S_x|}.$$

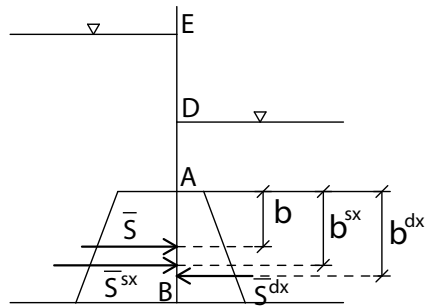


Figura 34: Posizione del centro di spinta l'esercizio 4.

Calcoliamo b^{sx} e b^{dx} scomponendo i trapezi nella somma di un rettangolo ed un triangolo come visto nell'esercizio 2:

$$b^{sx} = \frac{\gamma (h_1 + h_2) h_3 \frac{h_3}{2} + \frac{1}{2} \gamma h_3^2 \frac{2}{3} h_3}{\gamma (h_1 + h_2) h_3 + \frac{1}{2} \gamma h_3^2}$$

$$= \frac{h_3 \left(h_1 + h_2 + \frac{2}{3} h_3 \right)}{2 \left(h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2} \right)}$$

$$b^{dx} = \frac{\gamma h_2 h_3 \frac{h_3}{2} + \frac{1}{2} \gamma h_3^2 \frac{2}{3} h_3}{\gamma h_2 h_3 + \frac{1}{2} \gamma h_3^2}$$

$$= \frac{h_3 \left(h_2 + \frac{2}{3} h_3 \right)}{2 \left(h_2 + \frac{h_3}{2} \right)}$$

per cui

$$b = \frac{\frac{h_3}{2} \frac{\left(h_1 + h_2 + \frac{2}{3} h_3 \right)}{\left(h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2} \right)} \gamma \left(h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2} \right) h_3 L - \frac{h_3}{2} \frac{\left(h_2 + \frac{2}{3} h_3 \right)}{\left(h_2 + \frac{h_3}{2} \right)} \gamma \left(h_2 + \frac{h_3}{2} \right) h_3 L}{\gamma h_1 h_3 L}$$

$$= \frac{h_3}{2 h_1} \left(h_1 + h_2 + \frac{2}{3} h_3 - h_2 - \frac{2}{3} h_3 \right)$$

$$= \frac{h_3}{2}.$$

Infatti, poiché il diagramma delle pressioni risultante sottraendo quello di destra a quello di sinistra è un rettangolo, il centro di spinta dista dal punto A proprio $b = \frac{h_3}{2}$.

2.2.5 Esercizio 5

Determinare il peso specifico γ_2 del fluido nel serbatoio di destra affinché la paratoia AB di Fig. 35 non ruoti attorno alla cerniera in C . Si considerino noti h , γ_1 , α , L (larghezza del serbatoio in direzione perpendicolare al foglio).

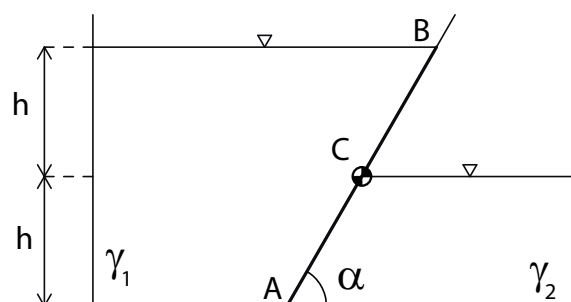


Figura 35: Esercizio 5.

Svolgimento:

Sia $\bar{\mathbf{S}}_1$ la spinta esercitata dal fluido γ_1 e $\bar{\mathbf{S}}_2$ quella esercitata da γ_2 . Definiamo inoltre b_1 e b_2 le distanze, lungo la retta passante per i punti A e B , dei centri di spinta di $\bar{\mathbf{S}}_1$ e $\bar{\mathbf{S}}_2$ dal punto C (Fig. 36).

Imponiamo l'equilibrio alla rotazione della paratoia rispetto al punto C :

$$|\bar{\mathbf{S}}_1| b_1 - |\bar{\mathbf{S}}_2| b_2 = 0;$$

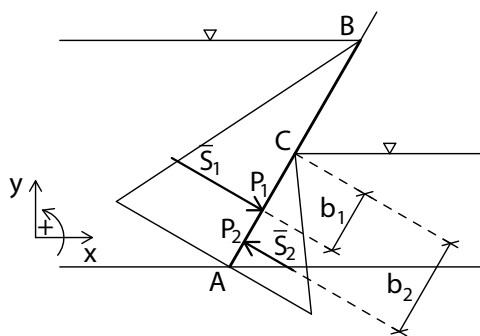


Figura 36: Centri di spinta per l'esercizio 5.

$$|\bar{\mathbf{S}}_1| = |p_{G,1}| A_1;$$

$$|\bar{\mathbf{S}}_2| = |p_{G,2}| A_2.$$

Calcoliamo i moduli delle spinte. La spinta $\bar{\mathbf{S}}_1$ agisce sulla parete AB , mentre la spinta $\bar{\mathbf{S}}_2$ solo sulla porzione AC :

$$\begin{aligned} A_1 &= \overline{AB} \cdot L = 2 \frac{h}{\sin \alpha} L && \text{area della superficie } AB \\ p_{G,1} &= \gamma_1 h && \text{pressione baricentro } G_1 \text{ di } A_1 \\ A_2 &= \overline{AC} \cdot L = \frac{h}{\sin \alpha} L && \text{area della superficie } AC \\ p_{G,2} &= \gamma_2 \frac{h}{2} && \text{pressione baricentro } G_2 \text{ di } A_2. \end{aligned}$$

Sia P_1 il centro di spinta di $\bar{\mathbf{S}}_1$. Il diagramma delle pressioni di γ_1 su AB è triangolare, pertanto il centro di spinta si trova a distanza dal vertice superiore B pari a

$$\overline{BP_1} = \frac{2}{3} \overline{AB} = \frac{2}{3} \frac{2h}{\sin \alpha} = \frac{4h}{3 \sin \alpha}$$

allora

$$b_1 = \overline{CP_1} = \overline{BP_1} - \overline{BC} = \frac{4}{3} \frac{h}{\sin \alpha} - \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{3} \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Sia P_2 il centro di spinta di $\bar{\mathbf{S}}_2$. Anche il diagramma delle pressioni fatto da γ_2 su AC è triangolare, con vertice in C , pertanto

$$b_2 = \overline{CP_2} = \frac{2}{3} \overline{AC} = \frac{2}{3} \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Per l'equilibrio alla rotazione rispetto a C si ha

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{S}}_1| b_1 - |\bar{\mathbf{S}}_2| b_2 &= 0 \\ \Downarrow \\ 2\gamma_1 \frac{h^2}{\sin \alpha} L \frac{1}{3} \frac{h}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \gamma_2 \frac{h^2}{\sin \alpha} L \frac{2}{3} \frac{h}{\sin \alpha} &= 0 \\ \Downarrow \\ \gamma_2 &= 2\gamma_1. \end{aligned}$$

2.2.6 Esercizio 6

Si consideri il serbatoio cilindrico di Fig. 37, cui è collegato un manometro semplice. Nel serbatoio è presente una paratoia a sezione circolare BC che separa il fluido di peso specifico γ da un gas. Nel baricentro G della paratoia c'è una cerniera.

Dati $\gamma, \gamma_m, \alpha, \Delta, a, D, h$, determinare:

- il diagramma delle pressioni agente sulla paratoia BC ;
- la coppia \bar{M} che è necessario applicare affinché la paratoia non ruoti intorno alla cerniera in G .

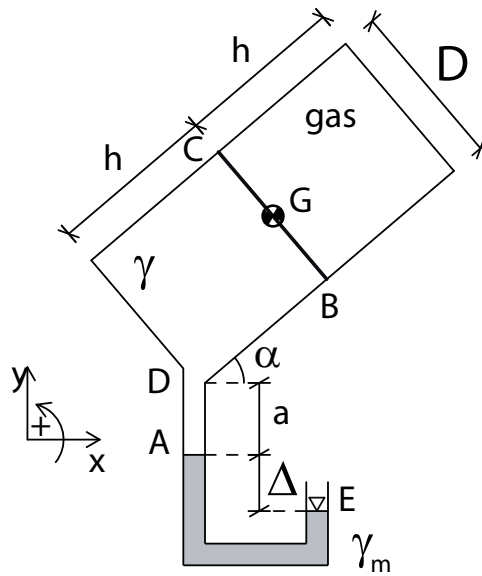


Figura 37: Esercizio 6.

Svolgimento:

Diagramma delle pressioni:

Consideriamo il fluido γ che si trova a sinistra della paratoia e calcoliamo le pressioni nei punti B e C , esercitate da γ , sfruttando la condizione nota dal manometro semplice nel punto E ($p_E = 0$):

$$p_A = -\gamma_m \Delta$$

$$p_D = p_A - \gamma a = -\gamma_m \Delta - \gamma a$$

$$p_B = p_D - \gamma h_{BD} = -\gamma_m \Delta - \gamma (a + h \sin \alpha)$$

$$p_C = p_B - \gamma h_{CB} = -\gamma_m \Delta - \gamma (a + h \sin \alpha + D \cos \alpha).$$

La parte di serbatoio con fluido γ si trova pertanto tutta in depressione e il diagramma delle pressioni su BC è riportato in Fig. 38.

