Algebra lineare

1. Riconoscere se il seguente insieme costituisce uno spazio vettoriale. In caso affermativo trovarne la dimensione e una base. ($\mathbb{R}_n[x]$ denota lo spazio dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali, di grado al più n)
a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$
b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z = 0\}$
c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 10\}$
d) $\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] : 2a + 3b = 0\}$
e) $\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] : 2a + 3b = 1\}$
f) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) : a + c + d = 0 \right\}$
g) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) : a + c + d = 2 \right\}$

2. Sia $E = \{A \in M(3,3) : A + A^T = \mathbf{0}\}$; scrivere l'elemento generico di E, verificare che E è sottospazio vettoriale di $M(3,3)$, trovare la dimensione e una base.

3. Nella matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ la terza riga è somma delle prime due; possiamo dedurre che la terza colonna è combinazione lineare delle prime due colonne? In caso affermativo, trovare i coefficienti di combinazione.

4. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x. Dati $f(x) = 2, g(x) = 1 + x, h(x) = x + x^2, k(x) = 3 + 2x - x^2$, verificare che il sottospazio di V generato da f, g, h, k ha dimensione 3. L'insieme $\{g, h, k\}$, costituisce una base di tale sottospazio?

5. Stabilire per quali valori del parametro reale k le matrici: $A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti.

6. Per quali valori del parametro reale k il polinomio $3x^2 + kx + 2$ è combinazione lineare dei polinomi $x^2 + 2x + 1$ e $x - 1$? Trovare i coefficienti di combinazione.

7. Per quali valori di k la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-k \\ 2k & -1 \end{bmatrix}$ è invertibile? Per tali valori trovare la sua inversa.

8. Se A è una matrice di rango r allora:
a) le prime r righe di A sono linearmente indipendenti?
b) r qualsiasi colonne di A sono linearmente indipendenti?
c) se $s \leq r$ esiste in A un minore non nullo di ordine s?
d) i minori di ordine r sono diversi da zero?
e) esiste almeno un minore di ordine $r + 1$ nullo?

9. Calcolare, al variare del parametro reale k, il rango di $\begin{bmatrix} k+1 & 1-k & 1 & k^2 \\ 2k+4 & 0 & 3 & 4-k \\ k-3 & k-1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

10. Dati i vettori: $\mathbf{u} = (0, 1, 1, 4k), \mathbf{v} = (2k, 0, -2, 1 - 8k), \mathbf{w} = (2k, 4k, 0, 2k)$, stabilire, al variare del parametro reale k, la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ da essi generato.

11. Determinare, se esistono, i valori del parametro reale k per i quali la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 4 & k-1 \end{bmatrix}$ ha rango 2.

12. Riconoscere se la seguente applicazione è lineare, suriettiva, iniettiva e determinarne il nucleo.

a) $L : \mathbb{R}_2[x] \to M(2,2),\ L(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & c \end{bmatrix}$

b) $L : M(2,2) \to M(2,2),\ L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & a^2 \\ a-b & c \end{bmatrix}$

d) $L : M(2,2) \to M(2,2),\ L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & a-2 \\ a-b & c \end{bmatrix}$

e) $L : M(2,2) \to M(2,2),\ L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & a+c \\ a+b+2c & c \end{bmatrix}$

f) $L : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x],\ L(ax^2+bx+c) = cx^2+bx-ab$

13. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che $L(1,1) = (1,0),\ L(1,2) = (-1,-1)$. Trovare la matrice rappresentativa di L rispetto alla base canonica.

14. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da: $L(x,y,z) = (x-y, x-z)$. Stabilire se L è lineare e se L è biunivoca.

15. Per quali valori di k l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $L(1,0,0) = (1,2,k),\ L(0,1,0) = (3,2k,3+2k)$ e $L(0,0,1) = (1,2,-2k)$ non è biunivoca? In corrispondenza a tali valori verificare se $(1,k+2,2k)$ appartiene a $Im(L)$ e, in caso affermativo, determinarne le controimmagini.

16. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to M(2,3),\ L(a,b) = \begin{bmatrix} a & b & a \\ a & b & a \end{bmatrix}$.

a) L è iniettiva ma non suriettiva?
b) L è suriettiva ma non iniettiva?
c) L è biunivoca?
d) $Im(L)$ è lo spazio vettoriale generato da $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?
e) $Im(L)$ è lo spazio vettoriale generato da $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$?

17. Calcolare $L(6,2)$ sapendo che
a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ L(1,5) = (2,-3),\ L(-3,0) = (1,5)$.
b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ L(1,5) = (1,0,0),\ L(-1,0) = (0,5,1)$.
c) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x],\ L(1,5) = x^2+3x+1,\ L(0,4) = x-2$.

18. Sia $A = \begin{bmatrix} k & k+1 \\ k+1 & 4 \\ 2k+1 & -4k \end{bmatrix}$ e sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ la corrispondente applicazione lineare. Per quali valori del parametro reale k il vettore $(1, 2k, k)$ appartiene a $Im(L)$? In corrispondenza dei valori di k trovati, determinare la controimmagine $L^{-1}(\mathbf{b})$.

19. Sia $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k & 3 \\ 2 & k & k \\ 2 & 1+k & 4+2k \end{bmatrix}$ e sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ la corrispondente applicazione lineare. Per quali valori del parametro reale k L è suriettiva? Per quei valori trovare $L^{-1}(\mathbf{0})$, negli altri casi verificare se il vettore $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ appartiene a $Im(L)$ e, in caso affermativo determinare la controimmagine.

20. Data la famiglia di applicazioni lineari $L(x, y, z, t) = (ax, y - t, 2x + az)$, determinare gli eventuali valori del parametro reale a per i quali la dimensione del nucleo è 2. Per tali valori di a determinare una base del nucleo, e una base dell'immagine.

21. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e sia $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & k \\ 2 & 4 & k & 6 \\ -3 & k & 0 & -9 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, la matrice che la rappresenta. a) Si determinino, al variare di k, le dimensioni dell'insieme immagine e del nucleo di L . b) Si determini, al variare di k, una base dell'insieme immagine di L .

22. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e sia $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, la matrice che la rappresenta. Determinare nucleo e immagine di L.

23. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e sia $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & -1 & 0 & 1 \\ 2k & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, la matrice che la rappresenta. Stabilire per quali valori di k il nucleo ha dimensione 1.

24. Si consideri la trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che manda il vettore (x, y) nel vettore $(3x+2y, x-y, x+y)$. a) Trovare $Ker(L)$ e $\dim Im(L)$. b) Per quali valori del parametro reale k il vettore $(k+4, 0, 2k)$ appartiene a $Im(L)$? Per tali valori trovare la sua controimmagine.

25. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e sia $A = \begin{bmatrix} 2 & 2+k & 1 \\ 2 & 3-k & 3 \\ 4 & 1+k & 1 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, la matrice che la rappresenta. Stabilire per quali valori di k L non è iniettiva e determinarne il nucleo.

26. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e sia $A = \begin{bmatrix} k^2 & 1+k & 2k-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, la matrice che la rappresenta. Stabilire per quali valori di k L è biunivoca.

27. Siano $\mathcal{A} = \{i, j\}$ e $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ due basi di $\mathbb{R}^2$. Siano x, y le componenti di un vettore rispetto alla base $\mathcal{A}$ e x', y' le componenti rispetto a $\mathcal{B}$. Esprimere x, y in funzione di x', y' e viceversa.

