Funzioni di due variabili

1. Determinare l'insieme di definizione D delle seguenti funzioni e stabilire se D è aperto, chiuso, né aperto né chiuso, limitato, illimitato, connesso:

1) $f(x,y) = \dfrac{\log(x\sqrt{y-x})}{xy-1}$

2) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{2y - x(x-|x|)}}{\log(2-x^2-y^2)}$

3) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{(x^2-2x-y)(x^2-2x+y)}}{(x-\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2} + \log\dfrac{x+1}{2-x}$

4) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2+y-1}{x^2-1}}$

5) $f(x,y) = \sqrt{-xy} + \arcsin(x^2+y^2)$

2. Determinare l'insieme di definizione D delle seguenti funzioni e stabilire se D è aperto, chiuso, né aperto né chiuso, limitato, illimitato, connesso; studiare inoltre il segno di f:

1) $f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{1-x^2-y^2}}$

2) $f(x,y) = \dfrac{x\log(1+x^2-y)}{y}$

3) $f(x,y) = \log\sin(x^2+y^2)$

4) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{2x-y+2}$

3. Determinare l'insieme di definizione D delle seguenti funzioni e indicarne la frontiera:

1) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{\log(x^2-y)}}{\arcsin y}$

2) $f(x,y) = \sqrt{|x|(x^2+y^2-4)}$

4. Determinare le linee di livello delle seguenti funzioni:

1) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

2) $f(x,y) = xy$

3) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

4) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$

5. Sia $f(x,y) = \sqrt{9-2x^2-6y^2}$, si determini il dominio D e si disegnino le linee di livello 0,1 e 3. Si determini la curva di livello passante per il punto $P=(1,1)$.

6. Determinare l'insieme di definizione D della funzione $f(x,y,z) = \log(x^2+y^2)+z$

7. Determinare le superfici di livello delle seguenti funzioni

1) $f(x,y,z) = x+3y+5z$

2) $f(x,y,z) = x^2+3y^2+5z^2$

3) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Soluzioni.

1.

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x, x > 0, y \neq \frac{1}{x}\}$; D è aperto, illimitato, non connesso.

2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 2, x^2+y^2 \neq 1, y \geq 0 \text{ per } x \geq 0, y \geq x^2 \text{ per } x < 0\}$; D è né aperto né chiuso, limitato, non connesso.

3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 2, (x,y) \neq \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), -|x^2-2x| \leq y \leq |x^2-2x|\}$; D è né aperto né chiuso, limitato, connesso.

4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1-x^2 \text{ per } |x| > 1, y \leq 1-x^2 \text{ per } -1 < x < 1, x \neq \pm 1\}$; D è né aperto né chiuso, illimitato, non connesso.

5) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, xy < 0\}$; D è chiuso, limitato, connesso. N.B. $xy \leq 0$ significa che il punto (x,y) appartiene al secondo o al quarto quadrante.

2.

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, 2x^2-y^2 \geq 1\}$; D è chiuso, limitato, connesso; $f(x,y) \geq 0\ \forall (x,y) \in D$.

2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1 + x^2, y \neq 0$; D è aperto, illimitato, non connesso; $f(x,y) \geq 0$: sempre nel III quadrante, mai nel IV quadrante, se $y \leq x^2$ nel I quadrante, se $y \geq x^2$ nel II quadrante.

3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2k\pi < x^2 + y^2 < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; D è aperto, illimitato, non connesso; $f(x,y) > 0$: mai, $f(x,y) = 0$ sulle circonferenze $x^2 + y^2 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

4) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 1 \geq 0, 2x - y + 2 \neq 0\}$; D è né aperto né chiuso, illimitato, non connesso; $f(x,y) \geq 0$ se $y < 2x + 2$ o se $x + y + 1 = 0$.

3.

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 - 1, y \neq 0, -1 \leq y \leq 1\}$; la frontiera di D è costituita dalle rette: $y = -1; y = 1$ con $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$; $y = 0$ con $x \leq -1$ o $x \geq 1$; e dal ramo di parabola $y = x^2 - 1$ con $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

2) $D = A \cup B$, dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4 = 0\}$; la frontiera di D è costituita dal segmento di quazione $x = 0$ con $-2 \leq y \leq 2$ e dalla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$.

4.

1) $x^2 + y^2 = 1 - c, c \leq 1$: circonferenze di centro l'origine e raggio $\sqrt{1-c}$.

2) $xy = c$: le linee di livello zero sono gli assi x e y, le linee di livello $c > 0$ sono le iperboli $xy = c$ del I e III quadrante, le linee di livello $c < 0$ sono le iperboli $xy = c$ del II e IV quadrante.

3) $x^2 + y^2 = \log \dfrac{1}{c}, 0 < c \leq 1$: la linea di livello 1 è l'origine, le altre linee di livello sono circonferenze di centro l'origine e raggio $\sqrt{\log \dfrac{1}{c}}$.

4) $y = -x + \dfrac{1}{c}, c \neq 0$: rette parallele alla bisettrice $y = -x$ esclusa la bisettrice.

5. D è l'ellisse $2x^2 + 6y^2 \leq 9$; la linea di livello 0 è l'ellisse di equazione $2x^2 + 6y^2 = 9$, la curva di livello 1 è l'ellisse di equazione $2x^2 + 6y^2 = 8$, la curva di livello 3 è l'origine. Poiché $f(1,1) = 1$, la curva cercata è la curva di livello 1, determinata in precedenza.

6. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0)\}$, cioè D è $\mathbb{R}^3$ eccetto l'asse z; D è aperto, illimitato, connesso.

7.

1) Piani di equazione: $x + 3y + 5z = c$

2) Ellissoidi di equazione $x^2 + 3y^2 + 5z^2 = c, c \geq 0$

3) Sfere di centro l'origine e raggio $\frac{1}{c}, c > 0$.