Il diagramma delle pressioni nella parte di serbatoio contenente gas è uniforme, ma non è possibile determinare dai dati il valore della pressione p_{gas} .

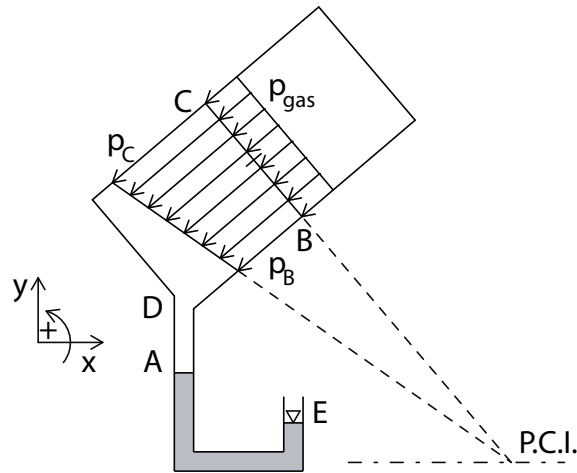


Figura 38: Diagramma delle pressioni per l'esercizio 6.

Calcolo di $\overline{\mathbf{M}}$:

Per determinare la coppia $\overline{\mathbf{M}}$ necessaria affinché la paratoia BC non ruoti intorno G , si deve imporre l'equilibrio alla rotazione rispetto a G . Dobbiamo quindi determinare quali sono le forze che possiedono momento rispetto a questo polo. Il fluido γ esercita una spinta $\overline{\mathbf{S}}$ applicata ad una distanza ξ_G dal baricentro di BC . La spinta esercitata dal gas invece è applicata lungo una retta passante per il baricentro della superficie BC . Quindi la spinta del gas non possiede momento rispetto a G . Consideriamo la Fig. 39, dove $\overline{\mathbf{M}} = M_z \hat{\mathbf{k}}$.

Sia ξ_G la distanza del centro di spinta CS di $\overline{\mathbf{S}}$ dal baricentro G . Imponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto a G si ottiene

$$M_z + |\overline{\mathbf{S}}| \xi_G = 0.$$

M_z ha segno negativo, dunque agisce in senso orario.

Il modulo della spinta è dato da

$$|\overline{\mathbf{S}}| = p_G A$$

dove A è l'area della paratoia circolare BC , e p_G è la pressione nel baricentro G .

Il braccio di $\overline{\mathbf{S}}$ è proprio la distanza tra il centro di spinta e il baricentro,

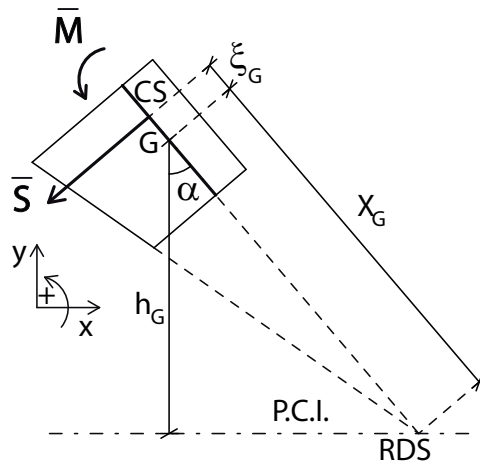


Figura 39: Centro di spinta per l'esercizio 6.

perciò

$$\xi_G = \frac{I_G}{X_G A}$$

dove X_G è la distanza, lungo l'asse passante per B e C , del baricentro dal piano dei carichi idrostatici, e $I_G = \frac{\pi D^4}{64}$ è il momento di inerzia baricentrico per una sezione circolare.

Dalla geometria si ricava che

$$X_G = \frac{h_G}{\cos \alpha}$$

essendo h_G la distanza di G dal piano dei carichi idrostatici lungo l'asse verticale y . Allora

$$h_G = \frac{|p_G|}{\gamma}$$

Infine si ricava che

$$\begin{aligned} M_z &= -|\bar{\mathbf{S}}| \xi_G \\ &= -|p_G| A \frac{I_G}{X_G A} \\ &= -|p_G| \frac{I_G \cos \alpha}{h_G} \\ &= -|p_G| \gamma \frac{I_G \cos \alpha}{|p_G|} \\ &= -\gamma I_G \cos \alpha. \end{aligned}$$

Si noti che la coppia da applicare per mantenere ferma la paratoia è indipendente dalla pressione esercitata dal fluido.

3 Spinte su superfici curve

3.1 Richiami teorici

Metodo dell'equazione globale

Data la superficie curva A bagnata dal fluido γ , si individua un volume di controllo W in modo che:

- la superficie A sia parte del contorno del volume W (il resto del contorno è costituito da superfici piane)
- il volume si considera riempito del fluido γ
- il fluido nel volume di controllo ha la stessa distribuzione di pressioni del fluido reale.

Sul volume di controllo W agiscono la forza peso $\bar{\mathbf{G}}$ e le forze di superficie esercitate dalle pareti sul fluido; tutte le forze devono soddisfare l'equazione di equilibrio globale:

$$\bar{\mathbf{G}} + \sum \bar{\mathbf{\Pi}}_p = \bar{\mathbf{0}}.$$

Consideriamo per esempio la Fig. 40, per la quale si vuole calcolare la spinta $\bar{\mathbf{S}}$ sulla superficie AB . Il volume di controllo scelto è quello rappresentato a destra ABC . Su di esso agiscono, oltre alla forza peso $\bar{\mathbf{G}}$, $\bar{\mathbf{\Pi}}_1$ sulla superficie orizzontale CB , $\bar{\mathbf{\Pi}}_2$ sulla superficie verticale AC e $\bar{\mathbf{\Pi}}_0$ sulla superficie curva AB .

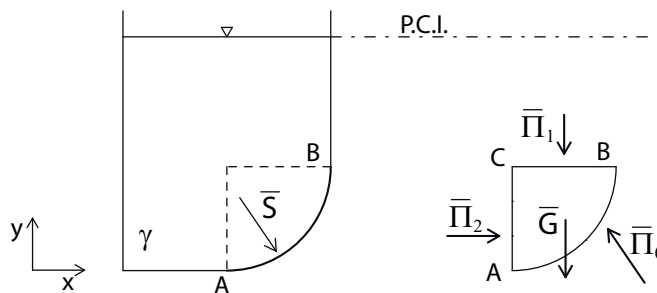


Figura 40: Metodo dell'equazione globale.

Allora l'equazione dell'equilibrio globale per il volume di controllo scelto diventa:

$$\bar{\mathbf{\Pi}}_0 + \bar{\mathbf{\Pi}}_1 + \bar{\mathbf{\Pi}}_2 + \bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{0}}.$$

La spinta $\bar{\mathbf{S}}$ esercitata dal fluido sulla parete AB è uguale ed opposta a quella esercitata dalla parete sul fluido $\bar{\mathbf{\Pi}}_0$, per cui

$$\bar{\mathbf{S}} = -\bar{\mathbf{\Pi}}_0 = \bar{\mathbf{\Pi}}_1 + \bar{\mathbf{\Pi}}_2 + \bar{\mathbf{G}}$$

e proiettando lungo gli assi x e y si ottiene

$$S_x = \Pi_{1,x} + \Pi_{2,x} + G_x,$$

$$S_y = \Pi_{1,y} + \Pi_{2,y} + G_y.$$

A questo punto, $G_x = \Pi_{1,x} = \Pi_{2,y} = 0$ mentre

$$\Pi_{1,y} = -p_{G,1}A_1,$$

$$\Pi_{2,x} = p_{G,2}A_2,$$

$$G_y = -\gamma W,$$

dove

$A_1 =$ area della superficie piana CB

$p_{G,1} =$ pressione nel baricentro G_1 di A_1

$A_2 =$ area della superficie piana AC

$p_{G,2} =$ pressione nel baricentro G_2 di A_2

$W =$ volume di controllo.

Una volta note le componenti S_x e S_y , il modulo di $\bar{\mathbf{S}}$ si ricava come

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}.$$

Se consideriamo $\bar{\mathbf{S}}$ inclinata di un angolo β rispetto alla verticale, allora

$$\beta = \arctan \left| \frac{S_x}{S_y} \right|.$$

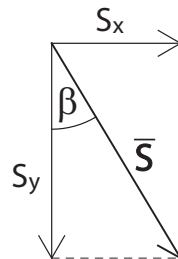


Figura 41: Componenti e direzione della spinta $\bar{\mathbf{S}}$.

3.2 Esercizi

3.2.1 Esercizio 1

Determinare la spinta $\bar{\mathbf{S}}$ agente sulla calotta cilindrica di traccia AB (Fig. 42), dati H , r , γ , L (profondità in direzione ortogonale al foglio).