28. Siano $\mathcal{A} = \{i, j, k\}$ e $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (2, 0, 0), (-3, 1, 1)\}$ due basi di $\mathbb{R}^3$. Determinare le componenti del vettore $(0, 2, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

29. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita: $T(x, y, z) = (x - z, 2x+y, 2y+z)$. Si scriva la matrice rappresentativa B di T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (2, 0, 0), (-3, 1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

30. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare la cui matrice rappresentativa, rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 0)\}$, è $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determinare la matrice rappresentativa A di T rispetto alla base canonica.

31. Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare di n equazioni in n incognite.
a) se esiste una e una sola soluzione allora $\det A = 0$?
b) se $\mathbf{b}$ è il vettore nullo allora esiste una e una sola soluzione?
c) se $\mathbf{b} \neq 0$ ed esistono soluzioni, la soluzione è unica?
d) se $r(A) = n$ esiste almeno una soluzione?

e) se $\mathbf{b} \neq 0$ esiste almeno una soluzione?

32. Dire per quali valori di h e k il seguente sistema ha soluzioni:

$$\begin{cases} kx - y + 2kz = h \\ -x + 4ky - 4kz = 1 \end{cases}$$

33. Discutere, al variare del parametro reale λ, la risolubilità del seguente sistema e calcolarne le soluzioni, quando esistono:

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ \lambda^2 x + y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$$

34. Discutere, al variare del parametro reale k, la risolubilità del seguente sistema e calcolarne le soluzioni, quando esistono:

$$\begin{cases} -x + ky + kz = 1 \\ kx - 9y - 9z = -3 \end{cases}$$

35. Discutere, al variare del parametro reale k, la risolubilità del seguente sistema e calcolarne le soluzioni, quando esistono:

$$\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ (k+1)x + y + kz = 0 \end{cases}$$

36. Discutere, al variare del parametro reale k, la risolubilità del seguente sistema e calcolarne le soluzioni, quando esistono:

$$\begin{cases} kx + y = k - 1 \\ 2x - 3y = k \\ (k+2)x - 2y = k^2 + 2k - 1 \end{cases}$$

37. Se $\mathbf{v}$ è autovettore di A allora $2\mathbf{v}$ è autovettore di A^2?

38. Sia $L : M(2,2) \to M(2,2)$, $L(A) = A^T$. Determinare autovalori e autovettori.

39. Sia $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; determinare autovalori, autovettori di A, e, se esiste, una matrice diagonale simile ad A.

40. Sia $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ k & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. a) Dopo aver calcolato gli autovalori di A, stabilire per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile. b) Per i valori di k per cui A è diagonalizzabile, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A e una matrice diagonale simile a A.

41. Trovare autovalori e autovettori della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

42. Verificare che $\lambda = 1$ è autovalore della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e trovare l'autovettore corrispondente.

43. Per quali valori del parametro reale k è diagonalizzabile la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k+1 & 0 & 1 \\ 2 & k^2 & 0 \end{bmatrix}$?

44. Per quale valore del parametro reale k il vettore $(1, 2, 3)$ è autovettore di $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$? In corrispondenza di tale valore A é diagonalizzabile?

45. Per quali valori del parametro reale h è diagonalizzabile la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & h-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & h & 1 \end{bmatrix}$?

46. Diagonalizzare la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$?

Soluzioni

1. b), c), e), g) no; a) sì, dimensione 2, base: $(1, 1, -3), (0, 2, -4)$; d) sì, dimensione 2, base: $x^2 - \frac{2}{3}x, 1$; f) sì, dimensione 3, base: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

2. L'elemento generico di E è la matrice $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$, la dimensione è 3, una base è formata dai vettori $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Poiché il rango di A è 2, il massimo numero di colonne linearmente indipendenti è 2, ed essendo le prime due colonne linearmente indipendenti si deduce che la terza deve essere combinazione lineare delle prime due; i coefficienti sono: -1 e 2.

