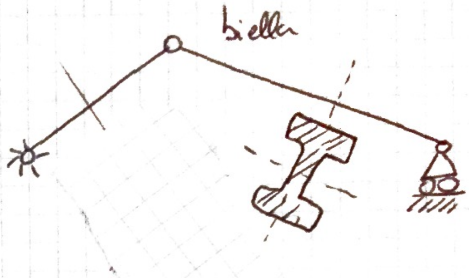
PARTE TEORICA INIZIALE

Geometria delle aree → Introduzione

Gli schemi di calcolo che utilizzeremo per le strutture da analizzare si basano sull'ipotesi che le proprietà della sezione si possano "condensare" sulla linea media.

Quando, ad esempio, studiamo il meccanismo biella-manovella, supponiamo che la biella sia schematizzata come un'asta con una sezione che si sviluppa lungo la linea d'asse.



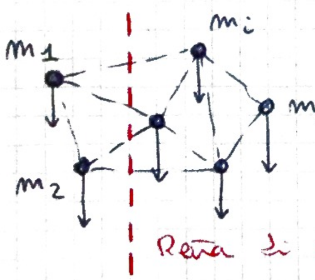
→ Analizziamo le proprietà geometriche delle sezioni:

- Baricentro di una sezione
- Momenti statici di una sezione e di sezioni composte
- Momenti di inerzia e momenti di inerzia polari

Baricentro di una sezione

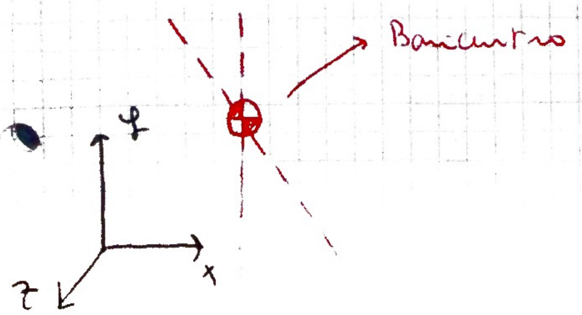
Il baricentro di un corpo è il punto di un corpo nel quale si può immaginare concentrato tutto il suo peso.

Immaginiamo un sistema di masse m_i le cui distanze mutue non cambiano. Le masse subiscono una forza (peso) proporzionale alla massa m_i.



↳ La risultante di queste forze è equipollente al sistema iniziale dato

↳ Ruotando il sistema si trova una seconda retta di applicazione del risultante



$$\begin{cases} X_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{m} \\ Y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} y_i m_i}{m} \\ Z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} z_i \cdot m_i}{m} \end{cases} \qquad m = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Passiamo a corpi solidi dotati di estensione nello spazio

$$\Sigma \longrightarrow \int_{Area/Volume}$$ * $\longrightarrow$ FARE DISEGNO CORRO

$$X_G = \frac{\int_V x \rho \, dV}{m} \qquad Y_G = \frac{\int_V y \rho \, dV}{m} \qquad Z_G = \frac{\int_V z \rho \, dV}{m}$$

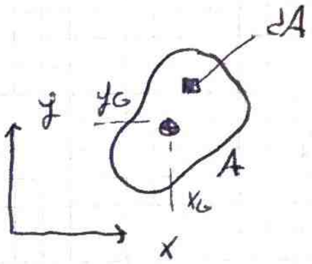
con ρ : massa volumica (densità)

$\rho \rightarrow$ Costante, quindi: $m = \rho V$

$$X_G = \frac{\int_V x \, dV}{V} \qquad Y_G = \frac{\int_V y \, dV}{V} \qquad Z_G = \frac{\int_V z \, dV}{V}$$