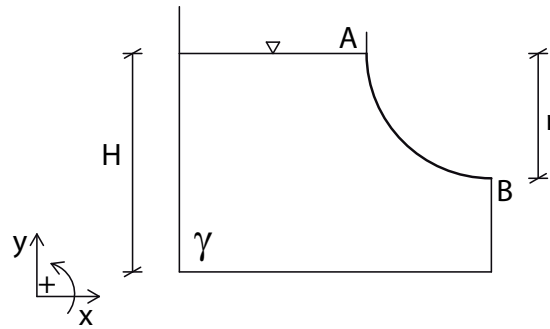


Figura 42: Esercizio 1.

Svolgimento:

Scegliamo come volume di controllo γ quello riportato in Fig. 43. In questo caso il volume di controllo è fittizio, ovvero nella realtà non contiene il fluido di cui si sta valutando la spinta. Lo si suppone riempito di fluido γ per il quale il piano dei carichi idrostatici è lo stesso che nel serbatoio reale (alla quota della superficie superiore orizzontale AC). La spinta $\bar{\mathbf{S}}$ cercata è la spinta esercitata dall'esterno sul volume, per cui:

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{\Pi}}_0.$$

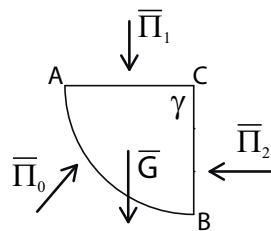


Figura 43: Volume di controllo per l'esercizio 1.

Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\mathbf{\Pi}}_0 + \bar{\mathbf{\Pi}}_1 + \bar{\mathbf{\Pi}}_2 + \bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{0}}.$$

e proiettando lungo gli assi x e y si ottiene

$$S_x = -\Pi_{2,x},$$

$$S_y = -\Pi_{1,y} - G_y.$$

Calcoliamo i singoli contributi:

$$\Pi_{1,y} = -p_{G,1}A_1$$

dove $A_1 = rL$ è l'area della superficie orizzontale AC , e $p_{G,1} = 0$ poiché G_1 si trova sul piano dei carichi idrostatici.

$$\Pi_{2,x} = -p_{G,2}A_2$$

dove $A_2 = rL$ è l'area della superficie verticale BC , e la pressione nel suo baricentro è $p_{G,2} = \gamma \frac{r}{2}$. Infine il peso è

$$G_y = -\gamma W = -\gamma \frac{\pi}{4} r^2 L.$$

Allora

$$S_x = \frac{1}{2} \gamma r^2 L,$$

$$S_y = \frac{1}{4} \pi \gamma r^2 L,$$

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}.$$

La retta di applicazione di $\bar{\mathbf{S}}$ si trova imponendo l'equilibrio dei momenti rispetto ad un polo qualsiasi. Considerando la Fig. 44, la retta di applicazione di $\bar{\mathbf{S}}$ passa per il punto di intersezione delle rette di applicazione di $\bar{\Pi}_2$ e $\bar{\mathbf{G}}$ e ha inclinazione (rispetto alla verticale)

$$\beta = \arctan \frac{S_x}{S_y}.$$

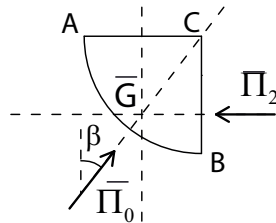


Figura 44: Retta di applicazione della spinta $\bar{\mathbf{S}}$ per l'esercizio 1.

3.2.2 Esercizio 2

Determinare la spinta $\bar{\mathbf{S}}$ agente sulla calotta cilindrica di traccia AC (Fig. 45), dati h , r , γ , L (profondità della calotta cilindrica) e l'indicazione n del manometro metallico.

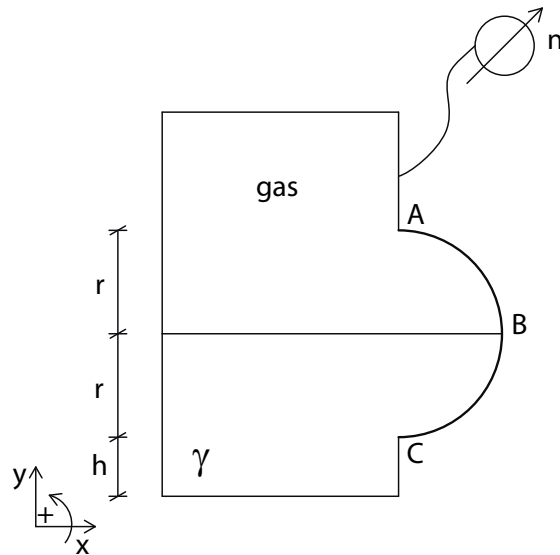


Figura 45: Esercizio 2.

Svolgimento:

Caso A: $n > 0$

Consideriamo il volume di controllo rappresentato in Fig. 46.

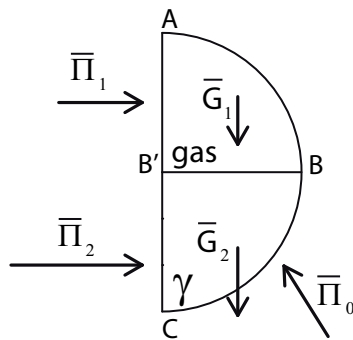


Figura 46: Volume di controllo per l'esercizio 2.

In questo caso, riempiamo il volume di controllo con i due fluidi presenti nel serbatoio (volume di controllo reale), con la stessa distribuzione di pressione della realtà. Possiamo utilizzare un unico volume di controllo poiché i due fluidi sono a contatto tra di loro e c'è continuità della distribuzione delle pressioni.

Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{\mathbf{G}}_1 + \bar{\mathbf{G}}_2 = \bar{\mathbf{0}}.$$

In questo caso $\bar{\mathbf{S}}$ è la spinta esercitata dal volume sulla superficie, per cui

$$\bar{\mathbf{S}} = -\bar{\Pi}_0 = \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{\mathbf{G}}_1 + \bar{\mathbf{G}}_2$$

e proiettando lungo gli assi x e y , si ottiene

$$S_x = \Pi_{1,x} + \Pi_{2,x},$$

$$S_y = G_{1,y} + G_{2,y}.$$

Calcoliamo i contributi:

$$\Pi_{1,x} = p_{G,1}A_1$$

è la componente orizzontale della spinta esercitata dal gas sulla superficie AB' , per cui $A_1 = rL$ (area della superficie verticale AB') e $p_{G,1} = n$, poiché consideriamo la pressione costante per un gas.

$$\Pi_{2,x} = p_{G,2}A_2$$

è la componente orizzontale della spinta esercitata dal fluido γ sulla superficie $B'C$, per cui $A_2 = rL$ (area della superficie verticale $B'C$) e la pressione nel suo baricentro è $p_{G,2} = n + \gamma\frac{r}{2}$. Il peso del volume superiore riempito di gas si può trascurare e porre

$$G_{1,y} \cong 0$$

mentre

$$G_{2,y} = -\gamma W_2 = -\gamma\frac{\pi}{4}r^2L.$$

Allora,

$$S_x = \left(2n + \gamma\frac{r}{2}\right)rL,$$

$$S_y = -\frac{1}{4}\pi\gamma r^2L,$$

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}.$$

Infine, determiniamo la posizione della retta di applicazione di $\bar{\mathbf{S}}$. Conosciamo la sua inclinazione rispetto alla verticale:

$$\beta = \arctan \frac{|S_x|}{|S_y|}.$$

Per determinare la retta di applicazione imponiamo l'equilibrio alla rotazione rispetto ad un punto 'comodo'. Come polo scegliamo per esempio il punto P di Fig. 47, intersezione delle rette di applicazione di $\bar{\mathbf{G}}_2$ e $\bar{\mathbf{\Pi}}_2$.

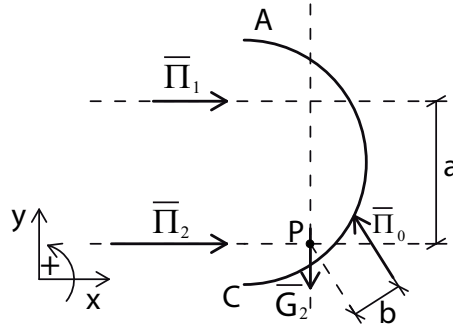


Figura 47: Retta di applicazione della spinta $\bar{\mathbf{S}}$ per l'esercizio 2.

In questo modo infatti $\bar{\mathbf{G}}_2$ e $\bar{\mathbf{\Pi}}_2$ non possiedono momento rispetto a P , e posti a e b i bracci di $\bar{\mathbf{\Pi}}_1$ e $\bar{\mathbf{\Pi}}_0$ rispetto a P , risulta

$$|\bar{\mathbf{\Pi}}_0|b - |\bar{\mathbf{\Pi}}_1|a = 0.$$

Il braccio a è facilmente calcolabile come distanza tra i centri di spinta di $\bar{\mathbf{\Pi}}_1$ e $\bar{\mathbf{\Pi}}_2$; infine

$$b = \frac{|\bar{\mathbf{\Pi}}_1|}{|\bar{\mathbf{S}}|}a$$

dato che $|\bar{\mathbf{\Pi}}_0| = |\bar{\mathbf{S}}|$.

