Integrali doppi

1. Calcolare $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$, dove $R=[0,1]\times[0,3]$ e

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy & y\le x^2\\ x^3+x^2y & y>x^2\end{cases}$$

2. Calcolare $\iint_T xy^2\,dx\,dy$, dove T è il triangolo di vertici $(-3,0),(3,0),(0,3)$.

3. Calcolare $\iint_Q (x+\sin y)\,dx\,dy$, dove $Q=[-1,1]\times[-1,1]$.

4. Calcolare $\iint_Q \left(y^2\sin(x-1)+(1-x)^3\tan y\right)\,dx\,dy$, dove Q è il quadrato di vertici $(1,0),(2,1),(1,2),(0,1)$.

5. Calcolare $\iint_T y\sin(x-y)\,dx\,dy$, dove T è il triangolo di vertici $(-1,0),(1,0),(0,1)$.

6. Calcolare $\int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\right)dx$

7. Calcolare $\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 x^3\sin y^3\,dy\right)dx$

8. Cambiare l'ordine di integrazione nel seguente integrale iterato:
$\int_{-1}^1\left(\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$

9. Calcolare $\iint_D x(1-y)\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1, y\le x\}$.

10. Determinare il baricentro dell'insieme $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 2, y\ge |x|\}$.

11. Calcolare $\iint_D |y-x|\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -1\le x\le 1, x^2\le y\le 1\}$.

12. Calcolare $\iint_D xy\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y<\sqrt{3}x, xy\le 1, y>x\}$.

13. Calcolare il volume del tetraedro di vertici $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$.

14. Calcolare $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$.

15. Calcolare il volume del solido che giace sotto il paraboloide $z=x^2+y^2$ e sopra la regione delimitata dalle curve $y=x^2$ e $x=y^2$.

16. Calcolare $\iint_D (x^2\tan x+y^3+4)\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2\}$.

17. Con opportuni ragionamenti, dimostrare che è nullo l'integrale doppio $\iint_D \sin(y-1)^3\cos(x+(y-1)^2)\,dx\,dy$, dove D è il quadrato di vertici $(\frac{1}{2},1)$, $(1,\frac{1}{2})$, $(\frac{3}{2},1)$, $(1,\frac{3}{2})$.

18. Calcolare $\iint_D (x-3\sqrt{3}y)\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 3, y+|x|\ge 0\}$.

19. Calcolare $\iint_D \left(\cos(x^2+y^2)+x^2y^5\right)\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, x^2+y^2\le\frac{\pi}{2}\}$.

20. Calcolare $\iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4, 0<y<x\}$.

21. Calcolare $\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4, y\ge x\}$.

22. Calcolare $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\le 1, y\le 0\}$.

23. Operando un opportuno cambiamento di variabili calcolare $\iint_D \frac{1}{xy}\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x+y<3, x<y<2x\}$.

24. Operando un opportuno cambiamento di variabili calcolare $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\}$.

25. Calcolare l'area della regione D dei punti del piano del terzo quadrante, compresi tra le rette $y = \frac{1}{2}x$ e $y = x$ e le iperboli $xy = 1$ e $xy = 2$.

26. Operando un opportuno cambiamneto di coordinate calcolare $\iint_D \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx\, dy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x+y < 2, x > 0, y > 0\}$.

27. Calcolare l'area dell'ellisse $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, a > 0, b > 0\}$.

28. Operando un opportuno cambiamento di variabili calcolare $\iint_D y^2\, dx\, dy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 1\}$.

29. Calcolare il volume dell'ellissoide $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, a > 0, b > 0, c > 0\}$.

30. Calcolare $\iint_D \frac{1}{y - x - \sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4, x^2 + y^2 + 2x - 2y \leq 0, -x \leq y \leq -\sqrt{3}x\}$.

31*. Calcolare $\iint_D \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, (x+2)^2 + (y+2)^2 \leq 8\}$.

