Estremi

1. Determinare gli estremi relativi di $f(x,y) = e^x(x-1)(y-1) + (y-1)^2$.

2. Determinare gli estremi relativi di $f(x,y) = \dfrac{y^2}{4} - (y+1)\cos x$.

3. Determinare gli estremi relativi di $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

4. Sia $f(x,y) = xy(x-1)^2$. a) Determinare gli estremi relativi di f; b) determinare gli estremi assoluti di f in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

5. Determinare le dimensioni di una scatola rettangolare di volume v assegnato, che abbia la superficie minima.

6. Sia $f(x,y) = e^{2x-x^2-y^2}$. a) Determinare gli estremi relativi liberi di f. b) Determinare gli estremi assoluti di f in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$.

7. Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = e^x - \lambda x + y^2$ ha massimo o minimo relativo?

8. Sia $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Calcolare tutte le derivate parziali fino al secondo ordine della funzione $f(x,y) = g(xy)$. Verificare che l'origine è un punto critico per f, qualunque sia g; trovare una condizione sufficiente su g affinché l'origine sia un punto di sella.

9. Sia $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. a) Determinare l'insieme di definizione D di f. b) Determinare le curve di livello di f. c) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie grafico di f nel punto $(1,0,1)$. Qual è la direzione di massima crescita di f nel punto $(1,0)$? d) Mostrare che f non ha estremi locali.

10. Sia $f(x,y) = x^4 - x^2y^2$. a) Trovare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo di f in $\mathbb{R}^2$. b) Dire se f ammette massimo e minimo assoluti in $\mathbb{R}^2$.

11. Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo locale della funzione $f(x,y) = x^3 - xy^2 + y^4$.

12. Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo locale della funzione $f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

13. Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo locale della funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x^2+y^2)$.

14. Sia $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2(x+y)$. Senza ricorrere al calcolo differenziale dire se i punti della circonferenza $x^2+y^2=1$ sono di massimo o di minimo relativo.

15. Detrminare gli estremi assoluti della funzione $f(x,y) = 2xy$ in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$.

16. Determinare la minima distanza della curva di equazione $y = \dfrac{16}{x^2}$ dall'origine.

17. Sia $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - \dfrac{1}{9}y^2} + 2x$. a) Determinare il dominio D di f; b) stabilire se f è differenziabile nei punti interni di D; c) determinare gli estremi assoluti di f in D.

18. Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x,y) = xy$, vincolati alla circonferenza $x^2+y^2=1$.

19. Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x,y) = xy$, vincolati all'ellisse $x^2+4y^2=1$.

20. Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x,y) = x+y$, vincolati al ramo di iperbole $xy=1,\ x>0,\ y>0$.

21. Determinare gli estremi superiore e inferiore della funzione $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, al variare di (x,y) sulla retta di equazione $3x+4y=25$. Verificare che nel punto $(3,4)$ il gradiente di f é perpendicolare alla retta.

22. Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x,y) = 1 - e^{(x-y)^2(x^2+y^2-1)^2}$ sull'insieme $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq y\}$.

23. Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x,y) = 4x(x^2-y^2) - 3x^2+y^2$, vicolati all'iperbole $x^2-y^2 = \dfrac{1}{4}$.

Soluzioni.

1.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x x(y-1) = 0 \\[2em] \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^x(x-1) + 2(y-1) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha come soluzione $x = 0$ oppure $y = 1$. Sostituendo $x = 0$ nella seconda equazione si trova $y = \frac{3}{2}$; sostituendo $y = 1$ si trova $x = 1$. Dunque i punti critici sono: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e $(1, 1)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x(x+1)(y-1)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$. Il determinante della matrice Hessiana è positivo in $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0, \frac{3}{2}\right) > 0$, dunque $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ è un punto di minimo relativo. Il determinante della matrice Hessiana è negativo in $(1, 1)$, dunque $(1, 1)$ è un punto di sella.

2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = (y+1)\sin x = 0 \\[2em] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{2} - \cos x = 0 \end{cases}$$

La funzione è periodica in x, dunque possiamo limitarci a considerare $x \in [0, 2\pi)$. La prima equazione ha come soluzione $y = -1$ oppure $x = 0$ oppure $x = \pi$. Sostituendo $y = -1$ nella seconda equazione si trova $x = \frac{2}{3}\pi, x = \frac{4}{3}\pi$; sostituendo $x = 0$ si trova $y = 2$; sostituendo $x = \pi$ si trova $y = -2$. Dunque i punti critici sono: $\left(\frac{2}{3}\pi, -1\right)$, $\left(\frac{4}{3}\pi, -1\right)$, $(0, 2)$ e $(\pi, -2)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (y+1)\cos x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}$. $\left(\frac{2}{3}\pi, -1\right)$, $\left(\frac{4}{3}\pi, -1\right)$ sono punti di sella, $(\pi, -2)$ e $(0, 2)$ sono punti di minimo relativo.