Caso B: $n < 0$ e fluido in depressione

Se i fluidi sono in depressione, le spinte $\bar{\mathbf{\Pi}}_1$ e $\bar{\mathbf{\Pi}}_2$ sulle superfici verticali sono rivolte verso sinistra.

Risulta:

$$\Pi_{1,x} = nrL < 0,$$

$$\Pi_{2,x} = \left(n + \gamma \frac{r}{2}\right) rL < 0.$$

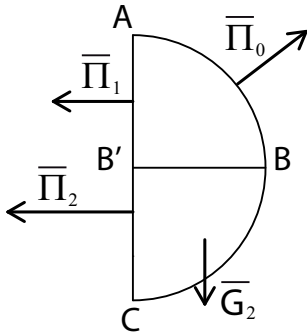


Figura 48: Caso $n < 0$ dell'esercizio 2.

Per cui

$$S_x = \left(2n + \gamma \frac{r}{2}\right) rL < 0,$$

$$S_y = -\frac{1}{4}\pi\gamma r^2 L,$$

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}.$$

3.2.3 Esercizio 3

Determinare il peso specifico γ_s del solido conico di Fig. 49 affinché il sistema sia in equilibrio. Si considerino noti h , H , D e γ .

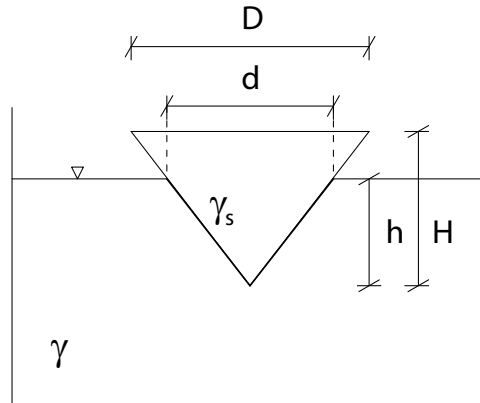


Figura 49: Esercizio 3.

Svolgimento:

Affinché il sistema sia in equilibrio meccanico la risultante delle forze agenti sul cono deve essere nulla. Le forze agenti sono il peso, $\bar{\mathbf{P}}$, del cono stesso e la spinta, $\bar{\mathbf{S}}$, esercitata dal fluido γ sulla superficie di contatto cono-fluido. Allora per l'equilibrio

$$\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{0}}.$$

Sulla porzione di superficie del cono a contatto con l'atmosfera non agisce nessuna forza essendo l'atmosfera a pressione nulla.

Calcoliamo $\bar{\mathbf{S}}$ con il metodo dell'equazione globale. Consideriamo il volume di controllo rappresentato in Fig. 50.

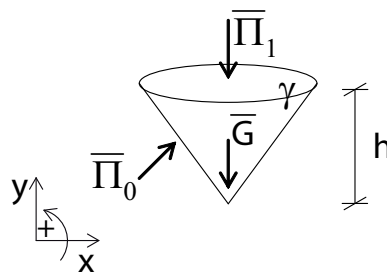


Figura 50: Volume di controllo per l'esercizio 3.

Il volume è un cono di altezza h , poiché stiamo considerando solo la parte a contatto con γ ; inoltre, lo consideriamo riempito di fluido γ avente il piano

dei carichi idrostatici alla quota della base del volume.
Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_1 + \bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{0}}.$$

La spinta $\bar{\mathbf{S}}$ cercata è quella esercitata dall'esterno sul volume, per cui

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\Pi}_0 = -\bar{\Pi}_1 - \bar{\mathbf{G}}$$

e, proiettando lungo gli assi x e y , si ottiene

$$S_x = 0,$$

$$S_y = -\Pi_{1,y} - G_y.$$

$\Pi_{1,y}$ è nulla poiché la superficie superiore del cono si trova alla quota del piano dei carichi idrostatici (pressione nulla).
 $\bar{\mathbf{G}}$ è il peso del fluido nel volume di controllo, per cui:

$$G_y = -\gamma W_c = -\gamma \frac{1}{3} \pi \frac{d^2}{4} h,$$

dove d è il diametro della base del volume conico di controllo, che si calcola come

$$d = D \frac{h}{H}.$$

Allora,

$$S_y = \gamma \frac{1}{3} \pi \frac{D^2}{4} \frac{h^3}{H^2}.$$

La componente in direzione y del peso del solido conico si calcola come

$$P_y = -\gamma_s \frac{1}{3} \pi \frac{D^2}{4} H.$$

Per l'equilibrio meccanico in direzione verticale deve, dunque, valere

$$P_y + S_y = 0$$

↓

$$-\gamma_s \frac{1}{3} \pi \frac{D^2}{4} H + \gamma \frac{1}{3} \pi \frac{D^2}{4} \frac{h^3}{H^2} = 0$$

da cui

$$\gamma_s = \gamma \frac{h^3}{H^3}.$$

Si osservi che questo risultato non è altro che il principio di Archimede: un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verticale dal basso verso l'alto, pari al peso del fluido spostato.

3.2.4 Esercizio 4

Determinare il peso specifico γ_s del solido conico di Fig. 51 affinché il sistema sia in equilibrio. Si considerino noti h, H, D, γ e l'indicazione n del manometro metallico.

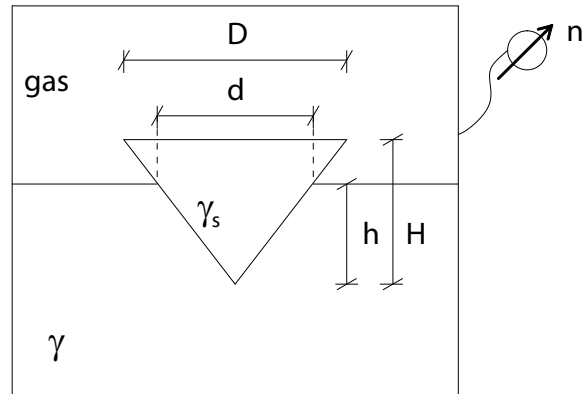


Figura 51: Esercizio 4.

Svolgimento:

Analogamente all'esercizio precedente, affinché il solido sia in equilibrio deve risultare

$$\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{0}}.$$

dove $\bar{\mathbf{P}}$ è il peso del solido e $\bar{\mathbf{S}}$ è la spinta esercitata sull'intera superficie di contorno dai due fluidi.

Consideriamo il volume di controllo di Fig. 52.

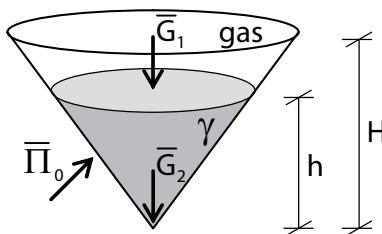


Figura 52: Volume di controllo per l'esercizio 4.

La parte superiore è riempita di gas a pressione n e quella inferiore di fluido γ . Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\mathbf{\Pi}}_0 + \bar{\mathbf{G}}_1 + \bar{\mathbf{G}}_2 = \bar{\mathbf{0}}$$

e poiché la spinta cercata è quella esercitata dall'esterno sul volume,

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{\Pi}}_0 = -\bar{\mathbf{G}}_1 - \bar{\mathbf{G}}_2.$$

Proiettando,

$$S_x = 0,$$

$$S_y = -G_{1,y} - G_{2,y}.$$

$\bar{\mathbf{G}}_1$ è il peso della parte di volume riempita di gas, per cui può essere trascurato

$$G_{1,y} = 0$$

mentre $\bar{\mathbf{G}}_2$ è il peso del volume occupato dal fluido γ (di altezza h),

$$G_{2,y} = -\gamma \frac{1}{3} \pi \frac{d^2}{4} h.$$

Allora, anche in questo caso, risulta

$$S_y = \gamma \frac{1}{3} \pi \frac{D^2}{4} \frac{h^3}{H^2}.$$

Si ottiene quindi lo stesso risultato dell'esercizio precedente, per cui la pressione n del gas non influenza il peso specifico γ_s del cono necessario per l'equilibrio.

3.2.5 Esercizio 5

Determinare il minimo peso specifico γ_s del solido conico di Fig. 53 affinché il sistema sia in equilibrio. Il cono funge da tappo per il serbatoio in pressione. Si considerino noti h , H , D , γ , a e l'indicazione n del manometro metallico.

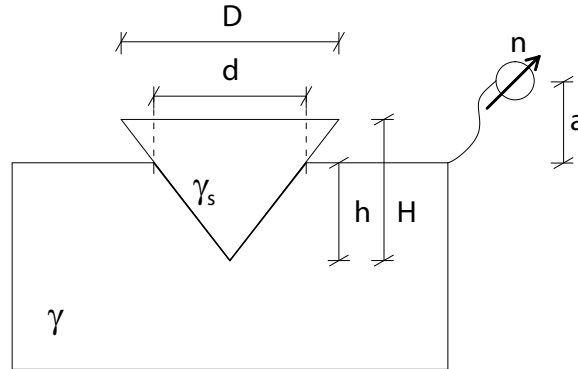


Figura 53: Esercizio 5.

