Estremi vincolati, Teorema del Dini.

**1.** Da un cartone di $12m^2$ si deve ricavare una scatola rettangolare senza coperchio. Trovare il massimo volume possibile della scatola.

**2.** Trovare gli estremi assoluti di $f(x, y) = x^2+2y^2$ sulla circonferenza $x^2+y^2 = 1$.

**3.** Trovare gli estremi assoluti di $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sul cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.

**4.** Trovare gli estremi assoluti di $f(x, y) = x^2-y^2$ sulla circonferenza $x^2+y^2 = 1$.

**5.** Trovare gli estremi assoluti di $f(x, y) = x^2y$ sotto il voncolo $x^2 + 2y^2 = 6$.

**6.** Trovare gli estremi assoluti di $f(x, y) = e^{-xy}$ sotto il voncolo $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

**7.** Determinare il rettangolo con i lati paralleli agli assi, inscrivibile in un' ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$, con area massima.

**8.** Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x, y) = x + 8y - 2$ sotto la condizione $x^4 + y^4 = 2$.

**9.** Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x, y) = (x-2y)^2$, vincolati alla curva $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

**10.** Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x, y) = x^6 + 4y^6$ sul cerchio $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

**11.** Si verifichi che l'equazione $x^2 + y^2 = 2xy$ definisce implicitamente in un intorno di ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ una e una sola funzione $y = y(x)$.

**12.** Determinare i valori di $x_0$ per i quali l'equazione $x^2-y^2 = 2x-2y$ definisce implicitamente in un intorno di $x_0$ una e una sola funzione $y = y(x)$.

**13.** Stabilire se l'equazione $x + 2y + x \sin y$ definisce implicitamente in un intorno di $x_0 = 0$ una e una sola funzione $y = y(x)$. In caso affermativo calcolare $y(0)$ e $y'(0)$.

**14.** Stabilire se l'equazione $xy + \log(xy) - 1 = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $x_0 = 1$ una e una sola funzione $y = y(x)$. In caso affermativo, calcolare $y(1)$ e$y'(1)$.

**15.** Verificare che l'equazione $x^3 + y^3 - 4x^2y + 2 = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $x_0 = 1$ una e una sola funzione $y = y(x)$ tale che $y(1) = 1$. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione data nel punto $(1, 1)$ e deteminare il verso della concavità.

**16.** Verificare che l'equazione $y^2 + x^2 + \sin x = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $y_0 = 0$ una e una sola funzione $x = x(y)$ tale che $x(0) = 0$. Verificare che $x(y)$ ha un massimo in $y = 0$.

**Soluzioni.**

**1.** La funzione da massimizzare è $f(x, y, z) = xyz$, sotto il vincolo $g(x, y) = 2xz + 2yz + xy = 12$. Ricavando $z$ dall'equazione del vincolo e sostituendo nella funzione $f(x, y, z)$, il problema si riconduce a trovare gli estremi liberi della funzione in due variabili $F(x, y) = xy\dfrac{12 - xy}{2x + 2y}$. Calcolando le derivate parziali e ponendole uguali a zero si trova:

$$\begin{cases} 2y^2(12 - x^2 - 2xy) = 0 \\ 2x^2(12 - 2xy - y^2) = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto che $x$ e $y$ sono entrambe positive si trova la soluzione $x = y = 2$. La scatola di volume massimo ha dimensioni: $x = 2, y = 2, z = 1$.

**2.** La Lagrangiana è $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Il massimo è 2 ed è assunto in $(0, \pm 1)$; il minimo è 1 ed è assunto in $(\pm 1, 0)$. N. B. La funzione ammette massimo e minimo assoluti sulla circonferenza per il teorema di Wierstrass (funzione continua su insieme chiuso e limitato). L'esercizio si può risolvere anche così: dall'equazione del vincolo si trova che $y^2 = 1 - x^2$, dunque $f$ sul vincolo vale $f = x^2 + 2(1 - x^2)$, con $x \in (-1, 1)$; il problema è dunque ricondotto al calcolo degli estremi di una funzione di una variabile nell'intervallo $[-1, 1]$.

**3.** All'interno del cerchio l'unico punto stazionario per $f$ è l'origine, confrontando i valori che la funzione assume nell'origine e nei punti della circonferenza trovati nell'esercizio precedente, si conclude che il massimo è 2 ed è assunto in $(0, \pm 1)$; il minimo è 0 ed è assunto in $(0, 0)$.

**4.** La Lagrangiana è $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Il massimo è 1 ed è assunto in $(\pm 1, 0)$; il minimo è -1 ed è assunto in $(0, \pm 1)$.

**5.** La Lagrangiana è $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 y - \lambda(x^2 + 2y^2 - 6)$. Il massimo è 4 ed è assunto in $(\pm 2, 1)$; il minimo è -4 ed è assunto in $(\pm 2, -1)$. N. B. Il vincolo è un sottoinsieme chiuso e limitato del piano ( è un' ellisse).

