

Campi vettoriali

1. Sia $\vec{F}(x, y) = ye^x\vec{i} + (e^x - \cos y)\vec{j}$ un campo vettoriale. Determinare un potenziale per \vec{F} , se esiste.
2. Sia $\vec{F}(x, y) = xy\vec{i} + \frac{1}{2}x^2\vec{j}$ un campo vettoriale. Determinare un potenziale per \vec{F} , se esiste.
3. Sia $\vec{F}(x, y) = xy\vec{i} + y\vec{j}$ un campo vettoriale. Calcolare l'integrale di \vec{F} lungo una circonferenza con centro sull'asse y ; \vec{F} ammette potenziale?
4. Sia γ l'arco di ellisse di equazione parametrica $x = 2 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, e sia $\vec{F}(x, y) = (3x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ un campo vettoriale. a) Calcolare il lavoro di \vec{F} lungo γ . b) Calcolare un potenziale per \vec{F} , se esiste. c) Utilizzare il potenziale per calcolare nuovamente il lavoro.
5. Sia $\vec{F}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\vec{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\vec{j}$. a) Verificare che \vec{F} è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. b) Calcolare un potenziale per \vec{F} , se esiste. c) Calcolare il lavoro di \vec{F} lungo l'arco di curva γ di equazione parametrica $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.
6. Sia $\vec{F}(x, y) = \left(y^2 - \frac{1}{x}\right)\vec{i} + \left(2xy + \frac{1}{y}\right)\vec{j}$. Verificare che \vec{F} è conservativo in $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, e determinare un potenziale.
7. Sia $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{1}{x-2} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}\right)\vec{i} + \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}\right)\vec{j}$. a) Determinare la più ampia regione $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in cui \vec{F} è di classe \mathcal{C}^1 . b) Si verifichi che in tale regione \vec{F} è irrotazionale.
8. Sia $\vec{F}(x, y) = xy^2 f(x)\vec{i} - y \log |f(x)|\vec{j}$. Determinare $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ in modo che \vec{F} sia conservativo in \mathbb{R}^2 , e determinare il potenziale che si annulla in $(0, 1)$. Si calcoli $\int_{\gamma} \vec{F} ds$, dove γ è una curva congiungente i punti $(0, 1)$ e $(1, 2)$.
9. Sia $\vec{F}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\vec{j}$. a) Determinare un potenziale per \vec{F} , se esiste. b) Si calcoli $\int_{\gamma} \vec{F} ds$, dove γ è la circonferenza di centro l'origine e

raggio 1 percorsa in senso antiorario. c) Si calcoli $\int_{\gamma} \vec{F} ds$, dove γ è l'arco di parabola $y = 1 + x^2$, $0 \leq x \leq 2$. d) Si calcoli $\int_{\gamma} \vec{F} ds$, dove γ è un arco di una qualunque circonferenza centrata nell'origine.

10. Sia $\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$. a) Verificare che \vec{F} è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. b) Si calcoli $\int_{\gamma} \vec{F} ds$, dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorsa in senso antiorario. \vec{F} è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? c) Determinare un potenziale per \vec{F} in $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

11. Sia $\vec{F}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y \vec{j} + z^3 \vec{k}$. Verificare che \vec{F} è conservativo in \mathbb{R}^3 , e determinare un potenziale.

12. Sia $\vec{F}(x, y, z) = f(x, y, z) \vec{i} + z \vec{j} + y \vec{k}$. Determinare $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ in modo che \vec{F} sia conservativo in \mathbb{R}^3 , e determinare un potenziale.

13. Sia $\vec{F}(x, y, z) = \left(\alpha xz + \frac{yz}{x}\right) \vec{i} + \left(z \log x - \frac{1}{2} \alpha^2 y \log z\right) \vec{j} + \left(x^\alpha + y \log x - \frac{y^2}{z}\right) \vec{k}$.

Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che \vec{F} sia conservativo in $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, z > 0\}$. Determinare il potenziale che si annulla in $(1, 1, 1)$.

14. Sia $\vec{F}(x, y, z) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + 2xy \vec{k}$. Si calcoli il lavoro del campo lungo la curva γ composta dalla spezzata rettilinea che unisce $(0, 0, 0)$ a $(3, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$ a $(2, 3, 1)$ e $(2, 3, 1)$ a $(2, 3, 0)$.