Per sezioni piane: baricentro della sezione

$$X_G = \frac{\int_A x \, dA}{A} \qquad Y_G = \frac{\int_A y \, dA}{A}$$



Momenti statici

Definizione: $S_x = \int_A y \, dA \qquad S_y = \int_A x \, dA$

unità di misura: $[L^3]$

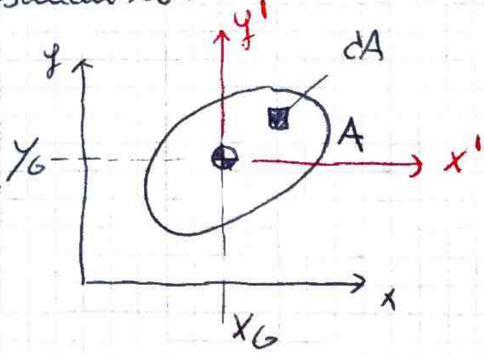
Se si conoscono le coordinate del baricentro:

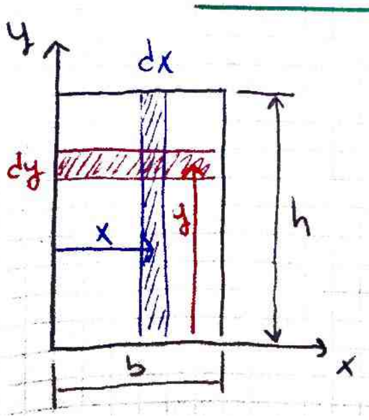
$$S_y = X_G \cdot A \qquad S_x = Y_G \cdot A$$

Se sposto il sistema di riferimento nel baricentro:

$$X_G' = 0 \qquad Y_G' = 0$$

$$\Rightarrow S_x' = 0 \qquad S_y' = 0$$





$$S_x = \int_A y \, dA = \int_0^h y \, b \, dy = \frac{bh^2}{2}$$

$$S_y = \int_A x \, dA = \int_0^b x \, h \, dx = \frac{hb^2}{2}$$

$$\Rightarrow X_G = \frac{S_y}{A} = \frac{b}{2} \qquad Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{h}{2}$$

Momenti statici di sezioni composte

Con sezioni scomponibili in figure elementari $(A_1, A_2, .. A_N)$

$$S_x = \int_A y\, dA = \int_{A_1} y\, dA_1 + \int_{A_2} y\, dA_2 + --- + \int_{A_N} y\, dA_N =$$

Se conosciamo i baricentri

$$= A_1 y_{G1} + A_2 y_{G2} + -- + A_N y_{GN} = \sum_{i=1}^{N} A_i y_{Gi}$$

$$S_y = \int_A x\, dA = A_1 x_{G1} + A_2 x_{G2} + --- + A_N x_{GN} = \sum_{i=1}^{N} A_i x_{Gi}$$

$$\Rightarrow \quad x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i x_{Gi}}{A} \qquad y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum A_i y_{Gi}}{A}$$

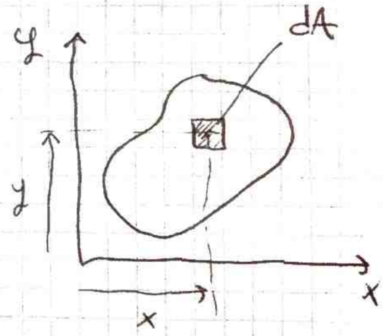
Le coordinate del baricentro della sezione complessiva si ottengono come media pesata delle coordinate dei baricentri delle aree parziali, avendo assunto come pesi i valori delle aree stesse.

