Serie

**1.** Studiare il carattere delle seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{n+e^n}$

2) $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{n}{n-3}\right)^{n^2}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{e^{\frac{n}{2}}}$

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}\log n}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+\sin n}{4}\right)^{n}$

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\log\lambda|^n}{n},\ \lambda>0$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\sin\frac{1}{n})$

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\frac{\sin^2 n}{n^2}$

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n},\ \lambda\in\mathbb{R}$

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$

**2.** Stabilire per quali valori del parametro reale $\lambda$ converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda^2-1)^n$. Per i valori trovati calcolarne la somma.

**3.** Scrivere la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda^{n+1}-\lambda^n)$. Determinarne il carattere e la somma.

**4.** Stabilire, al variare del parametro reale positivo $\lambda$, il carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2\lambda)^n+n^\lambda}$.

**5.** Stabilire per quali valori del parametro reale $a$ converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1-\sqrt{n^2+2n})^a$.

**6.** Stabilire il carattere di $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\log n}{n^2}$.

**7.** Stabilire, al variare del parametro reale $a$, il carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!n^a}{n^n}$.

**8.** Stabilire il carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sin n+\cos n}{2}\right)^n$.

**9.** Stabilire, al variare del parametro reale $\lambda$, il carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+\log n}{n^2+\lambda n}\sin n$.

**10.** Stabilire il carattere di $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n}$.

**11.** Stabilire il carattere di $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}n)}{n}$.

**12.** Dopo aver stabilito la convergenza delle seguenti serie, calcolarne la somma:

1) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}$

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{e^{2n}}$

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3+3n^2+2n}$

**Traccia delle soluzioni.**

**1.**

1) Serie a termini positivi, $\frac{e^{-n}}{n+e^n} \sim \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$, converge.

2) Serie a termini positivi, $\left(\frac{n}{n-3}\right)^{n^2} \sim e^{\frac{3n^2}{n-3}} \nrightarrow 0$, diverge.

3) Serie a termini positivi, $\frac{n2^n}{e^{\frac{n}{2}}} = n\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right)^n \nrightarrow 0$, diverge.

4) Serie e termini positivi, $\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}\log n} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\log n} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ definitivamente ($\forall n \geq 3$), converge.

5) Serie a termini positivi, $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$, converge.

6) Serie a termini positivi, $\left(\frac{2+\sin n}{4}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$, converge.

7) Serie a termini positivi, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, diverge.

8) Serie a termini positivi, $\sqrt[n]{\frac{|\log\lambda|^n}{n}} = \frac{|\log\lambda|}{\sqrt[n]{n}} \to |\log\lambda|$, quindi se $\frac{1}{e} < \lambda < e$ converge per il criterio della radice; se $\lambda = e, -\frac{1}{e}$ diverge (è l'armonica), negli altri casi la serie diverge per il criterio della radice.

9) Serie a termini positivi (N.B. $0 < \sin\frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \sin(\sin\frac{1}{n}) > 0$), $\sin(\sin\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, diverge.

10) Serie a termini positivi, $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{e}$, la serie converge per il criterio del rapporto.

11) Serie a termini di segno variabile, $\left|(-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, converge assolutamente, quindi anche semplicemente.

12) Serie a termini di segno variabile, $\dfrac{\lambda^n}{n} \to 0$ se e solo se $|\lambda| \leq 1$; $\sqrt[n]{\left|\dfrac{\lambda^n}{n}\right|} = \dfrac{|\lambda|}{\sqrt[n]{n}} \to |\lambda|$, dunque, per il criterio della radice, se $|\lambda| < 1$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente; se $\lambda = 1$ la serie diverge (è l'armonica), se $\lambda = -1$ la serie converge per il criterio di Leibniz; se $|\lambda| > 1$ la serie non converge perché il termine generale non tende a zero.

13) Serie a termini di segno variabile, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, converge per il criterio di Leibniz.

**2.** Serie geometrica, converge se $|\lambda^2 - 1| < 1$, cioé per $-\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2}, \lambda \neq 0$ e ha per somma $\dfrac{1}{2-\lambda^2}$.

**3.** Serie telescopica, $S_n = \lambda^{n+1} - 1$; la serie converge se $-1 < \lambda \leq 1$ e ha per somma -1 se $\lambda \neq 1$, 0 se $\lambda = 1$; diverge se $\lambda > 1$; è irregolare se $\lambda \leq -1$.

**4.** Serie a termini positivi, se $\lambda > \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{(2\lambda)^n + n^\lambda} \sim \dfrac{1}{(2\lambda)^n}$, converge; se $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{(2\lambda)^n + n^\lambda} \sim \dfrac{1}{n^\lambda}$, diverge (serie armonica generalizzata) .

**5.** Serie a termini positivi: $n+1 \geq \sqrt{n^2+2n}$. $n+1-\sqrt{n^2+2n} = \dfrac{(n+1)^2 - (n^2+2n)}{n+1+\sqrt{n^2+2n}} \sim \dfrac{1}{2n}$, la serie quindi converge se $a > 1$.

**6.** Serie a termini positivi, poiché $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{n}\log n}{n^2} = 0$, definitivamente si ha che $\dfrac{n\sqrt{n}\log n}{n^2} \leq 1$, cioè $\dfrac{\log n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, la serie allora converge per il criterio del confronto.

**7.** Serie a termini positivi, $\dfrac{(n+1)!(n+1)^a}{(n+1)^{n+1}} : \dfrac{n!n^a}{n^n} = \dfrac{(n+1)^a n^n}{(n+1)^n n^a} = \dfrac{(1+\frac{1}{n})^a}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \dfrac{1}{e}$, la serie converge per ogni valore di $a$, per il criterio del rapporto.

**8.** Serie a termini di segno variabile, consideriamo la funzione $f(x) = \sin x + \cos x$, derivando si trova che il massimo di $f(x)$ vale $\sqrt{2}$; allora $\left|\left(\frac{\sin n + \cos n}{2}\right)^n\right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, che è il termine generale di una serie geometrica convergente. La serie data converge assolutamente, per il teorema del confronto, e dunque anche semplicemente.

**9.** Serie a termini di segno variabile, $\left|\frac{\sqrt{n} + \log n}{n^2 + \lambda n} \sin n\right| \leq \left|\frac{\sqrt{n} + \log n}{n^2 + \lambda n}\right| \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, converge assolutamente, quindi anche semplicemente per ogni $\lambda$.

**10.** Serie a termini di segno variabile. La serie diverge assolutamente $\left(\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n} \text{ se } n \geq 3\right)$; per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz, $\frac{\log n}{n}$ è definitivamente decrescente, infatti la funzione $y = \frac{\log x}{x}$ ha derivata negativa per ogni $x > e$, quindi la serie converge semplicemente.

**11.** Serie a termini di segno variabile. Se $n$ è pari, $n = 2k$, $\cos \frac{\pi}{2} n = \cos k\pi = (-1)^k$; se $n$ è dispari $\cos \frac{\pi}{2} n = 0$. Dunque $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} n}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k}$; la serie converge per il criterio di Leibniz.

**12.** 1) Serie geometrica, $= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n = \frac{4}{5}$

2) Serie geometrica, $= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

3) Serie geometrica, $= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{e^2}\right)^n = \frac{e^2}{e^2 - 2}$

4) serie telescopica, $a_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, la successione delle somme parziali è $S_n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{12}) + (\frac{1}{12} - \frac{1}{20}) + ... + (\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$; la serie converge a $\frac{1}{2}$