32. Calcolare $\iint_D (x-y)\, dx\, dy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2,\ x \geq y^2\}$.

33. Calcolare $\iint_D y\, dx\, dy$, dove D è il parallelogramma di vertici $(0,0), (2,0), (3,1), (1,1)$.

34. Disegnare il dominio di integrazione e scambiare l'ordine di integrazione del seguente integrale doppio, calcolarne poi il valore : $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{1+x^3}\, dx\right) dy + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1} \frac{1}{1+x^3}\, dx\right) dy.$

35. Calcolare $\iint_D \sin(\frac{1}{2}x + y)\, dx\, dy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq \frac{1}{2}|y|,\ |x| \leq \frac{1}{2}\}$.

36. Calcolare $\iint_D |xy|\, dx\, dy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + 4y^2 \leq 1\}$.

37. Calcolare $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$.

38. Calcolare il volume del cilindroide a generatrici verticali determinato dalla funzione $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ avente per base il trapezio T compreso tra le rette $x = 1,\ x = 2,\ y = 0,\ y = x$. Eseguire l'integrazione sia in coordinate cartesiane che in coordinate polari.

39. Calcolare l'area del dominio di $\mathbb{R}^2$: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,\ |\ln y| < 1,\ |x - y \ln y| < 1\}$.

40. Si calcoli il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse z, delimitato dal piano $z = 0$ e dalla parte di superficie di equazione $z = y(2 - x^2 - y^2)$ che si proietta in $D = \{(x,y) : x^2 - 2x + y^2 \leq 0, y \geq 0\}$.

41. Si calcoli il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse z, delimitato dal piano $z = 0$ e dalla parte di superficie di equazione $z = \log(xy)$ che si proietta in $D = \{(x,y) : x^2 \leq y \leq 2,\ x \geq \frac{1}{2}\}$.

42. Calcolare l'area della regione piana compresa nel primo quadrante e limitata dalle curve $xy = 4,\ xy = 8,\ xy^3 = 5,\ xy^3 = 15$.

43. Calcolare l'area del dominio D di $\mathbb{R}^2$: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ (x^2+y^2)^3 \leq 4x^2y^2\}$.

44. Calcolare il volume del solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

Soluzioni.

1. $\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^3 (x^3 + x^2 y)\, dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} 2xy\, dy \right) dx = \frac{61}{28}$

2. $\iint_T xy^2\, dx\, dy = 0$, infatti T è simmetrico rispetto all'asse y e la funzione integranda è antisimmetrica rispetto a tale asse, cioè $f(-x,y) = -f(x,y)$.

3. $\iint_Q (x+\sin y)\,dx\,dy = \iint_Q x\,dx\,dy + \iint_Q \sin y\,dx\,dy = 0$, infatti Q è simmetrico rispetto all'asse y e all'asse x, la funzione $f(x,y) = x$ è antisimmetrica rispetto all'asse y, la funzione $g(x,y) = \sin y$ è antisimmetrica rispetto all'asse x.

4. $\iint_Q \left(y^2\sin(x-1) + (1-x)^3\tan y\right)\,dx\,dy = 0$, infatti il dominio è simmetrico rispetto alla retta $x = 1$ e la funzione integranda $f(x,y) = y^2\sin(x-1) + \tan y(1-x)^3$ è antisimmetrica rispetto a tale retta, cioè $f(1+c,y) = -f(1-c,y)$.