Momenti di inerzia rispetto a un asse

$$J_x = \int_A y^2\, dA$$

$$J_y = \int_A x^2\, dA$$

momenti di inerzia o momenti d'area di secondo ordine

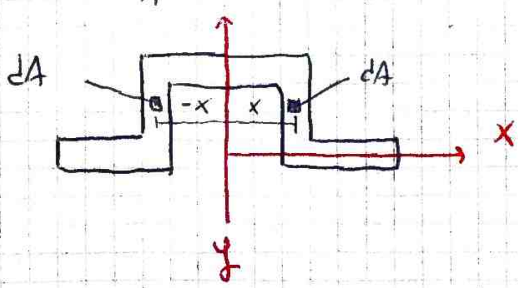


Quantità sempre positive e con unità di misura $[L^4]$

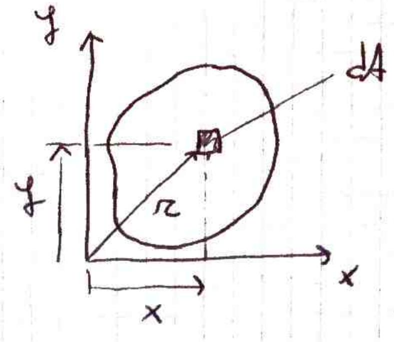
Momento di inerzia centrifugo

$$J_{xy} = \int_A xy\, dA$$ → Può essere negativo o nullo

↳ Basta che uno dei due assi [redacted] x e/o y sia di simmetria



Momento d'inerzia polare



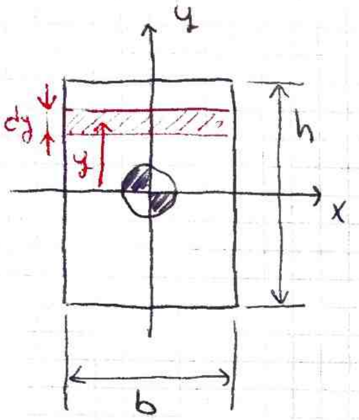
Viene definito come

$$J_P = \int_A r^2 \, dA$$

Se sostituiamo $r^2 = x^2 + y^2$

$$J_P = \int_A (x^2 + y^2) \, dA = \int_A x^2 \, dA + \int_A y^2 \, dA = J_y + J_x$$

Esempio → Sezione Rettangolare



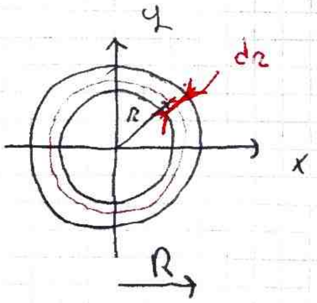
$$J_x = \int_A y^2 \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \, b \, dy = b \frac{1}{3} \left[y^3 \right]_{-h/2}^{h/2} =$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

J_y è analogo $\Rightarrow$ $J_y = \dfrac{b^3 h}{12}$

$$J_P = J_x + J_y = \frac{bh^3}{12} + \frac{b^3 h}{12} = \frac{bh}{12} \left(h^2 + b^2 \right)$$

Esempio → Sezione circolare



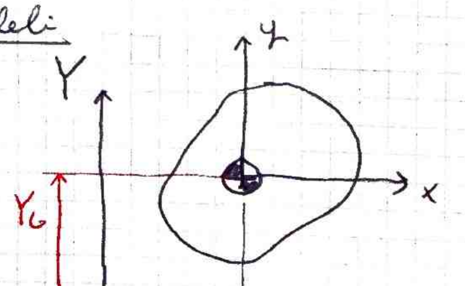
$$J_P = \int_A r^2 \, dA = \int_0^R r^2 \, 2\pi r \, dr = 2\pi \int_0^R r^3 =$$

$$= 2\pi \frac{1}{4} R^4 = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{32} D^4$$

$J_x = J_y \Rightarrow J_P = 2 J_x$

$$\Rightarrow J_x = \frac{J_P}{2} = \frac{\pi}{64} D^4$$

Momenti di inerzia rispetto ad assi paralleli



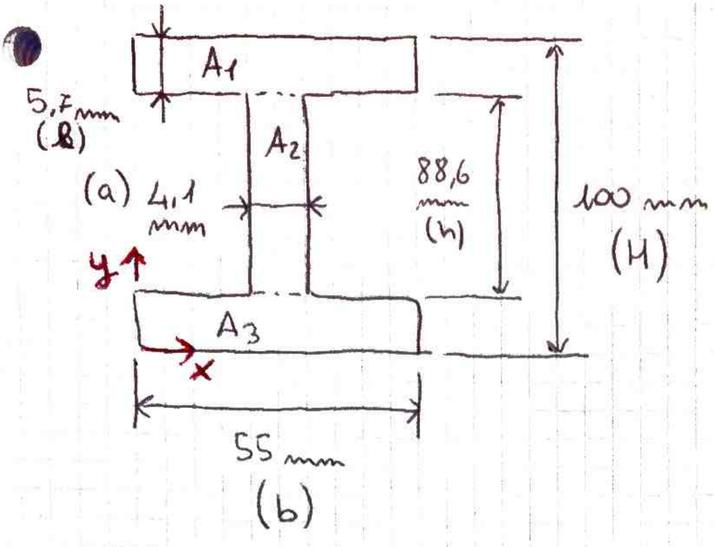
$$\begin{cases} X = x + X_G \\ Y = y + Y_G \end{cases}$$

