Serie di Fourier

1. Sia $f(x) = -2 + 3\sin 7x - \cos x + 2\sin x$. Indicare i coefficienti di Fourier a_n, b_n di f e l'espressione dell'n-esima armonia (termine generale della serie di Fourier).

2. Trovare i valori di a_0 e b_1 nello sviluppo in serie di Fourier della funzione $y = 1 + x^2$ nell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

3. Trovare i valori di a_0, a_1, b_1, b_2 nello sviluppo in serie di Fourier della funzione $y = \sin^3 x$ nell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

4. Sia f la funzione dispari periodica di periodo 2π tale che

$$f(x) = \begin{cases} -\log(1+x) & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

a) Tracciare il grafico di f nell'intervallo $(-4\pi, 4\pi)$. b) Scrivere, senza calcolarli, l'espressione dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di f. c) Dire in quali punti dell'intervallo $[0, 2\pi]$ la serie di Fourier di f converge a $f(x)$.

5. Sia f la funzione pari periodica di periodo 2π tale che $f(x) = x$, $0 < x \le \pi$. a) Tracciare il grafico di f nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$. b) Calcolare i seguenti coefficienti di Fourier di f : a_0, a_1, a_2 e tutti i coefficienti b_n.

6. Sia f la funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x) = x$ se $x \in (-\pi, \pi)$. a) Tracciare il grafico di f nell'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$. b) Calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di f. c) Dire in quali punti dell'intervallo $[0, 2\pi]$ la serie di Fourier di f converge a $f(x)$. d) Calcolare la somma della serie in $x = \pi, x = 0, x = \dfrac{2}{3}\pi$.

7. Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione pari, 2π-periodica, definita in $[0, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -1 & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

Dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

8. Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione pari, 2π-periodica, definita in $[-\pi, \pi]$ da $f(x) = x^2$. Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

9. Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione di periodo 6, definita in $[-3, 3]$ da $f(x) = |x|$. Determinare: a) i valori di x per i quali la serie di Fourier converge ad f; b) il coefficiente a_0 dello sviluppo di Fourier; c) i coefficienti a_1 e b_1 dello sviluppo di Fourier; d) i coefficienti $a_n, b_n, n \geq 1$ dello sviluppo di Fourier.

10. Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione dispari di periodo 4, definita in $[0, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Determinare: a) i valori di x per i quali la serie di Fourier converge ad f; b) il coefficiente a_0 dello sviluppo di Fourier; c) i coefficienti a_1 e b_1 dello sviluppo di Fourier; d) i coefficienti $a_n, b_n, n \geq 1$ dello sviluppo di Fourier.

Soluzioni.

1. Si ha che: $a_0 = -4, a_1 = -1, b_1 = 2, b_7 = 3$, gli altri coefficienti sono nulli. La prima armonica è: $-\cos x + 2\sin x$; la settima armonica è: $3\sin 7x$; le altre sono nulle.

2. f è pari, quindi $b_1 = 0$; $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (1 + x^2)\, dx = 2 + \frac{2}{3}\pi^2$.

3. f è dispari, quindi $a_0 = a_1 = 0$;
$b_1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx = \frac{2}{\pi}\left(-\cos x \sin^3 x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 3\cos^2 x \sin^2 x\, dx\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3(1-\sin^2 x)\sin^2 x\, dx = \frac{3}{4}$; $b_2 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x \sin 2x\, dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^4 x \cos x\, dx = 0$.

4. b) Poiché f è dispari, $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$. $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} - \log(1 + x) \sin nx\, dx$. c) Dove f è continua, cioé in $[0, 2\pi]$ esclusi i punti $x = \dfrac{\pi}{2}$ o $x = \dfrac{3}{2}\pi$.

5. b) Poiché f è pari, $b_n = 0$ per ogni $n \geq 0$; $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x\,dx = \pi$; $a_1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx = -\dfrac{4}{\pi}$; $a_2 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x\cos 2x\,dx = 0$.

6. b) Poiché f è dispari, $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$. $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \dfrac{2}{n}(-1)^{n+1}$. c) Dove f è continua, cioé in $[0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$. d) In $x = \pi$ la somma della serie vale $\dfrac{-\pi+\pi}{2} = 0$; in $x = 0$, vale $f(0) = 0$; in $x = \dfrac{2}{3}\pi$, vale $\dfrac{2}{3}\pi$.

7. Poiché f è pari, $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx = 0$; $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\,dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos nx\,dx\right)$; $a_{2k} = 0, a_{2k+1} = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$. La serie di Fourier di f è: $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$. Si ha che $f(0) = 1 = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$.

8. Poiché f è pari, $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2\,dx = \dfrac{2}{3}\pi^2$; $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \dfrac{4}{n^2}(-1)^n$. La serie di Fourier di f è: $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$. Si ha che $f(\pi) = \pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

9. a) Per ogni $x \in \mathbb{R}$; b) $a_0 = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{-3}^{3}|x|\,dx = 3$; c) $a_1 = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{-3}^{3}|x|\cos(\frac{\pi}{3}x)\,dx = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^3 x\cos(\frac{\pi}{3}x)\,dx = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{\pi}x\sin(\frac{\pi}{3}x)\Big|_0^3 - \dfrac{3}{\pi}\displaystyle\int_0^3 \sin(\frac{\pi}{3}x)\,dx\right) = -\dfrac{12}{\pi^2}$, $b_1 = 0$; d) $a_n = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_0^3 x\cos(\frac{n\pi}{3}x)\,dx = \dfrac{6}{\pi^2 n^2}[(-1)^n - 1]$, $a_{2k} = 0, a_{2k+1} = -\dfrac{12}{\pi^2(2k+1)^2}$, $b_n = 0$. $f(x) \sim \dfrac{3}{2} - \dfrac{12}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0} +\infty\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{3}x\right)$.

10. a) Per ogni $x \in \mathbb{R}$; b) $a_0 = 0$; c) $a_1 = 0, b_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx = \displaystyle\int_0^2 f(x)\sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx = \int_0^1 x\sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx = \dfrac{8}{\pi^2}$, ; d) $a_n =$

$0, b_n = \int_0^2 f(x)\sin(\frac{n\pi}{2}x)\,dx = \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$, $b_{2k} = 0, b_{2k+1} = \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}(-1)^k$,
$b_n = 0$. $f(x) \sim \sum_{k=0} +\infty \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}(-1)^k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right)$.