5. $\iint_T y\sin(x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} y\sin(x-y)\,dx\right)\,dy = \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1$

6. $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx\right)\,dy = \frac{1}{3}(e-1)$

7. $\int_0^1 \left(\int_{x^1}^1 x^3\sin y^3\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} x^3\sin y^3\,dx\right)\,dy = \frac{1}{12}(1-\cos 1)$

8. $\int_{-1}^1 \left(\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\right)\,dy +$
$+\int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\right)\,dy$

9. $\iint_D x(1-y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} x(1-y)\,dx\right)\,dy = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{16}$

10. Si ha che $\bar{x} = 0$ per simmetria, $\bar{y} = \dfrac{2\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2-x^2}} y\,dy\right)\,dx}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{8}{3\pi}$

11. $\iint_D |y-x|\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{y} (y-x)\,dx\right)\,dy + \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x-y)\,dy\right)\,dx = \frac{5}{6}$

12. $\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} \left(\int_x^{\sqrt{3}x} xy\,dy\right)\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}^1 \left(\int_x^{\frac{1}{x}} xy\,dy\right)\,dx = \frac{1}{8}\log 3$

13. Il piano passante per i punti dati ha equazione: $z = 1-x-y$. Sia T il triangolo nel piano x,y di vertici $(1,0)$ e $(0,1)$; $V = \iint_T (1-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\right)\,dx = \frac{1}{6}$

14. L'integrale dato rappresenta il volume della semisfera di raggio 1, dunque vale $\dfrac{2}{3}\pi$.

15. $V = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,dy \right) dx = \dfrac{6}{35}$

16. Per simmetria $\iint_D (x^2 \tan x + y^3 + 4)\,dx\,dy = \iint_D 4\,dx\,dy = 4 \cdot 2\pi = 8\pi$

17. Il dominio D è simmetrico rispetto alla retta $y = 1$; la funzione integranda $f(x,y) = \sin(y-1)^3 \cos(x + (y-1)^2)$ è dispari rispetto a tale retta, infatti si ha che $f(x, 1+y) = -f(x, 1-y)$, dunque l'integrale è nullo.

18 $\iint_D (x - 3\sqrt{3}y)\,dx\,dy = \iint_D x\,dx\,dy - 3\sqrt{3}\iint_D y\,dx\,dy =$
$= 0 - 6\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\theta\,d\theta \right) d\rho = -9\sqrt{2}$

19. $\iint_D \left(\cos(x^2+y^2) + x^2y^5 \right) dx\,dy = \iint_D \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy =$
$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \cos\rho^2\,d\theta \right) d\rho == \pi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \rho\cos\rho^2\,d\rho = \dfrac{\pi}{2}$

20. $\iint_D \dfrac{y}{x}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta \right) d\rho = \dfrac{3}{4}\log 2$

21. $\iint_D \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \rho^2 \cos\theta \sin^2\theta\,d\theta \right) d\rho = -\dfrac{7\sqrt{2}}{18}$

22. $\iint_D \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \rho\sin\theta\,d\rho\,d\theta$, dove $\tilde{D} = \{(\rho,\theta) : \dfrac{3}{2}\pi \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2\cos\theta\}$. $\iint_{\tilde{D}} \rho \sin\theta\,d\rho\,d\theta = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^{2\cos\theta} \rho\sin\theta\,d\rho \right) d\theta = -\dfrac{2}{3}$
N. B. $(x-1)^2 + y^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le \rho \le 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta \ge 0; y \le 0 \Rightarrow \rho\sin\theta \le 0; \cos\theta \ge 0$ e $\sin\theta \le 0 \Rightarrow \dfrac{3}{2}\pi \le \theta \le 2\pi$

23. Poniamo: $u = x + y, v = \dfrac{y}{x}$, da cui $x = \dfrac{u}{1+v}, y = \dfrac{uv}{1+v}$. Lo Jacobiano di tale trasformazione vale: $\dfrac{u}{(1+v)^2}$. Sia $\tilde{D} = \{(u,v) : 1 < u < 3, 1 < v < 2\}$;
$\iint_D \dfrac{1}{xy}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \dfrac{1+v}{u}\dfrac{1+v}{uv}\left|\dfrac{u}{(1+v)^2}\right| du\,dv = \log 3 \log 2$