15. Nel piano cartesiano sia C la curva composta dall'arco di parabola $y = x^2$ che va da $(0, 0)$ a $(2, 4)$ e dai segmenti che uniscono $(2, 4)$ a $(0, 4)$ e $(0, 4)$ a $(0, 0)$. Usando il teorema di Gauss-Green, si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\vec{F}(x, y) = y^2 \vec{i} + (y^2 - x^2) \vec{j}$ lungo la curva C percorsa in senso antiorario.

16. Usando la formula di Gauss-Green si calcoli l'area dell'ellisse E di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

17. Sia B un corpo rigido in rotazione attorno all'asse z con velocità angolare ω costante. Sia \vec{V} il campo che assegna ad ogni punto P di B la sua velocità: $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, dove $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Si scriva il campo \vec{V} in coordinate cartesiane e si calcoli $\text{rot} \vec{V}$.

18. Sia \vec{E} il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q posizionata nell'origine: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ a) Calcolare modulo e versore di \vec{E} ; b) determinare il dominio D di \vec{E} e dire se è connesso, semplicemente connesso; c) dire se \vec{E} è irrotazionale, solenoidale; d) determinare, se esiste, un potenziale U di \vec{E} in D ; e) calcolare la circuitazione di \vec{E} lungo la circonferenza unitaria di centro $(0, 1, 0)$, contenuta nel piano $y = 1$.

19. Il campo magnetico generato in un punto P dello spazio da un filo infinito coincidente con l'asse z percorso da una corrente I è: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{\vec{k} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^2}$, dove \vec{k} è il versore dell'asse z , \vec{r} è il vettore \overrightarrow{HP} , H è la proiezione di P sull'asse z (legge di Biot-Savart). a) Scrivere il campo in componenti cartesiane; b) calcolare modulo e versore di \vec{B} ; c) determinare il dominio D di \vec{B} e dire se è connesso, semplicemente connesso; d) dire se \vec{B} è irrotazionale, solenoidale; e) stabilire se \vec{B} è conservativo in D . Suggerimento: calcolare la circuitazione di \vec{B} lungo una curva chiusa concatenata all'asse z (teorema di Ampere).

20. Calcolare l'area della regione A del piano x, y delimitata dalla retta $y = x$ e dalla curva γ di equazione $x = t^2 + t$, $y = t^4 + t$, con $t \in [0, 1]$.

21. Calcolare l'area della regione A del piano x, y delimitata dalla curva γ di equazione $x = te^t$, $y = te^{-t}$, con $t \in [0, 1]$, e il segmento Γ che congiunge gli estremi di γ .

22. Calcolare l'area della regione A del piano x, y delimitata dalla curva γ di equazione $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, con $t \in [0, \pi]$, e l'asse x .

23. Dato il campo $\vec{F}(x, y, z) = -z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$, si calcoli il lavoro di \vec{F} lungo la curva γ , intersezione del piano $z = y$ con il paraboloido di equazione $z = x^2 + y^2$.

Soluzioni.

1. \vec{F} è irrotazionale in \mathbb{R}^2 , infatti $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = e^x$; \mathbb{R}^2 è semplicemente connesso, quindi \vec{F} è conservativo in \mathbb{R}^2 . $U(x, y) = \int_0^x 0 dt + \int_0^y (e^x - \cos t) dt = ye^x - \sin y$.

2. \vec{F} è irrotazionale in \mathbb{R}^2 , infatti $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = x$; \mathbb{R}^2 è semplicemente connesso, quindi \vec{F} è conservativo in \mathbb{R}^2 . $U(x, y) = \int_0^x 0 dt + \int_0^y \frac{1}{2}x^2 dt = \frac{1}{2}x^2y$.

3. L'equazione parametrica di γ è: $x = r \cos \theta$, $y = y_0 + r \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$;
 $\int_{\gamma} \vec{F} ds = \int_0^{2\pi} [-r^2 \cos \theta (y_0 + r \sin \theta) \sin \theta + (y_0 + r \sin \theta) r \cos \theta] d\theta = 0$. \vec{F} non
 ammette potenziale poiché non è irrotazionale.

4. a) $L = \int_{\gamma} \vec{F} ds = \int_0^{\pi} [(12 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta)(-2 \sin \theta) + 12 \cos \theta \sin \theta (3 \cos \theta)] d\theta =$
 -16 . b) $U(x, y) = \int_0^x 3t^2 dt + \int_0^y 2xt dt = x^3 + xy^2$. c) $L = U(-2, 0) - U(2, 0) =$
 -16 .