4. Si ha che k è combinazione lineare di g e h, infatti: $3+2x-x^2 = -(x+x^2)+3(1+x)$. Dunque $\{g, h, k\}$ non forma una base. Invece f, g, h sono linearmente indipendenti, infatti se $c_1 2 + c_2(1 + x) + c_3(x + x^2)$ è il polinomio nullo, allora $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Quindi la dimensione del sottospazio considerato è 3.

5. Se $c_1A + c_2B + c_3C$ è la matrice nulla, allora $kc_1 + c_3 = c_1 + kc_3 = -c_1 + kc_2 - 2c_3 = c_1 = 0$. il sistema ammatte soluzione non banale se e solo se $k = 0 \pm 1$. Pertanto le tre matrici sono linearmnete dipendenti se e solo se $k = 0, \pm 1$.

6. Per $k = 7$ si ha che: $3x^2 + 7x + 2 = 3(x^2 + 2x + 1) + (x - 1)$; i coefficienti sono 3 e 1.

7. A è invertibile se il suo determinante è non nullo, cioè se $k \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.
$A^{-1} = \dfrac{1}{2k^2 - 2k - 1} \begin{bmatrix} -1 & k-1 \\ -2k & 1 \end{bmatrix}$.

8. a), b), d) no; c), e) sì.

9. Se $k \neq 1$ il rango è 3, se $k = 1$ il rango è 1.

10. La dimensione del sottospazio generato dai 4 vettori è uguale al rango di $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 4k \\ 2k & 0 & -2 & 1-8k \\ 2k & 4k & 0 & 2k \end{bmatrix}$. Il rango di A è 3 se $k \neq 0, \dfrac{1}{2}$; se $k = 0$ o $k = \dfrac{1}{2}$ il rango di A è 2.

11. $\det(A) = 0$ per $k = 1$, ma per tale valore di k la matrice ha rango 1.

12. a) lineare, iniettiva, non suriettiva; b) non lineare; c) non lineare; d) lineare, non suriettiva, non iniettiva, $Ker(L) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, e) non lineare.

13. Si ha che: $(1,0) = 2(1,1) - (1,2)$ e $(0,1) = -(1,1) + (1,2)$, da cui $L(1,0) = (3,1)$ e $L(0,1) = (-2,-1)$. La matrice rappresentativa di L è la matrice $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

14. Si ha che $L(x,y,z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, dove $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, pertanto L è lineare. $r(A) = 2$, quindi L é suriettiva; il nucleo ha dimensione 1, quindi L non é iniettiva. Pertanto L non é biunivoca.

15. L non è biunivoca se il determinante della sua matrice rappresentativa è nullo, e cioè se $k = 0, 3$. Se $k = 0$ $\mathbf{b} \in Im(L)$ e $L^{-1}(\mathbf{b}) = (x, 0, 1-x)$; se $k = 3$ $\mathbf{b} \notin Im(L)$.

16. a), e) sì; b), c), d) no.

17. a) $\left(-\frac{16}{15}, -\frac{158}{15}\right)$, b) $\left(\frac{2}{5}, -28, -\frac{28}{5}\right)$, c) $(6, 11, 20)$.

18. $k = 1$, $L^{-1}(\mathbf{b}) = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$; $k = -1$, $L^{-1}(\mathbf{b}) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$; $k = -\frac{4}{11}$, $L^{-1}(\mathbf{b}) = \left(-\frac{12}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

19. L è suriettiva se $k \neq 1, -6$; $L^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$; se $k = 1$ *o* $k = -6$, $\mathbf{b}$ non appartiene a $Im(L)$.

20. La matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche è $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$. La dimensione del nucleo è 2 se e solo se il rango di A è 2. Il minore $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ è non nullo, quindi $r(A) \geq 2$; $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2$, quindi se $a \neq 0$ il rango di A è 3, mentre se $a = 0$, essendo la prima riga di A il vettore nullo (N.B. ci sarebbe un altro minore di ordine 3 da controllare...), il rango di A è 2. Quindi la dimensione del nucleo di L è 2 se e solo se $a = 0$. Il nucleo è formato dai vettori di $\mathbb{R}^4$ soluzioni del sistema: $\begin{cases} y - t = 0 \\ 2x = 0, \end{cases}$, cioè dai vettori del tipo $(0, y, z, y)$. Una base del nucleo è formata dai vettori: $(0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$; una base dell'immagine è formata da 2 vettori colonna di A linearmente indipendenti, ad esempio dai vettori $(0, 0, 2), (0, 1, 0)$.