24. Disegniamo D: nel I quadrante si ha che $x+y \leq 1$; nel II quadrante $y-x \leq 1$, nel III $x+y \geq -1$; nel IV $y-x \geq -1$; dunque D è il quadrato di vertici $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$. Poniamo: $u=x+y, v=y-x$, da cui $x=\dfrac{u-v}{2}, y=\dfrac{u+v}{2}$. Lo Jacobiano di tale trasformazione vale $\dfrac{1}{2}$. Sia $\tilde{D}=\{(u,v): -1<u<1, -1<v<1\}$; $\displaystyle\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} e^u \frac{1}{2}\,du\,dv = e-\frac{1}{e}$

25. $A(D)=\displaystyle\iint_D dx\,dy$. Poniamo $u=xy, v=\dfrac{y}{x}$, da cui $x=-\sqrt{\dfrac{u}{v}}, y=-\sqrt{uv}$. Lo Jacobiano di tale trasformazione vale $\dfrac{1}{2v}$ (N. B. $v=\dfrac{y}{x}>0$). Sia $\tilde{D}=\{(u,v): 1<u<2, \frac{1}{2}<v<1\}$; $A(D)=\displaystyle\iint_{\tilde{D}} \frac{1}{2v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\log 2$

26. Poniamo $u=y-x, v=x+y$, da cui $x=\dfrac{v-u}{2}, y=\dfrac{u+v}{2}$. Lo Jacobiano di tale trasformazione vale $\dfrac{1}{2}$. Si ha che: $1<x+y<2 \Rightarrow 1<v<2$; $x>0 \Rightarrow v-u>0$; $y>0 \Rightarrow u+v>0$. Sia $\tilde{D}=\{(u,v): 1<v<2, -v<u<v\}$; $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \frac{1}{2}\cos\frac{u}{v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^2\left(\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\,du\right)dv = \frac{3}{2}\sin 1$

27. $A(E)=\displaystyle\iint_E dx\,dy$. Poniamo $x=a\rho\cos\theta, y=b\rho\sin\theta$; lo Jacobiano vale $ab\rho$. Sia $\tilde{E}=\{(\rho,\theta): 0<\rho<1, 0<\theta<2\pi\}$; $\displaystyle\iint_E dx\,dy = \iint_{\tilde{E}} ab\rho\,d\rho\,d\theta = \pi ab$

28. Poniamo: $x=\rho\cos\theta, y=\dfrac{1}{2}\rho\sin\theta$; lo Jacobiano di tale trasformazione vale $\dfrac{1}{2}\rho$. Sia $\tilde{D}=\{(\rho,\theta): 0<\rho<1, 0<\theta<2\pi\}$; $\displaystyle\iint_D y^2\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \frac{1}{8}\rho^3\sin^2\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{32}$

29. Sia $f(x,y)=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$. $V(E)=2\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1\}$. Poniamo: $x=a\rho\cos\theta, y=b\rho\sin\theta$; lo Jacobiano di tale trasformazione vale $ab\rho$. Sia $\tilde{D}=\{(\rho,\theta): 0<\rho<1, 0<\theta<2\pi\}$; $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} abc\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{2}{3}\pi abc$, dunqe $V(E)=\dfrac{4}{3}\pi abc$

30. Riscriviamo le condizioni che definiscono D in funzione delle coordinate polari: $x^2+y^2 \geq 16$ in coordinate polari diventa $\rho^2 \geq 4$, e cioè $\rho \geq 2$; $x^2+y^2+2x-2y \leq 0$ diventa $\rho^2+2\rho(\cos\theta-\sin\theta) \leq 0$, cioé $2 \leq \rho \leq 2(\sin\theta-\cos\theta)$. La condizione $-x \leq y \leq \sqrt{3}x$, in coordinate polari diventa: $\frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$.
$\iint_D \frac{1}{y-x-2\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\left(\int_2^{2(\sin\theta-cos\theta)} \frac{1}{\rho(\sin\theta-\cos\theta-1)}\rho\,d\rho\right)d\theta = \frac{\pi}{6}$