$$J_X = \int_A Y^2 \, dA = \int_A (y + Y_G)^2 \, dA = \int_A y^2 \, dA + 2 Y_G \int_A y \, dA + \int_A Y_G^2 \, dA =$$

$$= J_x + 2 Y_G S_x + Y_G^2 A$$

(x, y) baricentrico → $S_x = 0$ → $J_X = J_x + Y_G^2 A$, $J_Y = J_y + X_G^2 A$, $J_{XY} = J_{xy} + X_G Y_G A$

Geometria delle aree → Esercizi



Profilo IPE 100

$A_1 = b \cdot l = 313,5 \ mm^2$

$A_2 = a \cdot h = 363,26 \ mm^2$

$A_3 = b \cdot l = 313,5 \ mm^2$

$A_{tot} = 990,26 \ mm^2 = 9,9 \ cm^2$

Normativa: $10,3 \ cm^2$

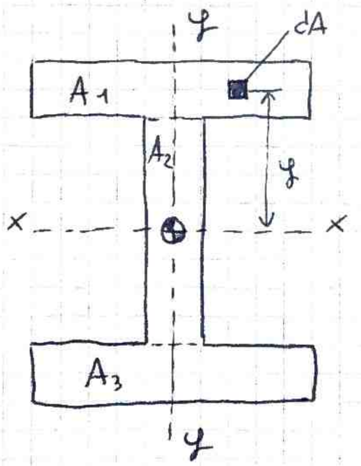
$$\boxed{X_G = \frac{S_y}{A} \qquad Y_G = \frac{S_x}{A}}$$

Coordinate del baricentro rispetto a $x-y$:

$$X_G = \frac{A_1 X_{G1} + A_2 X_{G2} + A_3 X_{G3}}{A_{tot}} = \frac{1}{A_{tot}} \sum A_i X_{Gi} = 27,5 \ mm$$

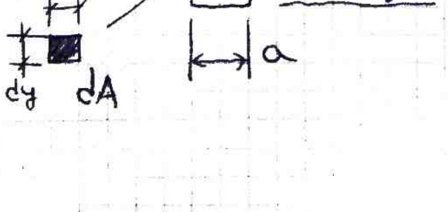
$$y_G = \frac{1}{A_{tot}} \sum A_i y_{Gi} = \frac{A_1 y_{G1} + A_2 y_{G2} + A_3 y_{G3}}{A_{tot}} = 50 \ mm$$

Calcoliamo i momenti di inerzia della sezione:



$$J_{xx} = \int_A y^2 dA = \underbrace{\int_{A_1} y^2 dA_1}_{J_{xx,1}} + \underbrace{\int_{A_2} y^2 dA_2}_{J_{xx,2}} + \underbrace{\int_{A_3} y^2 dA_3}_{J_{xx,3}}$$

$J_{xx,2}$ →



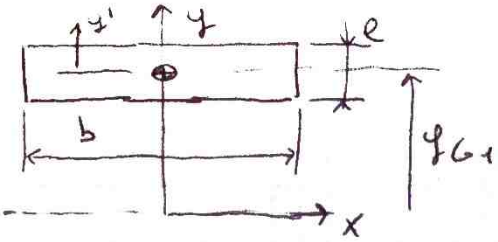
$$J_{xx,2} = \int_{A_2} y^2 dA_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \int_{-a/2}^{+a/2} y^2 \, dx \, dy =$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} dx =$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} y^2 a \, dy = \frac{1}{3} a \left[y^3 \right]_{-h/2}^{h/2} =$$

$$= \frac{1}{3} a \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{a h^3}{12} = 23,76 \ cm^4$$