3. a)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(y - x^2 y) = 0 \\[2em] \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(x - x y^2) = 0 \end{cases}$$

I punti critici sono: $(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1-x^2)(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy(y^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. $(0,0)$ è un punto di sella; $(1,1)$ e $(-1,-1)$ sono punti di massimo relativo; $(1,-1)$ e $(-1,1)$ sono punti di minimo relativo.

4. a)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y(x-1)^2 + 2xy(x-1) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

I punti critici sono: $(0,0)$ e tutti i punti della retta $x = 1$. L'origine è un punto di sella, infatti $f(0,0) = 0$ e la funzione cambia di segno in ogni intorno dell'origine. I punti $(1,y)$ con $y > 0$ sono punti di minimo relativo, infatti $f(1,y) = 0$ e la funzione è positiva in un intorno di tali punti; analogamente si ha che i punti $(1,y)$ con $y < 0$ sono punti di massimo relativo e il punto $(1,0)$ è un punto di sella.

b) D è il triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (0,1)$. All'interno di D non ci sono punti critici di f, alllora gli estremi assoluti, che esistono essendo la funzione continua e D chiuso e limitato, si trovano sulla frontiera di D. Si ha che: $f(x,0) = f(0,y) = 0$; $f(x, 1-x) = x(1-x)^3$. La funzione $g(x) = x(1-x)^3$ ha massimo in $x = \dfrac{1}{4}$ e minimo in $x = 0$ e $x = 1$. Dunque il minimo assoluto di f in D vale 0; il massimo assoluto vale $g\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{27}{256}$.

5. Siano x, y, z le dimensioni della scatola. Si tratta di minimizzare la superficie: $S = 2xz + 2xy + 2yz$, sotto la condizione: $xyz = v$. Sia $f(x,y) = 2x\dfrac{v}{xy} + 2xy + 2y\dfrac{v}{xy}$;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2\dfrac{v}{x^2} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2\dfrac{v}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ha come soluzione: $(x,y) = (\sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v})$. Si verifica che tale punto è un punto di minimo per f, dunque le dimensioni della scatola sono: $x = y = z = \sqrt[3]{v}$.

6. a) Essendo la funzione esponenziale monotona crescente, gli estremi di f si hanno in corrispondenza degli estremi dell'esponente $g(x,y) = 2x - x^2 - y^2$. Si trova che il punto $(1,0)$ è un punto di massimo relativo per g, e dunque per f. b) All'interno del cerchio l'unico eventuale estremo assoluto è il punto $(1,0)$. Sulla frontiera di D la funzione vale $f(x,y) = e^{2x-4}$, $-2 \leq x \leq 2$; dunque $x = 2$ e $x = -2$ sono rispettivamente punti di massimo e minimo per f sulla frontiera di D. Poichè per il teorema di Wierstrass la funzione assume valore massimo e valore minimo in D, confrontando i valori: $f(1,0) = e, f(2,0) = 1, f(-2,0) = e^{-8}$, si deduce che il massimo assoluto vale e e il minimo assoluto vale e^{-8}.

7.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x - \lambda = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda > 0$ il sistema ha la soluzione: $(\log \lambda, 0)$. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x; \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2;$ si verifica che $(\log \lambda, 0)$ è un punto di minimo relativo per f.

8. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yg'(xy); \dfrac{\partial f}{\partial y} = xg'(xy); \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 g''(xy); \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = g'(xy) + xyg''(xy);$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 g''(xy)$. L'origine é un punto critico per f perché le due derivate parziali si annullano nell'origine. Il determinante della matrice Hessiana di f nell'origine vale $-g'(0)^2$, dunque se $g'(0) \neq 0$ l'origine è un punto di sella.

9. a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -|x| < y < |x|\}$. b) Le curve di livello c hanno equazione: $x^2 - y^2 = \dfrac{1}{c^2}$, $c > 0$; sono iperboli equilatere. c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{(x^2 - y^2)^3}}; \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{(x^2 - y^2)^3}}$. Il piano tangente ha equazione: $x + z = 2$. La direzione di massima crescita in $(1,0)$ è quella del gradiente: $\dfrac{(-1,0)}{\sqrt{2}}$. d) Siccome le derivate parziali non si annullano mai in D, la funzione non ha estremi.

10. a) I punti critici sono quelli dell'asse y. Studiamo il segno della funzione: $f(x,y) = x^2(x^2 - y^2) \geq 0, -|x| \leq y \leq |x|$. Quindi l'origine è un punto di sella, mentre gli altri punti dell'asse y sono dei punti di massimo relativo. b) Si ha che: $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x,x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^4 - x^6 = -\infty$. Dunque f non ha né massimo né minimo assoluti in $\mathbb{R}^2$.

11. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y^2 = 0$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y(2y^2 - x)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2x$. I punti critici sono: $(0,0), \left(\dfrac{1}{6}, \pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$. L'origine è un punto di sella; $\left(\dfrac{1}{6}, \pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ sono punti di minimo.