Svolgimento:

Affinché il tappo sia in equilibrio deve risultare

$$\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{0}}$$

dove $\bar{\mathbf{P}}$ è il peso del tappo, $\bar{\mathbf{S}}$ è la spinta esercitata dal fluido γ sulla porzione di superficie a contatto con esso, e $\bar{\mathbf{R}}$ è la risultante delle reazioni vincolari all'incastro tra il cono e il serbatoio. Il peso minimo del cono in condizione di equilibrio si calcola nell'ipotesi di incipiente movimento, ovvero quando la reazione vincolare è nulla: $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{0}}$. Per cui,

$$\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{0}}.$$

Sulla superficie del tappo a contatto con l'atmosfera non agisce nessuna forza, essendo la pressione nulla.

Consideriamo il volume di controllo di Fig. 54 (di altezza h) per calcolare $\bar{\mathbf{S}}$. Sulla base del cono agisce una spinta verticale $\bar{\mathbf{\Pi}}_1$ dovuta al fatto che la pressione su essa non è nulla. Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\mathbf{\Pi}}_0 + \bar{\mathbf{\Pi}}_1 + \bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{0}}$$

e, poiché la spinta cercata è quella esercitata dall'esterno sul volume,

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{\Pi}}_0 = -\bar{\mathbf{\Pi}}_1 - \bar{\mathbf{G}}.$$

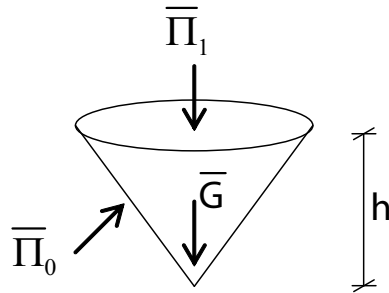


Figura 54: Volume di controllo per l'esercizio 5.

Proiettando,

$$S_x = 0,$$

$$S_y = -\Pi_{1,y} - G_y.$$

\bar{G} è il peso del fluido contenuto nel volume di controllo, per cui

$$G_y = -\gamma \frac{1}{3} \pi \frac{d^2}{4} h$$

mentre

$$\Pi_{1,y} = -p_{G,1} A_1$$

dove $A_1 = \pi \frac{d^2}{4}$ è l'area della base del volume di controllo e $p_{G,1} = n + \gamma a$ è la pressione nel suo baricentro. Allora

$$S_y = \gamma \frac{1}{3} \pi \frac{d^2}{4} h + (n + \gamma a) \pi \frac{d^2}{4}.$$

Considerando l'equilibrio meccanico del tappo in direzione verticale,

$$P_y + S_y = 0,$$

dove

$$P_y = -\gamma_s \frac{1}{3} \pi \frac{D^2}{4} H.$$

Si ottiene, quindi,

$$\gamma_s = \frac{\gamma \frac{1}{3} \pi \frac{d^2}{4} h + (n + \gamma a) \pi \frac{d^2}{4}}{\frac{1}{3} \pi \frac{D^2}{4} H}$$

dove $d = D \frac{h}{H}$.

3.2.6 Esercizio 6

Determinare la spinta $\bar{\mathbf{S}}$ complessiva esercitata dai due fluidi sulla superficie di traccia AD di Fig. 55, noti $h_1, h_2, h_3, r, \alpha, \Delta, \gamma, \gamma_m$ e la profondità L del serbatoio in direzione ortogonale al foglio.

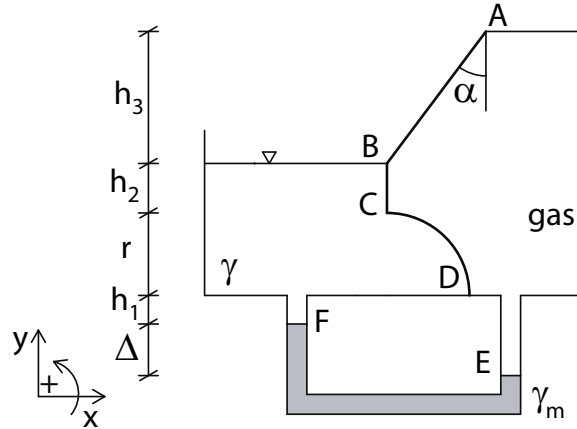


Figura 55: Esercizio 6.

Svolgimento:

Prima di tutto calcoliamo la pressione del gas nella parte destra del serbatoio

$$\begin{aligned} p_{\text{gas}} &= p_E \\ &= p_F + \gamma_m \Delta \\ &= \gamma (h_1 + r + h_2) + \gamma_m \Delta. \end{aligned}$$

Per determinare la spinta sulla superficie AD consideriamo i contributi dei due fluidi separatamente. Sia quindi $\bar{\mathbf{S}}^{\text{gas}}$ la spinta esercitata dal gas e $\bar{\mathbf{S}}^\gamma$ quella esercitata dal fluido γ ; allora, la spinta risultante è

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^{\text{gas}} + \bar{\mathbf{S}}^\gamma.$$

Proiettando,

$$S_x = S_x^{\text{gas}} + S_x^\gamma,$$

$$S_y = S_y^{\text{gas}} + S_y^\gamma.$$

Contributo del gas

Il gas agisce su tutta la superficie AD ; consideriamo il volume di controllo di Fig. 56.

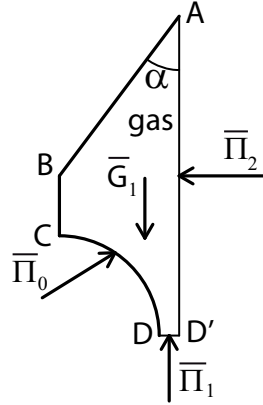


Figura 56: Volume di controllo per il calcolo della spinta esercitata dal gas.

$\bar{\Pi}_0$ agisce su tutta la superficie di traccia AD . Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{G}_1 = \bar{0},$$

dato che la spinta cercata è quella esercitata dal volume sulla superficie, risulta

$$\bar{S}^{\text{gas}} = -\bar{\Pi}_0 = \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{G}_1.$$

Proiettando,

$$S_x^{\text{gas}} = \Pi_{2,x},$$

$$S_y^{\text{gas}} = \Pi_{1,y} + G_{1,y}.$$

\bar{G}_1 è il peso del gas nel volume di controllo, che possiamo trascurare;

$$\Pi_{2,x} = -p_{\text{gas}} A_2,$$

$$\Pi_{1,y} = p_{\text{gas}} A_1,$$

dove A_2 è l'area della superficie verticale AD' e A_1 quella della superficie orizzontale DD' . Dalla geometria si ottiene

$$A_2 = (r + h_2 + h_3) L,$$

$$A_1 = (h_3 \tan \alpha - r) L.$$

In definitiva,

$$S_x^{\text{gas}} = -p_{\text{gas}}(r + h_2 + h_3)L,$$

$$S_y^{\text{gas}} = p_{\text{gas}}(h_3 \tan \alpha - r)L.$$

Contributo del fluido

Il fluido γ agisce sulla superficie di traccia BD . Consideriamo il volume di controllo di Fig. 57.

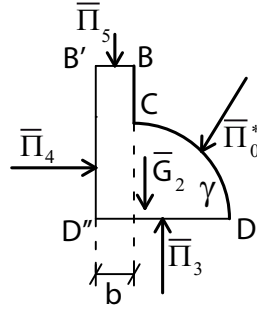


Figura 57: Volume di controllo per il calcolo della spinta esercitata dal fluido γ .

$\bar{\Pi}_0^*$ agisce su tutta la superficie BD . Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\Pi}_0^* + \bar{\Pi}_3 + \bar{\Pi}_4 + \bar{\Pi}_5 + \bar{\mathbf{G}}_2 = \bar{\mathbf{0}}.$$

Dato che la spinta cercata è quella esercitata dal volume sulla superficie, risulta

$$\bar{\mathbf{S}}^\gamma = -\bar{\Pi}_0^* = \bar{\Pi}_3 + \bar{\Pi}_4 + \bar{\Pi}_5 + \bar{\mathbf{G}}_2.$$

Proiettando,

$$S_x^\gamma = \Pi_{4,x},$$

$$S_y^\gamma = \Pi_{3,y} + \Pi_{5,y} + G_{2,y}.$$

$\Pi_{5,y}$ è nulla, essendo la superficie BB' alla quota del piano dei carichi idrostatici, e

$$\Pi_{3,y} = p_{G,3}A_3,$$

$$\Pi_{4,x} = p_{G,4}A_4,$$

dove: $A_3 = (r + b)L$ è l'area della superficie piana orizzontale DD'' (b è una lunghezza arbitraria); $p_{G,3} = \gamma(r + h_2)$ è la pressione nel baricentro di A_3 ; $A_4 = (r + h_2)L$ è l'area della superficie piana verticale $B'D''$;

$p_{G,4} = \gamma \frac{(r + h_2)}{2}$ è la pressione nel baricentro di A_3 .