5. \vec{F} è irrotazionale infatti: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^3}(y^2 - 3x^2)$. b) $U_y =$
 $\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow U(x, y) = \int \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy + g(x) = \frac{x}{x^2 + y^2} + g(x)$. Imponendo
 che U_x sia uguale alla prima componente del campo si trova che $g(x) = c$,
 quindi $U(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. c) $L = U(-R, 0) - U(R, 0) = -\frac{2}{R}$.

6. \vec{F} è conservativo in E , infatti E è semplicemente connesso e : $\frac{\partial F_2}{\partial x} =$
 $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$. $U_x = y^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow U(x, y) = \int (y^2 - \frac{1}{x}) dx + g(y) = y^2 x - \log x + g(y)$.
 Imponendo che U_y sia uguale alla seconda componente del campo si trova che
 $g(y) = \log y$, quindi $U(x, y) = xy^2 - \log x + \log y$. Il potenziale si può anche
 trovare con gli integrali di linea: $U(x, y) = \int_1^x (1 - \frac{1}{t}) dt + \int_1^y (2xt + \frac{1}{t}) dt =$
 $x - 1 - \log x + x(y^2 - 1) + \log y = xy^2 + \log y - \log x + c$.

7. \vec{F} è di classe \mathcal{C}^1 in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0) \cup x = 2\}$. b) $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{2}{3} \frac{xy}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$.

8. $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \Rightarrow 2xyf(x) = -y \frac{f'(x)}{f(x)}$. Integrando l'equazione differen-
 ziale si trova $f(x) = \frac{1}{x^2 + c}$, con $c > 0$ perché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Sia ad esempio
 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. $U(x, y) = \int_0^x \frac{t}{t^2 + 1} dt + \int_1^y -t \log \frac{1}{x^2 + 1} dt = \frac{1}{2} y^2 \log(x^2 + 1)$.
 $\int_{\gamma} \vec{F} ds = U(1, 2) - U(0, 1) = 2 \log 2$.

9. $U(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$, esiste in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. b) $\int_{\gamma} \vec{F} ds = 0$ perché γ

è una linea chiusa. c) $\int_{\gamma} \vec{F} ds = U(2, 5) - U(0, 1) = \frac{1}{2} \log 29$. d) $\int_{\gamma} \vec{F} ds = \frac{1}{2} \log R^2 - \frac{1}{2} \log R^2 = 0$.

10. a) \vec{F} è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, infatti $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$. b) $\int_{\gamma} \vec{F} ds = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(\cos t) \right] dt = 2\pi$. Poiché l'integrale lungo una curva chiusa è non nullo, \vec{F} non è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. c) E è semplicemente connesso, dunque \vec{F} ammette potenziale in E . $U(x, y) = \int_1^y F_2(0, t) dt + \int_0^x F_1(t, y) dt = -\arctan \frac{x}{y}$.

11. \vec{F} è conservativo in \mathbb{R}^3 , infatti \mathbb{R}^3 è semplicemente connesso e $\text{rot} \vec{F} = \mathbf{0}$. $U(x, y, z) = \int_0^x t^2 dt + \int_0^y t dt + \int_0^z t^3 dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^4$.

12. Si ha che $\text{rot} \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{k} = \mathbf{0}$, quindi $f(x, y, z) = g(x)$. $U(x, y, z) = \int_0^x g(t) dt + \int_0^z y dt = \int_0^x g(t) dt + yz$.

13. Affinché $\text{rot} \vec{F} = \mathbf{0}$, deve essere $\alpha = 2$. $U(x, y, z) = \int_1^x (2t + \frac{1}{t}) dt + \int_1^y \log x dt + \int_1^z \left(x^2 + y \log x - \frac{y^2}{t} \right) dt = x^2 z + yz \log x - y^2 \log z - 1$.

14. Il campo non è conservativo. Sia γ_1 il segmento congiungente $(0, 0, 0)$ con $(3, 0, 0)$; le equazioni parametriche di γ_1 sono: $x = 3t, y = 0, z = 0, 0 \leq t \leq 1$. Sia γ_2 il segmento congiungente $(3, 0, 0)$ con $(2, 3, 1)$; le equazioni parametriche di γ_2 sono: $x = 3 - t, y = 3t, z = t, 0 \leq t \leq 1$. Sia γ_3 il segmento congiungente $(2, 3, 1)$ con $(2, 3, 0)$; le equazioni parametriche di γ_3 sono: $x = 2, y = 3, z = 1 - t, 0 \leq t \leq 1$. $\int_{\gamma} \vec{F} ds = \int_{\gamma_1} \vec{F} ds + \int_{\gamma_2} \vec{F} ds + \int_{\gamma_3} \vec{F} ds = \int_0^1 [-3t^2 + 9t(3 - t) - 12] dt = -\frac{5}{2}$.