12. L'origine è l'unico punto critico. Si ha che: $f(0,0) = 0, f(x,0) = x^4 \geq 0, f(x,x) = -4x^4 \leq 0$, dunque l'origine è un punto di sella, in quanto in OGNI intorno dell'origine la funzione assume valori positivi e negativi.

13. Per simmetria possiamo limitare lo studio al primo quadrante. I punti critici sono: $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$. Si verifica che: $(0,0)$ è un punto di massimo, $(1,0)$ e $(0,1)$ sono punti di sella, $(1,1)$ è un punto di minimo. Per simmetria si deduce che: $(-1,0)$ e $(0,-1)$ sono punti di sella, $(-1,1), (1,-1), (-1,-1)$ sono punti di minimo.

14. La funzione si annulla nei punti della circonferenza. Studiando il segno della funzione si deduce che i punti della circonferenza sopra la retta $y = -x$ sono punti di minimo, quelli sotto la retta sono punti di massimo, e i due punti di intersezione della retta con la circonferenza sono punti di sella.

15. Per il teorema di Weierstrass f ha massimo e minimo assoluti in D. All'interno di D l'unico punto critico è l'origine, ma poiché $f(0,0) = 0$ e la funzione cambia di segno in ogni intorno dell'origine, l'origine non è un estremo. Per valutare la funzione sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$, scriviamola in forma parametrica: $x = 2\cos t, y = 2\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Dunque la restrizione di f sulla circonferenza vale: $f(2\cos t, 2\sin t) = 8\cos t \sin t = 4\sin(2t)$. Tale funzione ha come massimo 4, assunto per $t = \dfrac{\pi}{4}, t = \dfrac{5}{4}\pi$, e minimo -4, assunto per $t = \dfrac{3}{4}\pi, t = \dfrac{7}{4}\pi$. Il massimo di f vale quindi 4 ed è assunto in $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$; il minimo vale -4 ed è assunto in $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$.

16. Il quadrato della distanza dell'origine dal generico punto della curva: $(x, \dfrac{16}{x^2})$, vale $x^2 + \dfrac{16^2}{x^4}$ Si tratta allora di trovare il minimo della funzione $f(x) =$

$x^2 + \dfrac{16^2}{x^4}$. La derivata di f si annulla in $x = \pm\sqrt[6]{\dfrac{4^5}{2}} = \pm 2\sqrt{2}$. La distanza minima vale $d = 2\sqrt{3}$.

17. a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{1}{9}y^2 \leq 1\}$; b) f è differenziabile nei punti interni di D poiché entrambe le derivate parziali sono definite e continue all'interno di D; c) l'unico punto stazionario interno a D è $A = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$; si ha che $f(A) = \sqrt{5}$. Sul bordo di D la funzione vale $2x$; dunque il minimo assoluto vale -2 ed è assunto sul bordo, nel punto $(-1, 0)$, e il massimo assoluto vale $\sqrt{5}$ ed è assunto in A.

18. Ponendo $x = \cos t$, $y = \sin t$, si trova che la funzione, ristretta sulla circonferenza, vale: $f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t = \dfrac{1}{2}\sin(2t)$; il massimo è quindi $\dfrac{1}{2}$, ed è assunto nei punti $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; il minimo è $-\dfrac{1}{2}$, ed è assunto nei punti $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

19. Ponendo $x = \cos t$, $y = \dfrac{1}{2}\sin t$, si trova che la funzione, ristretta sull'ellisse, vale: $f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t = \dfrac{1}{2}\sin(2t)$; il massimo è quindi $\dfrac{1}{4}$, ed è assunto nei punti $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$; il minimo è $-\dfrac{1}{4}$, ed è assunto nei punti $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \mp\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

20. La restrizione della funzione all'iperbole è $f(x, \dfrac{1}{x}) = x + \dfrac{1}{x}$, che per $x > 0$ non ha massimo e ha minimo 1, assunto in $(1, 1)$.

21. La restrizione della funzione alla retta è $f(x, \dfrac{25 - 3x}{4}) = e^{-x^2 - \left(\frac{25-3x}{4}\right)^2}$; tale funzione ha massimo in $x = 3$ e il massimo vale e^{-25}; il minimo non esiste, l'estremo inferiore è zero. Il gradiente nel punto $(3, 4)$ è $-2e^{-25}(3, 4)$; tale vettore appartiene alla retta $y = \dfrac{4}{3}x$, che è ortogonale alla retta $3x + 4y = 25$.

22. La funzione è sempre negativa, nei punti di frontiera di D si annulla, quindi i punti di frontiera di D sono punti di massimo assoluti, e il massimo assoluto è zero. All'interno di D, annullando le derivate parziali, si trova come unico punto stazionario il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ che risulta un punto di minimo assoluto.

23. La funzione ha un massimo che vale $-\frac{1}{4}$, ed è assunto in $(\frac{1}{2}, 0)$.