Infine $\overline{\mathbf{G}}_2$ è il peso del fluido γ nel volume di controllo, per cui:

$$G_{2,y} = -\gamma \left[b(r + h_2) + \pi \frac{r^2}{4} \right] L.$$

Quindi,

$$S_x^\gamma = \gamma \frac{(r + h_2)}{2} (r + h_2) L,$$

$$S_y^\gamma = \gamma (r + h_2) (r + b) L - \gamma \left[b(r + h_2) + \pi \frac{r^2}{4} \right] L = \gamma \left[r(r + h_2) - \pi \frac{r^2}{4} \right] L.$$

Si noti che S_y^γ non dipende da b , come è giusto che sia visto che b è una quantità arbitraria.

Infine, noti $\overline{\mathbf{S}}^\gamma$ e $\overline{\mathbf{S}}^{\text{gas}}$ si calcola $\overline{\mathbf{S}}$.

3.2.7 Esercizio 7

Determinare la spinta $\bar{\mathbf{S}}$ complessiva agente sulla superficie laterale ABC del cono galleggiante di Fig. 58 noti $D, h_1, h_2, H, \Delta, \gamma$.

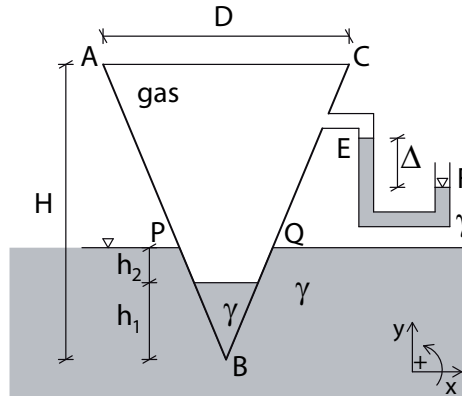


Figura 58: Esercizio 7.

Svolgimento:

Calcoliamo la pressione del gas all'interno del cono

$$\begin{aligned} p_{\text{gas}} &= p_E \\ &= -\gamma\Delta \end{aligned}$$

Per determinare la spinta sulla superficie laterale del cono ABC dobbiamo considerare separatamente il contributo dei fluidi che si trovano all'interno del cono, $\bar{\mathbf{S}}^{\text{int}}$, e di quelli all'esterno, $\bar{\mathbf{S}}^{\text{ext}}$. La spinta risultante sulla superficie laterale è

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^{\text{int}} + \bar{\mathbf{S}}^{\text{ext}}$$

proiettando

$$\begin{aligned} S_x &= S_x^{\text{int}} + S_x^{\text{ext}}, \\ S_y &= S_y^{\text{int}} + S_y^{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Superficie laterale interna del cono

Prendiamo come volume di controllo il cono stesso, come illustrato in Fig. 59.

$\bar{\mathbf{\Pi}}_0$ agisce sulla superficie laterale ABC . Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\mathbf{\Pi}}_0 + \bar{\mathbf{\Pi}}_1 + \bar{\mathbf{G}}_1 + \bar{\mathbf{G}}_2 = \bar{\mathbf{0}}$$

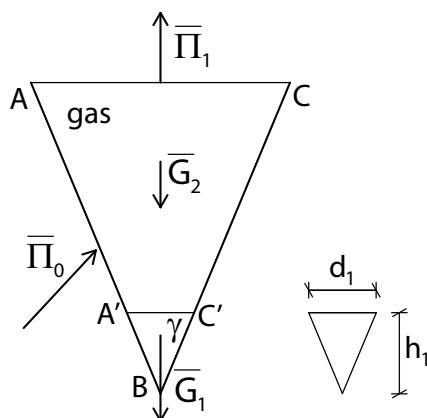


Figura 59: Volume di controllo per la spinta interna nell'es. 7.

la spinta cercata è quella esercitata dal volume sulla superficie, per cui

$$\bar{S}^{\text{int}} = -\bar{\Pi}_0 = \bar{\Pi}_1 + \bar{G}_1 + \bar{G}_2.$$

Proiettando

$$S_x^{\text{int}} = 0,$$

$$S_y^{\text{int}} = \Pi_{1,y} + G_{1,y} + G_{2,y}.$$

Il peso del gas si può trascurare, per cui

$$G_{2,y} \cong 0$$

mentre quello del fluido γ volume $A'BC'$, risulta

$$G_{1,y} = -\gamma W_1$$

dove W_1 è il volume conico di altezza h_1 e diametro d_1 tale che

$$d_1 = D \frac{h_1}{H}$$

per cui

$$W_1 = \frac{1}{3} \pi \frac{d_1^2}{4} h_1.$$

La spinta sulla base piana AC del cono è data da

$$\Pi_{1,y} = + |p_{G,1}| A_1$$

con $A_1 = \pi \frac{D^2}{4}$ area della superficie AC e $p_{G,1} = p_{\text{gas}}$.

Infine, risulta

$$S_y^{\text{int}} = \gamma \Delta \pi \frac{D^2}{4} - \gamma \frac{1}{3} \pi \frac{d_1^2}{4} h_1$$

con $\bar{\mathbf{S}}^{\text{int}}$ rivolta verso l'alto se $S_y^{\text{int}} > 0$, verso il basso se $S_y^{\text{int}} < 0$.

Superficie esterna del cono

Come volume di controllo consideriamo la parte di cono a contatto con il fluido esterno γ , come illustrato in Fig. 60, e consideriamola interamente riempita di fluido γ .

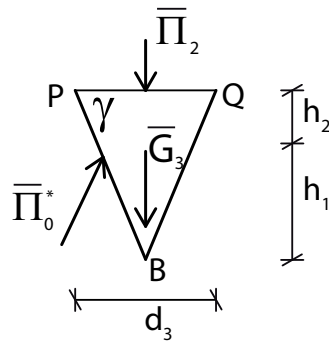


Figura 60: Volume di controllo per la spinta esterna nell'es. 7.

$\bar{\Pi}_0^*$ agisce sulla superficie laterale PBQ del cono di controllo. Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\Pi}_0^* + \bar{\Pi}_2 + \bar{\mathbf{G}}_3 = \bar{\mathbf{0}}$$

la spinta cercata è quella esercitata dall'esterno sul volume, per cui

$$\bar{\mathbf{S}}^{\text{ext}} = \bar{\Pi}_0^* = -\bar{\Pi}_2 - \bar{\mathbf{G}}_3.$$

Proiettando

$$S_x^{\text{ext}} = 0,$$

$$S_y^{\text{ext}} = -\Pi_{2,y} - G_{3,y}.$$

La spinta $\bar{\Pi}_2$ è nulla poiché la superficie piana si trova alla quota del piano dei carichi idrostatici.

Il peso del fluido γ nel volume di controllo risulta

$$G_{3,y} = -\gamma W_3$$

dove W_3 è il volume conico di altezza $(h_1 + h_2)$ e diametro d_3 tale che

$$d_3 = D \frac{(h_1 + h_2)}{H},$$

per cui,

$$W_3 = \frac{1}{3} \pi \frac{d_3^2}{4} (h_1 + h_2).$$

Risulta

$$S_y^{\text{ext}} = \gamma \frac{1}{3} \pi \frac{d_3^2}{4} (h_1 + h_2)$$

con $\bar{\mathbf{S}}^{\text{ext}}$ rivolta, dunque, verso l'alto.

La spinta risultante ha componente orizzontale nulla e verticale pari a

$$\begin{aligned} S_y &= S_y^{\text{int}} + S_y^{\text{ext}} \\ &= \gamma \Delta \pi \frac{D^2}{4} - \gamma \frac{1}{3} \pi \frac{d_1^2}{4} h_1 + \gamma \frac{1}{3} \pi \frac{d_3^2}{4} (h_1 + h_2) \\ &= \gamma \pi \frac{D^2}{4} \left[\Delta + \frac{(h_1 + h_2)^3 - h_1^3}{3H^2} \right]. \end{aligned}$$

3.2.8 Esercizio 8

Determinare il modulo della forza \bar{F} , applicata lungo una retta orizzontale passante per il punto B (Fig. 61), affinché il sistema sia in equilibrio e la paratoia di traccia AB non ruoti attorno alla cerniera in A . Si considerino noti h , r , γ e L (profondità del sistema cilindrico in direzione ortogonale al foglio).

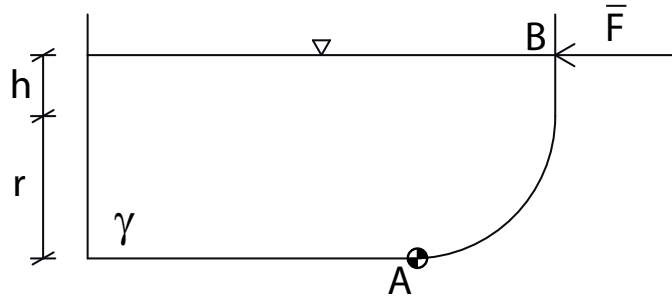


Figura 61: Esercizio 8.

Svolgimento:

Il fluido γ esercita una spinta \bar{S} sulla paratoia AB , per l'equilibrio occorre che il momento di \bar{F} rispetto ad A sia uguale ed opposto al momento di \bar{S} rispetto ad A .

Per calcolare la spinta \bar{S} , consideriamo il volume di controllo rappresentato in Fig. 62.