**6.** All'interno dell'ellisse l'unico punto stazionario è l'origine. Sul bordo usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana è $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = e^{-xy} - \lambda(x^2 + 4y^2 - 1)$. I punti stazionari della Lagrangiana sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} ye^{-xy} + 2\lambda x = 0 \\ xe^{-xy} + 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $x$ e la seconda per $y$ e sottraendo le due equazioni si trova $2\lambda(4y^2 - x^2) = 0$. Se fosse $\lambda = 0$ sarebbe $x = y = 0$, ma l'origine non soddisfa l'equazione del vincolo. Allora è $4y^2 = x^2$. Tenuto conto che $f(0, 0) = 1$, si ha che il massimo è $e^{\frac{1}{4}}$ ed è assunto in $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{2\sqrt{2}})$; il minimo è $e^{-\frac{1}{4}}$ ed è assunto in $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}})$.

**7.** Si tratta di massimizzare la funzione $f(x, y) = xy$ (un quarto di area del rettangolo), sotto la condizione $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Sia $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$. Si ha che:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y) = y - 2\lambda\frac{x}{a^2} = 0 \\ \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y) = x - 2\lambda\frac{y}{b^2} = 0 \\ \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y) = -g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Dalla I equazione si trova $y = 2\lambda\frac{x}{a^2}$, sostituendo nella II e nella III equazione si trova $\lambda = \pm\frac{1}{2}ab$ e $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, da cui $y = \frac{\sqrt{2}}{2}b$. L'area massima vale $2ab$.

**8.** Per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette estremi assoluti nell'insieme $x^4 + y^4 = 2$: è un sottoinsieme chiuso e limitato del piano (è contenuto nel quadrato $[-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}] \times [-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}]$). Si ha che:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y) = 1 - 4\lambda x^3 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y) = 8 - 4\lambda y^3 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y) = -g(x,y) = 2 - x^4 - y^4 = 0 \end{cases}$$

Dalla I e II equazione si trova $\lambda = \dfrac{1}{4x^3} = \dfrac{2}{y^3}$, da cui $x = \dfrac{1}{2}y$. Sostituendo nella III equazione si trova che $\left(\sqrt[4]{\dfrac{2}{17}}, 2\sqrt[4]{\dfrac{2}{17}}\right)$ è un punto di massimo, e $\left(-\sqrt[4]{\dfrac{2}{17}}, -\sqrt[4]{\dfrac{2}{17}}\right)$ è un punto di minimo. Il massimo assoluto vale $17\sqrt[4]{\dfrac{2}{17}} - 2$; il minimo assoluto vale $-17\sqrt[4]{\dfrac{2}{17}} - 2$.

**9.** Col metodo dei moltiplicatori di Lagrange si trovano i punti: $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $\left(\pm 1, \mp\dfrac{3}{2}, 16\right)$; il primo è il punto di minimo e il minimo è zero, il secondo è il punto di massimo e il massimo è 16.

**10.** Col metodo dei moltiplicatori di Lagrange si trovano i pinti: $(0, \pm 1, \frac{1}{2})$, $(\pm 1, 0, 3)$, $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{4}{3}\right)$. Il massimo assoluto è 4, il minimo assoluto è 0.

**11.** $F(x,y) = (x-y)^2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2), F(x,y) = 0 \Rightarrow y = x$; la curva di equazione $F(x,y) = 0$ è dunque la retta $y = x$, quindi l'equazione data definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di ogni punto $x_0$. (N.B. applicando il Teorema del Dini si troverebbe che $F_y(x,y) = 0$ in ogni punto della bisettrice).

**12.** La curva di equazione $F(x, y) = 0$ è l'unione delle due rette $x - y = 0$ e $x + y - 2 = 0$, dunque graficamente si vede che l'equazione data definisce implicitamente una e una sola funzione $y = y(x)$ in un intorno di ogni punto $x_0 \neq 1$.

**13.** $F(x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $F(0, y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$. $F_y(0, 0) = 2 \neq 0$, allora in un intorno di $x_0 = 0$ l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = y(x)$ tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = -\dfrac{F_x(0, 0)}{F_y(0, 0)} = -\dfrac{1}{2}$.

**14.** $F(x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, dove $A$ è l'unione del primo e del terzo quadrante di $\mathbb{R}^2$, esclusi gli assi. $F(1, y) = y + \log y - 1 = 0 \Rightarrow \log y = 1 - y$; risolvendo graficamente quest'ultima equazione si trova $y = 1$. $F_y(1, 1) = 2 \neq 0$, allora in un intorno di $x_0 = 1$ l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una e una sola funzione $y = y(x)$ tale che $y(1) = 1$ e $y'(1) = -\dfrac{F_x(1, 1)}{F_y(1, 1)} = -1$.

**15.** $F(1, 1) = 0, F_y(1, 1) = -1 \neq 0, F_x(1, 1) = -5$, $y'(1) = -5$. Derivando due volte la relazione $x^3 + y(x)^3 - 4x^2 y(x) + 2 = 0$, si trova $6x - 8y - 16xy' + 6yy'^2 + (3y^2 - 4x^2)y'' = 0$. Segue che $y''(1) = 288$. La concavità della funzione implicita è quindi verso l'alto. L'equazione della retta tangente è $y = -5x + 6$.

**16.** $F(0, 0) = 0, F_x(0, 0) = 1 \neq 0, F_y(0, 0) = 0$, $x'(0) = 0$. Derivando due volte (rispetto a y) la relazione $y^2 + x(y)^2 + \sin x(y) = 0$, si trova $2 + 2x'^2 + 2xx'' - x'^2 \sin x = 0$. Tenuto conto che $x(0) = x'(0) = 0$, segue che $x''(0) = -2$. Si ha quindi che $y = 0$ è un punto di massimo.