Equazioni differenziali del I ordine

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e stabilire il più ampio intervallo in cui è definita la soluzione.

2. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y' = (1-x)(1-y)$.

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} yy' = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

e stabilire il più ampio intervallo in cui è definita la soluzione.

4. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y' + \dfrac{1}{xy} = 0$.

5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e stabilire il più ampio intervallo in cui è definita la soluzione.

6. Risolvere le seguente equazione differenziale: $y' = ay + b$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pensandola sia come equazione a variabili separabili, sia come equazione lineare.

7. Sia $T(t)$ la temperatura di un corpo ed E la temperatura dell'ambiente esterno. La temperatura del corpo si evolverà in base alla legge $T'(t) = k(E - T(t))$, con k costante positiva. Risolvere l'equazione differenziale con la condizione iniziale $T(0) = T_0$. Cosa succede per tempi lunghi?

8. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(1+y)^2}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e stabilire il più ampio intervalo in cui è definita la soluzione.

9. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + 10y = e^{-10x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

10. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + y = e^{2x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

11. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x} y = 2 \arctan x \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

e stabilire il più ampio intervalo in cui è definita la soluzione.

12. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

13. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{x+1}{x} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

e stabilire il più ampio intervallo in cui è definita la soluzione.

14. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y' + y \cot x - 2 \cos x = 0$ nell'intervallo $(0, \pi)$.

15. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y' = 2xy - 2x^3$.

16. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2x}{1+x^2}y + \dfrac{1}{x(1+x^2)} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

e stabilire il più ampio intervallo in cui è definita la soluzione.

17. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y' + y \sin x = \sin 2x$.

18. a) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y' + \dfrac{2}{x}y = 2x + 1$ per $x > 0$. b) Determinare la soluzione che si mantiene limitata per $x \to 0^+$. c) Determinare la soluzione che soddisfa la condizione: $y(1) = 0$.

19. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + 3x^2y^4 = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

20. Determinare le curve $y = f(x)$ la cui retta tangente nel punto $(x, f(x))$ incontra l'asse x nel punto $(-x, 0)$.

21. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x}y = x^3 \\ y(1) = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

e stabilire il più ampio intervallo in cui è definita la soluzione.

22. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $y' = -\dfrac{2}{x}y + \dfrac{\sin 4x}{x^2}$.

23. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y \tan x + 1 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

e stabilire il più ampio intervallo in cui è definita la soluzione.

24. Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^y - e^x \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

scrivere lo sviluppo di Taylor della soluzione arrestato al terz' ordine, e disegnare il grafico locale della soluzione in un intorno di $x = 0$.

25. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale: $e^{x+y}y' + x = 0$.

26. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\log y} \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

stabilire il più ampio intervallo in cui è definita la soluzione e disegnare un grafico locale della soluzione in un intorno di $x = 0$.

27. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$, e: a) trovare la soluzione $y_1(x)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} y_1(x)$ sia finito; b) trovare la soluzione $y_2(x)$ tale che $y_2(1) = 0$, disegnare un grafico di y_2 in un intorno destro di $x = 0$ e stabilire il suo comportamento asintotico per $x \to +\infty$.

28. Data l'equazione differenziale $y' = -y + f(x)$, determinare $f(x)$ in modo che per $x > 0$, $y = x^{-\frac{3}{2}}$ sia soluzione. Scrivere l'integrale generale.

29. Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -x \arctan y \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della soluzione nel punto $(1, 1)$ e si tracci un grafico della soluzione in un intorno di tale punto.

30. Si determinino le curve $y = y(x)$ tali che il segmento di tangente che unisce il punto P di tangenza al punto T di intersezione con l'asse x uguaglia il segmento che unisce P all'origine.

31. Trovare l'equazione differenziale che ha come integrale generale la famiglia di funzioni definite implicitamente dall'equazione: $cx - xy = c$. (allievi gestionali)

32. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y' - 2xy - y^2 = 0 \\ y(7) = -7, \end{cases}$$

operando la sostituzione $y(x) = xz(x)$.

33. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right) \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Soluzioni.

1. $y = \dfrac{1}{1-x}$, $(-\infty, 1)$.

2. $y = ce^{\frac{x^2}{2}-x} + 1, c \in \mathbb{R}$.

3. $y = \sqrt{2(x+2)}$, $(-2, +\infty)$.

4. $y = \pm\sqrt{\log \dfrac{1}{x^2} + c}$.

5. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$, $(-1, 1)$.

6. $y = -\dfrac{b}{a} + ce^{ax},\ c \in \mathbb{R}$.

7. (vedi esercizio 6) $T = (T_o - E)e^{-kt} + E$, $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = E$.

8. $y = \dfrac{3}{1 - 3\log x} - 1$, $(0, \sqrt[3]{e})$.

9. $y = xe^{-10x}$.

10. $y = \frac{1}{3}(e^{2x} - e^{3-x})$.