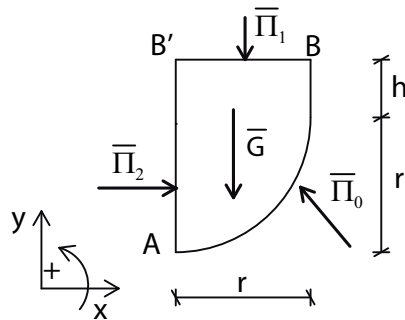


Figura 62: Volume di controllo per l'esercizio 8.

Il volume di controllo è riempito del fluido γ , avente piano dei carichi idrostatici alla quota della superficie superiore del volume.

Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{0}}.$$

La spinta $\bar{\mathbf{S}}$ cercata è quella esercitata dal volume sulla superficie, per cui

$$\bar{\mathbf{S}} = -\bar{\Pi}_0 = \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{\mathbf{G}}$$

e, proiettando lungo gli assi x e y , si ottiene

$$\begin{aligned} S_x &= \Pi_{2,x}, \\ S_y &= \Pi_{1,y} + G_y. \end{aligned}$$

$\Pi_{1,y}$ è nulla poiché la superficie superiore del volume di controllo si trova alla quota del piano dei carichi idrostatici (pressione nulla), mentre

$$\begin{aligned} G_y &= -\gamma W, \\ \Pi_{2,x} &= p_{G,2} A_2, \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} A_2 &= (h+r)L && \text{area della superficie piana } AB' \\ p_{G,2} &= \gamma \frac{(h+r)}{2} && \text{pressione sul baricentro } G_2 \text{ di } A_2 \\ W &= \left(hr + \frac{1}{4}\pi r^2 \right) L && \text{volume di controllo.} \end{aligned}$$

Allora,

$$\begin{aligned} S_x &= p_{G,2} A_2, \\ S_y &= -\gamma W. \end{aligned}$$

È conveniente dividere il volume di controllo in due parti: $W = W_1 + W_2$, dove W_1 è associato a $BCC'B'$ e W_2 al quarto di circonferenza ACC' (Fig. 63)

$$\begin{aligned} W_1 &= hrL, \\ W_2 &= \frac{1}{4}\pi r^2 L. \end{aligned}$$

In questo modo anche S_y può essere scomposta nella somma di due contributi

$$\begin{aligned} S_{y,1} &= -\gamma W_1 = -\gamma hrL, \\ S_{y,2} &= -\gamma W_2 = -\gamma \frac{\pi}{4} r^2 L. \end{aligned}$$

Ciò è utile per il calcolo dei bracci dei momenti. Infatti, considerando la Fig. 63, per l'equilibrio alla rotazione rispetto al punto A si ottiene

$$|\bar{\mathbf{F}}| h_1 - |S_x| h_2 - |S_{y,1}| b_1 - |S_{y,2}| b_2 = 0$$

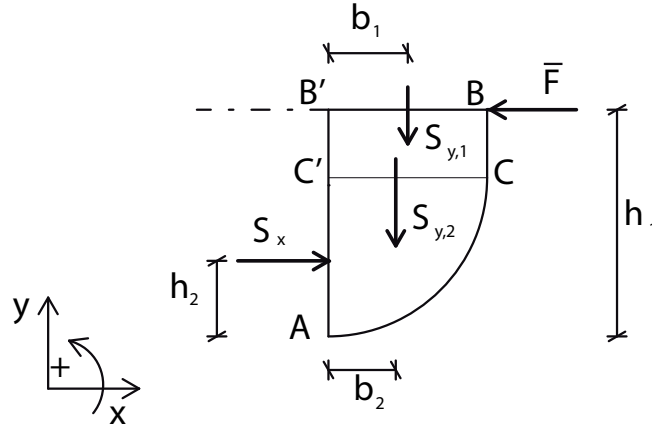


Figura 63: Equilibrio alla rotazione rispetto al punto A per l'esercizio 8.

dove h_1 , h_2 , b_1 e b_2 sono i bracci, rispetto al punto A , rispettivamente di $\bar{\mathbf{F}}$, S_x , $S_{y,1}$ e $S_{y,2}$.

$\bar{\mathbf{F}}$ è applicata nel punto B , per cui

$$h_1 = h + r.$$

Il centro di spinta di $S_x \hat{\mathbf{i}}$ si trova a distanza $\frac{2}{3} \overline{B'A}$ da B' , per cui

$$h_2 = \frac{1}{3}(h + r).$$

Le rette di applicazione di $S_{y,1} \hat{\mathbf{j}}$ e $S_{y,2} \hat{\mathbf{j}}$ passano per i baricentri dei rispettivi volumi W_1 e W_2 :

$$b_1 = \frac{r}{2},$$

$$b_2 = \frac{4r}{3\pi}.$$

In definitiva,

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{F}}| &= \frac{|S_x| h_2 + |S_{y,1}| b_1 + |S_{y,2}| b_2}{h_1} \\ &= \gamma \frac{L}{h+r} \left[\frac{(h+r)^3}{6} + \frac{hr^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right]. \end{aligned}$$

3.3 Applicazioni in relazione al concetto di tensione superficiale

3.3.1 Equazione di Laplace

Consideriamo un sistema composto da un liquido di peso specifico γ ed un gas a pressione p_e , la cui interfaccia è un tratto di superficie cilindrica di

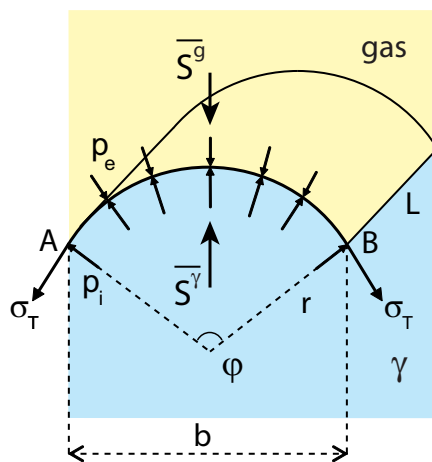


Figura 64: superficie curva di interfaccia tra un liquido e un gas.

raggio r , ampiezza φ e profondità L (Fig. 64).

Sulla superficie agiscono, perpendicolarmente ad essa, la pressione esterna esercitata dal gas p_e e la pressione interna esercitata dal liquido, pari a p_i nel punto A . Poiché l'interfaccia tra i due fluidi non è un piano orizzontale, ma una superficie curva, non c'è continuità delle pressioni su di essa, ovvero liquido e gas esercitano pressioni diverse. L'interfaccia è mantenuta curva dalla tensione superficiale σ_T , che agisce alle sue estremità, tangenzialmente alla superficie stessa.

Sulla superficie curva di interfaccia agiscono tre forze:

- la spinta esercitata dal gas $\bar{\mathbf{S}}^g$;
- la spinta esercitata dal liquido $\bar{\mathbf{S}}^\gamma$;
- la risultante dovuta alle tensioni superficiali $\bar{\mathbf{R}}_s$.

La superficie è in equilibrio se

$$\bar{\mathbf{S}}^g + \bar{\mathbf{S}}^\gamma + \bar{\mathbf{R}}_s = \bar{\mathbf{0}}.$$

Calcoliamo i tre contributi. Poiché non c'è continuità delle pressioni all'interfaccia, le spinte esercitate dal gas e dal liquido vanno calcolate separatamente con due diversi volumi di controllo.

Contributo del gas

Consideriamo il volume di controllo di Fig. 65(a). $\bar{\mathbf{\Pi}}_0^g$ agisce sulla superficie curva di traccia AB e $\bar{\mathbf{\Pi}}_1$ agisce sulla superficie piana di base; la forza peso del volume di controllo può essere trascurata trattandosi di un gas. Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\mathbf{\Pi}}_0^g + \bar{\mathbf{\Pi}}_1 = \bar{\mathbf{0}},$$

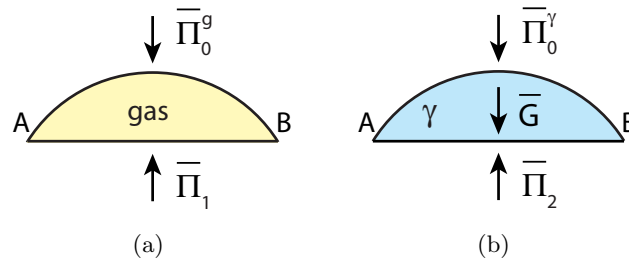


Figura 65: volumi di controllo per il calcolo della spinta esercitata dal gas \bar{S}^g (a) e quella esercitata dal liquido \bar{S}^γ (b).