21. a) $r(A) = 3$ se $k \neq 3$, $r(A) = 2$ se $k = 3$. dim$Im(L)$ è uguale al rango di A, dim$Ker(L) = 1$ se $k \neq 3$, 2 se $k = 3$. b) Se $k \neq 0, 3$ le prime tre colonne di A formano una base di $Im(L)$; se $k = 0$ una base è costituita dalla I, II e IV colonna di A; se $k = 3$ le prime due colonne di A formano una base.

22. $Im(L)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $(1,-2,-1)$, $(-1,3,2)$, cioè il piano passante per l'origine, per $(1,-2,-1)$ e per $(-1,3,2)$. $Ker(L)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$, di dimensione 1, costituito dai vettori (x,y,z) soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, e cioè dai vettori paralleli al vettore $(1,1,-1)$.

23. $\dim Ker(L) = 1$ se $\dim Im(L) = 3$. Il determinante di A è nullo $\forall k \in \mathbb{R}$, dunque $r(A) \leq 3$. Essendo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, si ha che $r(A) \geq 2$. Essendo $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, si ha che $r(A) = 3,\ \forall k$.

24. a) $Ker(L) = \{(0,0)\}$, $\dim Im(L) = 2$. b) Per $k = 1$; controimmagine: $(1,1)$.

25. Se $k = -\frac{5}{4}$ L non è iniettiva; $Ker(L)$ è l'insieme dei vettori $(x, 2x, -\frac{7}{2}x),\ x \in \mathbb{R}$.

26. L è biunivoca se $det(A) = 3(k^2 - 3k + 2) \neq 0$, se $k \neq 1, 2$.

27. Si ha che: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Quindi $x = x' + y',\ y = x' - y'$ e $x' = \frac{x+y}{2},\ y' = \frac{x-y}{2}$.

28. $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Quindi $x' = -1,\ y' = \frac{7}{2},\ z' = 2$.

29. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -8 & 16 \\ 7 & 18 & -27 \\ 4 & 8 & -10 \end{bmatrix}$.

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

31. a), b), c), e) no; d) sì

32. Se $k \neq \frac{1}{2}$ il sistema ha ∞^1 soluzioni $\forall h$; se $k = \frac{1}{2}$ e se $h \neq -\frac{1}{2}$, il sistema è impossibile, se $h = -\frac{1}{2}$ il sistema ha ∞^2 soluzioni.

33. Se $\lambda \neq 0, 1$ il sistema ha una e una sola soluzione $\left(\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right)$. Se $\lambda = 0$ il sistema è impossibile; se $\lambda = 1$ il sistema ha ∞^2 soluzioni $(-y+z+1, y, z), y, z \in \mathbb{R}$.

34. Se $k \neq \pm 3$ il sistema ha ∞^1 soluzioni: $\left(\frac{9z-3}{k+3}, \frac{1-3z}{k+3}, z\right), z \in \mathbb{R}$; se $k = 3$ il sistema ha ∞^2 soluzioni: $(x, y, 1 + x - 3y), x, y \in \mathbb{R}$; se $k = -3$ il sistema è impossibile.

35. Se $k \neq 1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni: $\left(\frac{-1-z+kz}{1-k}, \frac{-kz+z+k+1}{1-k}, z\right)$, $z \in \mathbb{R}$; se $k = 1$ il sistema è impossibile.