15. Sia D la regione intena alla curva; $\int_C \vec{F} ds = \iint_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx dy = \iint_D (-2x - 2y) dx dy = -2 \int_0^2 \left(\int_{x^2}^4 (x + y) dy \right) dx = -\frac{168}{5}$.

16. Sia $\vec{F} = x\vec{j}$, e sia $C = \partial E^+$; allora le equazioni parametriche di C sono: $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, e $|E| = \iint_E dx dy = \iint_E (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dx dy = \int_C \vec{F} ds = \int_0^{2\pi} [a \cos \theta \vec{j} \cdot (-a \sin \theta \vec{i} + b \cos \theta \vec{j})] dt = \pi ab$.

17. $\vec{V} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$, $\text{rot} \vec{V} = 2\vec{w}$. (Il rotore di un campo di velocità è legato alle rotazioni: le particelle che occupano la posizione $P = (x, y, z)$ ruotano attorno all'asse parallelo alla direzione del rotore con velocità proporzionale al modulo del rotore).

18. a) $|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\text{vers} \vec{E} = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; b) $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, è connesso e semplicemente connesso; c) $\text{rot} \vec{E} = \text{div} E = 0$; d) $U(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; e) la circuitazione è nulla poiché il campo è conservativo in D .

19. a) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$; b) $|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\text{vers} \vec{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right)$; c) $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$, è connesso, non semplicemente connesso; d) $\text{rot} \vec{B} = \text{div} B = 0$; e) \vec{B} non ammette potenziale in D : consideriamo la circonferenza unitaria γ di centro $(0, 0, 0)$ contenuta nel piano x, y ; le equazioni parametriche di γ sono: $x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Si ha che $\int_\gamma \vec{B} ds = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_0^{2\pi} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 I \neq 0$, dunque \vec{B} non è conservativo in D .

20. La curva γ ha come estremi l'origine e il punto $(1, 1)$, e si trova sotto la bisettrice dato che $t^2 + t \leq t^4 + t$ se $0 \leq t \leq 1$. Il bordo di A è quindi composto da γ e dal segmento di equazione parametrica $x = t, y = t$ con $0 \leq t \leq 1$. Sia $\vec{F} = x\vec{j}$, applicando Gauss-Green si ha che: $|A| = \iint_A dx dy = \int_{\partial^+ A} \vec{F} ds = \int_0^1 (t^2 + t)(4t^3 + 1) dt - \int_0^1 t dt = \frac{3}{10}$.

21. La curva γ ha come estremi l'origine e il punto $(e, \frac{1}{e})$, e si trova sopra il segmento dato che $te^{-t} \geq \frac{1}{e^2} te^t$ se $0 \leq t \leq 1$. Sia $\vec{F} = x\vec{j}$, applicando Gauss-

Green si ha che: $|A| = \iint_A dx dy = \int_{\partial^+ A} \vec{F} ds = - \int_0^1 te^t(e^{-t} - te^{-t}) dt + \int_0^1 et \frac{1}{e} dt = \frac{1}{3}$.

22. La curva γ ha come estremi l'origine e il punto $(-\pi, 0)$, e si trova sopra l'asse x . Sia $\vec{F} = x\vec{j}$, applicando Gauss-Green si ha che: $|A| = \iint_A dx dy = \int_{\partial^+ A} \vec{F} ds = \int_0^\pi t \cos t (\sin t + t \cos t) dt + \int_{-\pi}^0 t \cdot 0 dt = \int_0^\pi t^2 \cos^2 t dt + \int_0^\pi t \cos t \sin t dt = \frac{1}{2} t^2 [\sin t \cos t + t]_0^\pi - \int_0^\pi 2t \frac{1}{2} (\sin t \cos t + t) dt + \int_0^\pi t \cos t \sin t dt = \frac{\pi^3}{6}$.

23. Se $(x, y, z) \in \gamma$, (x, y) soddisfa l'equazione: $x^2 + y^2 - y = 0$, che rappresenta una circonferenza di centro $(0, \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{2}$. Una parametrizzazione di γ è: $x(t) = \frac{1}{2} \cos t$, $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t$, $z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t$, con $0 \leq t \leq 2\pi$. Il lavoro vale: $\int_0^{2\pi} \left[-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t\right) \left(-\frac{1}{2} \sin t\right) + \frac{1}{2} \cos t \frac{1}{2} \cos t + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t\right) \frac{1}{2} \cos t \right] dt = \frac{1}{2} \pi$.