dato che la spinta cercata è quella esercitata dall'esterno sul volume, risulta

$$\bar{S}^g = \bar{\Pi}_0^g = -\bar{\Pi}_1.$$

$\bar{\Pi}_1$ è una spinta verticale poiché agisce su una superficie orizzontale, di conseguenza anche $\bar{\Pi}_0^g$ è verticale, per cui la relazione si riduce a

$$S_y^g = -\Pi_{1,y},$$

dove

$$\Pi_{1,y} = p_e A,$$

essendo p_e la pressione del gas e $A = bL$ l'area della superficie orizzontale AB . Dalla geometria si ricava che $b = 2r \sin(\varphi/2)$. In definitiva,

$$S_y^g = -p_e 2r \sin(\varphi/2) L.$$

Contributo del liquido γ

In Fig. 65(b) è rappresentato il volume di controllo per il calcolo della spinta esercitata dal liquido γ . Su di esso agiscono: $\bar{\Pi}_0^\gamma$ sulla superficie curva di traccia AB , $\bar{\Pi}_2$ sulla superficie piana di base e la forza peso \bar{G} . Per l'equazione di equilibrio globale

$$\bar{\Pi}_0^\gamma + \bar{\Pi}_2 + \bar{G} = \bar{0}.$$

In questo caso \bar{S}^γ è la spinta esercitata dal volume sulla superficie, per cui

$$\bar{S}^\gamma = -\bar{\Pi}_0^\gamma = \bar{\Pi}_2 + \bar{G}.$$

Essendo $\bar{\Pi}_2$ e \bar{G} spinte verticali, anche $\bar{\Pi}_0^\gamma$ è verticale e l'equilibrio si riduce a

$$S_y^\gamma = \Pi_{2,y} + G_y,$$

dove

$$\Pi_{2,y} = p_i A,$$

essendo p_i la pressione esercitata dal liquido γ nel baricentro della superficie piana orizzontale AB . Infine,

$$G_y = -\gamma W$$

con W volume del volume di controllo di Fig. 65(b). La spinta esercitata dal liquido risulta

$$S_y^g = p_i 2r \sin(\varphi/2) L - \gamma W.$$

Contributo della tensione superficiale

La risultante delle tensioni superficiali deve necessariamente avere anch'essa solo componente verticale. La tensione superficiale σ_T è una forza per unità di lunghezza che agisce tangenzialmente alla superficie; allora, in direzione verticale, si avrà una forza per unità di lunghezza pari a $\sigma_T \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Questa agisce lungo i 2 bordi laterali di lunghezza L , per cui la risultante è:

$$R_{s,y} = -2\sigma_T \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) L$$

(diretta verso il basso).

Per l'equilibrio nella direzione verticale $S_y^g + S_y^\gamma + R_{s,y} = 0$ si ottiene

$$-p_e 2r \sin(\varphi/2) L + p_i 2r \sin(\varphi/2) L - \gamma W - 2\sigma_T \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) L = 0.$$

Trascurando il peso del volume di controllo rispetto agli altri contributi ($\gamma W \approx 0$), si ottiene

$$\Delta p = p_i - p_e = \frac{\sigma_T}{r}.$$

In generale, su una superficie qualunque, vale l'equazione di Laplace:

$$\Delta p = \sigma_T \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

dove r_1 e r_2 sono i raggi principali di curvatura della superficie.

Nota: Se la superficie di interfaccia tra i due fluidi è orizzontale, la tensione superficiale agisce in direzione orizzontale, e non genera differenze di pressione tra interno ed esterno. In generale, se non c'è curvatura, non c'è discontinuità nelle pressioni.

3.3.2 Fenomeni di capillarità

Con fenomeni di capillarità si intende la risalita o la discesa di un liquido in un tubo di piccolo diametro, ad opera della tensione superficiale.

In questo caso, si hanno tre mezzi a contatto: solido, liquido e gas. La tensione superficiale si stabilisce tra i due fluidi e l'adesione tra solido e fluido. La superficie libera curva, all'interno del tubo, viene detta menisco.

La superficie di separazione liquido-gas, quando un liquido viene a contatto con una superficie solida, forma con questa un angolo di contatto β che dipende dalla natura dei elementi a contatto. Il fenomeno è dovuto a due tipi di forze di attrazione tra molecole:

- forze di coesione, tra molecole uguali;
- forze di adesione, tra molecole diverse.

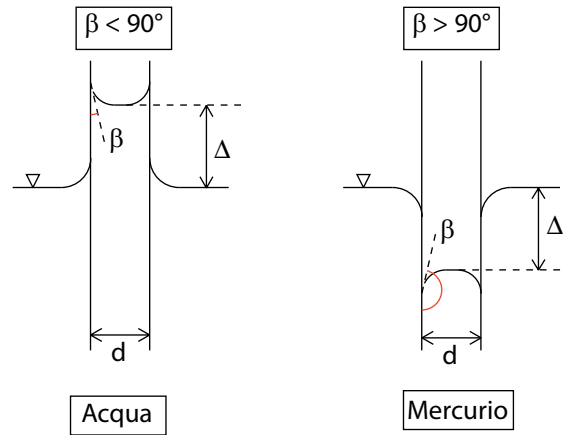


Figura 66: risalita e discesa capillare.

Nel caso di acqua all'interno di un tubo di piccolo diametro, sulle molecole d'acqua prevalgono le forze di adesione esercitate dal solido, rispetto a quelle di coesione. L'acqua risale sulle pareti del tubo e quindi l'angolo β risulta minore di 90° ; si forma una superficie di curvatura con centro di curvatura esterno, detto menisco concavo. Quando $\beta < 90^\circ$ si dice che il liquido bagna la parete.

Se invece di acqua si utilizza del mercurio, prevalgono le forze di coesione: $\beta > 90^\circ$, il centro di curvatura è interno e si parla di menisco convesso. Ogni volta che $\beta > 90^\circ$ si dice che il liquido non bagna la parete. I due esempi sono illustrati in Fig. 66.

Quantifichiamo la risalita capillare dovuta alla tensione superficiale. Ipottizziamo di avere un tubo immerso all'interno di una bacinella di liquido (peso specifico γ). Supponiamo che il liquido bagni la parete e che il menisco che si forma all'interno del tubo sia una calotta sferica di raggio r (Fig. 67).

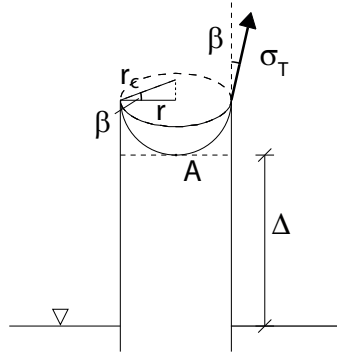


Figura 67: risalita capillare e geometria del menisco.

Essendo la superficie curva, la tensione superficiale genera una differenza di pressione Δp all'interfaccia tra interno ed esterno della superficie. La tensione superficiale è tale da far risalire, rispetto al livello esterno, il liquido nel tubo di un'altezza Δ . Per l'equazione di Laplace

$$\Delta p = \sigma_T \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Nel caso di calotta sferica, $r_1 = r_2 = r_c$; inoltre, se β è l'angolo di contatto alla parete, allora dalla geometria si ricava che $r_c = \frac{r}{\cos \beta}$.

La differenza di pressione Δp si calcola sempre come differenza tra la pressione all'interno della calotta e pressione all'esterno della stessa. In questo caso, l'interno della calotta è a contatto con aria a pressione atmosferica, per cui $p_i = 0$. All'esterno della calotta c'è liquido avente pressione pari a p_e in corrispondenza del punto A (che si trova a distanza Δ dal pelo libero del liquido nella bacinella, Fig. 67). Dall'equazione di Laplace si ottiene

$$p_e = -2 \frac{\sigma_T}{r_c} = -\frac{2\sigma_T \cos \beta}{r}.$$

Si noti che se il liquido bagna la superficie ($\beta < 90^\circ$), $p_e < 0$ per cui il liquido nel tubo si trova in depressione. Infatti, tutto il liquido nel tubo si trova al di sopra del piano dei carichi idrostatici, individuato dal pelo libero del liquido nella bacinella. Per la legge di Stevino

$$p_e = \gamma h_A,$$

dove h_A affondamento del punto A rispetto al piano dei carichi idrostatici del liquido. Trovandosi il punto A al di sopra del piano dei carichi idrostatici, il suo affondamento è negativo (così come la pressione); in particolare $h_A = -\Delta$, per cui

$$-\gamma \Delta = -\frac{2\sigma_T \cos \beta}{r}$$

da cui si ricava la risalita capillare

$$\Delta = \frac{2\sigma_T \cos \beta}{r\gamma}.$$

Nota:

- Se $\beta < 90^\circ \implies \cos \beta > 0 \implies \Delta > 0$ risalita; inoltre $h_A < 0$ e $p_e < 0$ liquido in depressione.
- Se $\beta > 90^\circ \implies \cos \beta < 0 \implies \Delta < 0$ discesa; inoltre $h_A > 0$ e $p_e > 0$ liquido in pressione

Esercizio

Determinare il diametro che deve avere un tubo in vetro per avere una risalita capillare di 1 mm, quando viene immerso in acqua a 20°C .

$\gamma = 9.789 \text{ kN/m}^3$, $\beta \cong 0^\circ$, $\sigma_T = 0.0728 \text{ N/m}$.

Soluzione:

$$\gamma\pi r^2\Delta = 2\pi r\sigma_T \cos \beta \implies$$

$$d = 2r = 2\frac{2\sigma_T}{\Delta\gamma} = 2.97 \text{ cm}.$$