36. Se $k \neq 0, -\frac{2}{3}$ il sistema è impossibile; se $k = 0$, $x = -\frac{3}{2}$, $y = -1$; se $k = -\frac{2}{3}$, il sistema è impossibile.

37. Sì, se $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, alllora $A^2(2\mathbf{v}) = A(A(2\mathbf{v})) = A(2A\mathbf{v}) = A(2\lambda\mathbf{v}) = 2\lambda A\mathbf{v} = 2\lambda^2\mathbf{v} = \lambda^2 2\mathbf{v}$. Quindi $2\mathbf{v}$ è autovettore di A^2 e l'autovalore relativo è λ^2.

38. autolvalori: ± 1, autovettori: $\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$.

39. $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6; \mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (1, 0, 1); D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

40. a) Gli autovali sono $\lambda = 3$, avente molteplicità algebrica 2, e $\lambda = 2$ con molteplicità 1. L'autovalore $\lambda = 2$ è semplice e quindi regolare. L'autovalore $\lambda = 3$ è regolare se l'autospazio relativo ha dimensione 2. Calcoliamo gli autovettori relativi a $\lambda = 3$ risolvendo il sistema: $A - 3I = \mathbf{0}$, cioè $-7z = 0, kx + 4z = 0, -z = 0$. Se $k = 0$ il sistema ha per soluzioni i vettori $(x, y, 0)$ che formano uno spazio di dimensione 2, se invece $k \neq 0$ il sistema ha per soluzione i vettori $(0, y, 0)$ che formano uno spazio di dimensione 1. Dunque A è diagonalizzabile se e solo se $k = 0$.
b) Una base di autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 3$ è costituita ad esempio dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 2$ è ad esmpio il vettore $(7, -4, 1)$. I tre vettori cocituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Una matrice diagonale simile ad A è $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

41. Autovalori: $\lambda = 0, 1, 5$. Autovettori corrispondenti:$(-z, -z, z), (x, -x, 0)$, $\left(\frac{3}{2}z, \frac{3}{2}z, z\right)$.

42. $det(A - I) = 0$, quindi 1 è autovalore. Gli autovettori sono tutti i multipli di $(3, 10, -2)$.

43. Gli autovalori di A sono: $0, \pm k$; se $k \neq 0$ A ha tre autovalori distinti quindi è diagonalizzabile; se $k = 0$ l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica tre e molteplicità geometrica uno, quindi A non è diagonalizzabile.

44. Per $k = 2$ $(1, 2, 3)$ è autovettore di A relativo all'autovalore $\lambda = 3$. Gli altri autovalori si trovano annullando il polinomio: $det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 10\lambda - 3 = (\lambda - 3)(-\lambda^2 - 3\lambda + 1)$, poiché tale polinomio ha tre radici distinte, la matrice è diagonalizzabile.

45. Gli autovalori di A sono: $1, 2 - h, 1 + h$. Se $h \neq 0, 1, \frac{1}{2}$ A ha tre autovalori distinti pertanto è diagonalizzabile. Se $h = 0$, $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica due, gli autovettori relativi sono: (x, y, x), quindi anche la molteplicità geometrica è due, e A è diagonalizzabile. Se $h = 1$, $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica due, gli autovettori relativi sono: $(0, 0, z)$, quindi la molteplicità geometrica è uno, e A non è diagonalizzabile. Se $h = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$ ha molteplicità algebrica due, gli autovettori relativi sono: $(x, 0, x)$, quindi la molteplicità geoemetrica è uno, e A non è diagonalizzabile.

46. Gli autovalori sono: $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = 2$, tutti semplici quindi A è diagonalizzabile. Gli autovettori relativi a $\lambda = 1$ sono: $(0, y, 0)$, gli autovettori relativi a $\lambda = 2$ sono: $(x, 0, 0)$, gli autovettori relativi a $\lambda = -1$ sono: $(x, 0, 3x)$. Una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A è: $(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 3)$. Quindi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} .$$