Limiti e continuità

1. Calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{y}$

2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$

3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log\sqrt{x^2+y^2}$

4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2\sin(\pi x)}{(x-2)^2+(y-1)^2}$

5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(xy)}{\sqrt{x^2-y^2}}$

6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x\sin y}{\sin xy}$

7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2\log x}{x^2-2x+1+y^2}$

2. Si mostri che non esistono i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x}$

3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\log(x+y)}{x}$

4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xe^{\frac{x}{y}}$

3. Calcolare il limite di $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ quando $(x,y)\to(0,0)$ lungo le rette per l'origine; dimostrare che non esiste $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

4. Stabilire dove è continua la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

5. Stabilire dove è continua la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

6. Siano $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ e $g(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Si determini il loro insieme di definizione e si stabilisca se possono essere estese con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$.

7. Sia $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^2}{xy}$. a) Si determini l' insieme di definizione D di f; b) si calcoli il $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; c) si stabilisca se f può essere estesa con continuità a $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

8. Sia $f(x,y)=e^{\frac{x^2}{y}}$. a) Si determini l' insieme di definizione D di f; b) si calcoli il $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; c) si stabilisca se f può essere estesa con continuità a $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

9. Sia $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{y}$. a) Si determini l' insieme di definizione D di f; b) si stabilisca se f può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$.

Soluzioni.

1.

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}x=1\cdot 0=0$

2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0}2\rho\cos^2\theta\sin\theta=0$, qualunque sia θ.

3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log\sqrt{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \log\rho = 0$, qualunque sia θ.

4) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{(y-1)^2\sin(\pi x)}{(x-2)^2+(y-1)^2} = \lim_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^2\sin^2\theta\sin(2\pi+\pi\rho\cos\theta)}{\rho^2} =$
$\lim_{\rho\to 0} \sin^2\theta\sin(\pi\rho\cos\theta) = 0$, qualunque sia θ (si pone $x = 2+\rho\cos\theta, y = 1+\rho\sin\theta$).

5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\log(xy)}{\sqrt{x^2-y^2}} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$

6) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x\sin y}{\sin xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x}{x}\dfrac{\sin y}{y}\dfrac{xy}{\sin(xy)} = 1$

7) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0}\sqrt{\rho|\cos\theta|}\sin\dfrac{1}{\rho^2} = 0$, qualunque sia θ, infatti si tratta del prodotto di una funzione infinitesima per una limitata.

8) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y^2\log x}{x^2-2x+1+y^2} = \lim_{\rho\to 0}\dfrac{\rho^2\log(1+\rho\cos\theta)}{\rho^2} = 0$, qualunque sia θ (si pone $x = 1+\rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, da cui $x^2-2x+1+y^2 = (x-1)^2+y^2 = \rho^2$).

2.

1) $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0; \lim_{x\to 0} f(x,x) = \dfrac{1}{2}$. Il limite non esiste perché lungo le rette $y = 0$ e $y = x$ la funzione ha limiti diversi.

2) $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} x = 0;\ \lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0}\dfrac{y^4+y^2}{y^2} = 1$. Il limite non esiste perché lungo la retta $y = 0$ e la parabola $x = y^2$ la funzione ha limiti diversi.

3) $\lim_{x\to 0} f(x,x+1) = \lim_{x\to 0}\dfrac{\log(2x+1)}{x} = 2$, mentre $\lim_{x\to 0} f(x,1) = \lim_{x\to 0}\dfrac{\log(x+1)}{x} = 1$

4) $\lim_{x\to 0^+} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$, mentre $\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$.

3. $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\dfrac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{mx^3}{m^2x^2} = 0$; $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$; $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$. Calcoliamo ora il limite di f quando $(x,y)\to(0,0)$ lungo la parabola $y = x^2$: $\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \dfrac{1}{2}$; dunque il limite non esiste perché lungo le curve $y = mx$ e $y = x^2$ la funzione ha limiti diversi.

4. La funzione è continua sicuramente per ogni $(x,y)\neq(0,0)$ infatti è combinazione di funzioni continue. Si ha che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0}\cos\theta\sin(\rho\sin\theta) = 0$, qualunque sia θ; dunque la funzione è continua anche in $(0,0)$.

5. Si ha che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste, infatti $\lim_{x,\to 0} f(x,x) = 2$, mentre $\lim_{x,\to 0} f(x,-x) = 0$; dunque la funzione è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

6. Entrambe le funzini sono definite in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si ha che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \dfrac{\sin\rho^2}{\rho^2} = 1$, quindi f può essere estesa con continuità in $(0,0)$ ponendo $f(0,0) = 1$; invece il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ non esiste, infatti $\lim_{x\to 0} g(x,0) = 1$, mentre $\lim_{y\to 0} g(0,y) = -1$, quindi g non può essere estesa con continuità in $(0,0)$.

7. a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$; b) non esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, infatti $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$ mentre $\lim_{x\to 0} f(x,-x) = -1$; c) per il punto precedente, f non può essere estesa con continuità in $(0,0)$. Consideriamo il generico punto dell'asse x: $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$; si ha che $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = \dfrac{x_0^3}{0} = \infty$, dunque f non può essere estesa con continuità ai punti dell'asse x. Analogamente si mostra che f non può essere estesa con continuità ai punti dell'asse y.

8. a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$; b) non esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, infatti $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$ mentre $\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = e$; c) per il punto precedente, f non può essere estesa con continuità in $(0,0)$. Consideriamo il generico punto dell'asse x: $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$; si ha che $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = e^{\frac{x_0^2}{0}} = \pm\infty$, dunque f non può essere estesa con continuità ai punti dell'asse x.

9. a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$; b) Consideriamo il generico punto dell'asse x: $(x_0, 0)$; si ha che $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} x = x_0$, (N.B. se $(x,y) \to (x_0, 0)$, allora $xy \to 0$) dunque f può essere estesa con continuità ai punti dell'asse x ponendo $f(x,0) = x$.