31. D è l'intersezione del cerchio C_1 di centro $(0,0)$ e raggio 4 e del cerchio C_2 di centro $(-2,-2)$ e raggio $\sqrt{8}$; C_2 passa per i punti: $(0,0),(-4,0)$ e $(0,-4)$. Riscriviamo le condizioni che definiscono D in funzione delle coordinate polari: $x^2+y^2 \leq 16$ in coordinate polari diventa $\rho^2 \leq 16$, e cioè $0 \leq \rho \leq 4$; $(x+2)^2+(y+2)^2 \leq 8$ diventa $\rho^2+4\rho(\cos\theta+\sin\theta) \leq 0$, e cioé $\rho+4(\cos\theta+\sin\theta) \leq 0$. L'ultima disequazione ha soluzione solo se $4(\cos\theta+\sin\theta) \leq 0$, infatti la somma di due quantità positive non può essere negativa. La disequazione $\cos\theta+\sin\theta \leq 0$ si risolve graficamente e si trova $\theta \in \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$. Quest'ultimo risultato si poteva anche vedere dal disegno di D, infatti la retta $y=-x$ è tangente alla circonferenza C_2 in $(0,0)$ essendo perpendicolare al raggio, e quindi tutti i punti di D hanno anomalia che come minimo vale $\frac{3}{4}\pi$ (se ci si muove lungo la circonferenza in senso orario verso l'origine i punti corrispondenti hanno anomalia che si avvicina arbitrariamente a $\frac{3}{4}\pi$) e come massimo vale $\frac{7}{4}\pi$ (in realtà si tratta di estremo superiore e inferiore). Guardando il disegno di D si vede che se $\theta \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, si ha che $0 \leq \rho \leq 4$, mentre se $\theta \in \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right]$, o se $\theta \in \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$, si ha che $0 \leq \rho \leq -4(\cos\theta+\sin\theta)$. $\iint_D \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\left(\int_0^4 \frac{1}{2\rho}\rho\,d\rho\right)d\theta + 2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\left(\int_0^{-4(\cos\theta+\sin\theta)} \frac{1}{2\rho}\rho\,d\rho\right)d\theta = \pi+4\sqrt{2}-4$. (Si è sfruttata la simmetria del dominio e della funzione integranda rispetto alla bisettrice).

32. D è simmetrico rispetto alla bisettrice, e $f(x,y) = -f(y,x)$, dunque l'integrale è nullo.

33. $\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_y^{y+2} y\,dx\right)dy = 1.$

34. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x^2\}$, $\iint_D \frac{1}{1+x^3}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2x^2} \frac{1}{1+x^3}\, dy \right) dx = \frac{1}{3} \log 2$.

35. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2|x| \leq y \leq 2|x|\}$, 'e simmetrico rispetto all'origine, $f(-x,-y) = -f(x,y)$, allora l'integrale è nullo.

36. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 - 1 \leq x \leq 1 - 4y^2\}$, $\iint_D |xy|\, dx\, dy = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{1-4y^2} xy\, dx \right) dy$ $= \frac{1}{32}$

37. $D = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}} \leq \rho \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}}^1 \rho \cos\theta\, d\rho \right) d\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3}$.

38. In coordinate cartesiane: $\iint_T \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \int_1^2 \int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\ dx = \int_1^2 x \arctan \frac{y}{x}\Big|_0^x dx = \frac{3}{8}\pi$. In coordinate polari: $T = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\cos\theta} \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$, $\iint_T \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} \rho \cos^2\theta\, d\rho \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \frac{3}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{3}{8}\pi$.

39. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{e} < y < e,\ -1 + y \ln y < x < 1 + y \ln y\}$. L'area di D è uguale a : $\iint_D dx\, dy = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\int_{-1+y\ln y}^{1+y\ln y} dx \right) dy = 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

40. $V = \iint_D y|2 - x^2 - y^2| dxdy = \iint_{D_1} y(2 - x^2 - y^2) dxdy - \iint_{D_2} y(2 - x^2 - y^2) dxdy$, dove $D_1 = \{(x,y) \in D : x^2 + y^2 \leq 2\}$, $D_2 = \{(x,y) \in D : x^2 + y^2 > 2\}$. Scriviamo D_1 come unione di E e F, dove $E = \{(x,y) \in D_1 : y \geq x\}$, $F = \{(x,y) \in D_1 : y < x\}$; allora $\iint_{D_1} y(2 - x^2 - y^2) dxdy = \iint_E y(2 - x^2 - y^2) dxdy + \iint_F y(2 - x^2 - y^2) dxdy$. Questi ultimi si calcolano in coordinate polari: $\iint_E y(2 - x^2 - y^2) dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 (2 - \rho^2) d\rho d\theta = \frac{3}{15}$; $\iint_F y(2 - x^2 -$

$y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2(2-\rho^2)d\rho\, d\theta = \frac{8\sqrt{2}}{15} - \frac{8}{15}$; $\iint_{D_2} y(2-x^2-y^2)dxdy =$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta} \rho^2(2-\rho^2)d\rho\, d\theta = -\frac{8\sqrt{2}}{15} + \frac{9}{15}$. Quindi $V = \frac{3}{15} + \frac{8\sqrt{2}}{15} - \frac{8}{15} - (-\frac{8\sqrt{2}}{15} + \frac{9}{15}) = \frac{16\sqrt{2}}{15} - \frac{14}{15}$.

41. $V = \iint_D |\log(xy)|dxdy = \iint_{D_1} \log(xy)dxdy - \iint_{D_2} \log(xy)dxdy$, dove $D_1 = \{(x,y) \in D : y \geq \frac{1}{x}\}$, $D_2 = \{(x,y) \in D : y < \frac{1}{x}\}$. $V = \int_1^2 \int_{\frac{1}{y}}^{\sqrt{y}} \log(xy)dx\, dy - \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{x^2}^{\frac{1}{x}} \log(xy)dy\, dy = (2\sqrt{2} + \frac{17}{8})\log 2 - \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{3}{4}$.

42. Si pone $u = xy,\ v = xy^3$, si ha che $u_x v_y - u_y v_x = 2xy^3 = 2v$, quindi la matrice Jacobiana ha per determinante $\frac{1}{2v}$. L'area richiesta vale $\int_4^8 \int_5^{15} \frac{1}{2v} dv\, du = 2\log 3$.

43. L'area di D è $\iint_D dxdy$. Passando alle coordinate polari, si trova che $\text{area}(D) = \iint_{\tilde{D}} \rho d\rho d\theta$, dove $\tilde{D} = \{(\rho,\theta) : \cos\theta \geq 0,\ \sin\theta \geq 0,\ \rho^6 \leq 4\rho^4 \cos^2\theta \sin^2\theta\} = \{(\rho,\theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 2\sin\theta\cos\theta\}$. Quindi $\text{area}(D) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\sin\theta\cos\theta} \rho d\rho \right) d\theta =$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t - \sin t\cos t}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}$.

$V = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-1 \geq 0,\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$.

In coordinate polari, $D = \{(\rho,\theta) : -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3},\ 1 \leq \rho \leq 2\cos\theta\}$,

44. $V = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^{2\cos\theta} \rho^3 d\rho \right) d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^4\theta - \frac{1}{4})d\theta$. Sia $I = \int \cos^4\theta d\theta$, risolvendo per parti si trova che $I = \sin\theta\cos^3\theta + 3\int \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \sin\theta\cos^3\theta + 3\int \cos^2\theta d\theta - 3I$, da cui $I = \frac{1}{4}(\sin\theta\cos^3\theta + 3\int\cos^2\theta d\theta)$; infine si ricava $V = \frac{7}{8}\sqrt{3} + \frac{5}{6}\pi$.