$J_{xx,1} \rightarrow$



$$J_{xx,1} = \int_{A_1} y^2\, dA_1 = \int_{A_1} (y_{G1} + y')^2\, dA_1 =$$

$$= \int_{A_1} y_{G1}^2\, dA_1 + \int_{A_1} 2\, y_{G1}\, y'\, dA_1 + \int_{A_1} y'^2\, dA_1 =$$

$$= y_{G1}^2 A_1 + \phi + \frac{b\, e^3}{12} = (47{,}15\ mm)^2\, 313{,}5\ mm^2 + 848{,}8\ mm^4 = 69{,}78\ cm^4$$

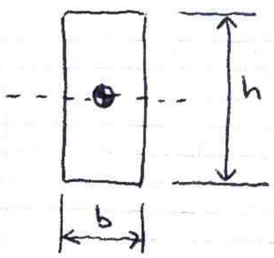
$J_{xx,2} = J_{xx,3}$

$J_{xx} = J_{xx,1} + J_{xx,2} + J_{xx,3} = 1633266\ mm^4 = 163{,}3\ cm^4$

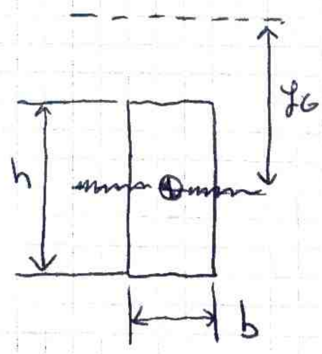
Normativa: $J_{xx} = 171\ cm^4$ la differenza è dovuta alla semplificazione della geometria (raccordi, eccetera)

Prima di passare al calcolo del J_{YY} generalizziamo i calcoli fatti fino ad ora:

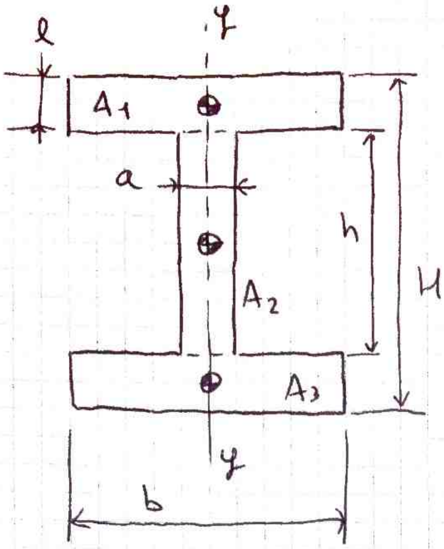
Sezione rettangolare:



$J = \frac{bh^3}{12}$



$J = \frac{bh^3}{12} + (hb)\, y_G^2$



$$J_{yy,1} = \frac{l b^3}{12} = 79028,1 \text{ mm}^4$$

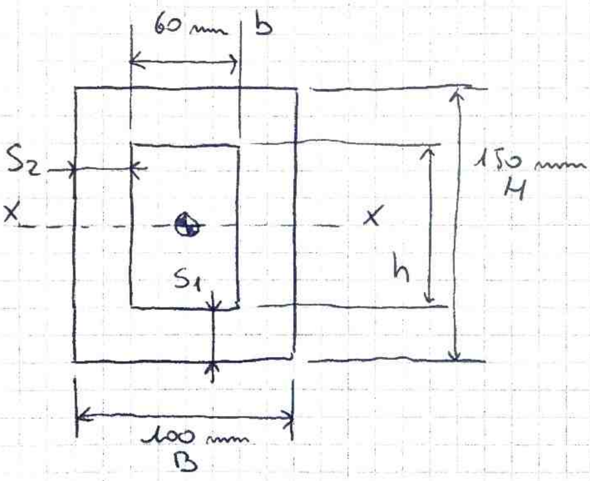
$$J_{yy,2} = \frac{h a^3}{12} = 508,86 \text{ mm}^4$$

$$J_{yy,3} = \frac{l b^3}{12} = 79028,1 \text{ mm}^4$$

$$J_{tot} = 158565 \text{ mm}^4 = 15,85 \text{ cm}^4$$

Normativa : 15,9 cm^4

La differenza in questo caso è minore poiché i raccordi sono posizionati più vicino all'asse neutro rispetto al calcolo del J_{xx}.