11. $y = x \arctan x + \frac{1}{x} \arctan x + \frac{1}{x}(4 - \frac{\pi}{2}) - 1$, $(0, +\infty)$.

12. $y = 2[-\cos x + \log(1 + \cos x) + 1 - \log 2]$.

13. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2x} + 1$, $(-\infty, 0)$.

14. $y = \sin x + \frac{c}{\sin x}$.

15. $y = 1 + x^2 + ce^{x^2}$.

16. $y = \frac{\log(-x)}{1 + x^2}$, $(-\infty, 0)$.

17. $y = 2 \cos x + 2 + ce^{\cos x}$.

18. a) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{c}{x^2}$. b) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$. c) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{6x^2}$.

19. $y = 0$.

20. La curva cercata risolve l'equazione differenziale: $\frac{f'(x)x - f(x)}{f'(x)} = -x$, cioé: $2y'x - y = 0$. L'integrale generale è: $y = \pm\sqrt{c|x|}$, $c > 0$.

21. $y = \frac{1}{5}x^4$, $(0, +\infty)$.

22. $y = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x + c\right)$.

23. $y = \tan x - \frac{1}{\cos x}$, $\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

24. $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$. La soluzione passa per l'origine, è tangente all'asse x e ha la concavità rivolta verso il basso.

25. L'equazione diventa: $e^y y' = -\frac{x}{e^x}$, l'integrale generale è $y = \log[e^{-x}(x+1)+c]$.

26. $y = e^{\sqrt{2x+\log^2 2}}$, $(-\frac{1}{2}\log^2 2, +\infty)$. Si ha che $y'(0) = \frac{2}{\log 2} > 0$; derivando l'equazione si trova $y''(0) = 2\frac{\log 2 - 1}{\log^3 2} < 0$. La soluzione passa per $(0,2)$, è tangente alla retta $y = 2 + \frac{2}{\log 2}x$, e ha la concavità rivolta verso il basso.

27. $y = -xe^{\frac{1}{x}} + cx,\ c \in \mathbb{R}$. a) $y_1 = -xe^{\frac{1}{x}} + x$; b) $y_2 = -xe^{\frac{1}{x}} + ex,\ y_2 \sim x(e-1)$ per $x \to +\infty$.

28. $f(x) = \frac{2x-3}{x^2\sqrt{x}},\ y = x^{-\frac{3}{2}} + ce^{-x}$.

29. $y'(1) = -\frac{\pi}{4}$, retta tangente: $y = -\frac{\pi}{4}(x-1)+1$; $y'' = -\arctan y - \frac{y'x}{1+y^2}$, $y''(1) = -\frac{\pi}{8} < 0$, dunque la concavità è rivolta verso il basso.

30. $P = (x,y),\ T = (x - \frac{y}{y'}, 0)$. $\overline{OP}^2 = \overline{PT}^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y'^2}$, e cioé $\frac{y'}{y} = \pm\frac{1}{x}$, da cui $y = cx$, o $y = \frac{c}{x},\ c \in \mathbb{R}$.

31. Derivando rispetto a x l'equazione (*) $cx - xy(x) \equiv c$, si trova: $(**)\ c - y - xy' = 0$. Da (*) si trova $c = \frac{xy}{x-1}$, sostituendo il valore di c nell'equazione $(**)$, si trova l'equazione differenziale: $y - y'(x^2 - x) = 0$.

32. Poniamo $y(x) = xz(x)$, si ha che $y'(x) = z(x) + xz'(x)$, sostituendo nell'equazione si trova la seguente equazione nella funzione incognita $z(x)$: $x^3 z' = x^2(z + z^2)$. Si tratta di un'equazione a variabili separabili, le rette di equazioni $z = 0$ e $z = -1$ sono soluzioni, in corrispondenza di $z = -1$ si ottiene $y = -x$ che risolve il problema di Cauchy dato, non è quindi necessario trovare le altre soluzioni dell'equazione.

33. Poniamo $y(x) = xz(x)$, si ha che $y'(x) = z(x) + xz'(x)$, sostituendo nell'equazione si trova la seguente equazione nella funzione incognita $z(x)$: $xz' = z\ln z$, con la condizione $z(1) = \frac{y(1)}{1} = 5$. Si tratta di un'equazione a variabili separabili, la retta di equazione $z = 1$ è soluzione dell'equazione ma non del problema. Le altre soluzioni si ottengono ponendo: $\int \frac{1}{z \ln z} dz = \int \frac{1}{x} dx$, da cui, tenendo conto che essendo il problema centrato in $x = 1$ è $x > 0$, $\ln |\ln z| = \ln x + c$, $|lnz| = xe^c$, $\ln z = \pm xe^c$. Sostituendo $x = 1$ si trova, tenendo conto che $z(1) = 5$: $\ln 5 = e^c$, quindi $\ln z = \ln 5x$, $z = e^{x \ln 5} = 5^x$, $y = x5^x$.