$b = 60$ mm

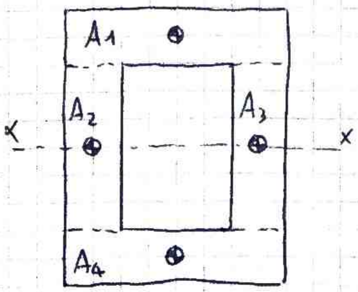
$B = 100$ mm

$h = 80$ mm

$H = 150$ mm

$S_1 = 35$ mm

$S_2 = 20$ mm



$$J_{xx,2} = J_{xx,3}$$

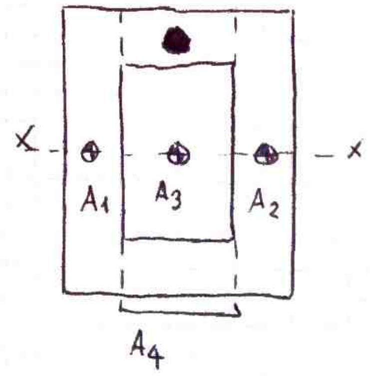
$$J_{xx,2} = \frac{S_2 h^3}{12} = 853333 \text{ mm}^4 = 85,3 \text{ cm}^4$$

$$J_{xx,1} = J_{xx,4}$$

$$J_{xx,1} = \frac{B S_1^3}{12} + B S_1 \left(\frac{h}{2} + \frac{S_1}{2} \right)^2 = 11929167 \text{ mm}^4 = 1192,9 \text{ cm}^4$$

$$J_{tot} = 2556,5 \text{ cm}^4$$

Utilizziamo metodo alternativo:



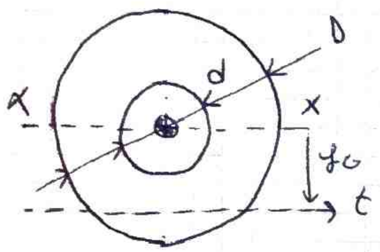
$$J_{xx,1} = J_{xx,2}$$

$$J_{xx,1} = \frac{S_2 H^3}{12} = 5625000 \text{ mm}^4 = 562,5 \text{ cm}^4$$

$$J_{xx,4} = \frac{b H^3}{12} = 16875000 \text{ mm}^4 = 1687,5 \text{ cm}^4$$

$$J_{xx,3} = \frac{b h^3}{12} = 2560000 \text{ mm}^4 = 256 \text{ cm}^4$$

$$J_{xx} = 2 \cdot J_{xx,1} + J_{xx,4} - J_{xx,3} = 2556,5 \text{ cm}^4$$

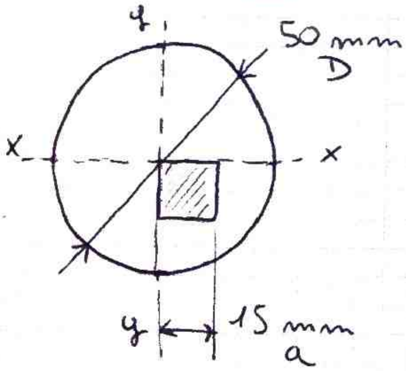


$$J_{xx} = \frac{\pi D^4}{64}$$ per sezione circolare piena

$$J_{xx} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}$$

Rispetto all' asse t:

$$J_{xx,t} = J_{xx} + y_G^2 \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right)$$



$$J_{xx} = \frac{\pi D^4}{64} = 30679{,}6 \text{ mm}^4 = 30,68 \text{ cm}^4$$

$$J_{yy} = J_{xx} = 30,68 \text{ cm}^4$$

$$J_{xx,\#} = \frac{a^4}{12} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 a^2 = 16875 \text{ mm}^4 = 1,69 \text{ cm}^4$$

$$J_{yy,\#} = J_{xx,\#}$$

$$J_{xx,tot} = J_{xx} - J_{xx,\#} = 28,99 \text{ cm}^4$$