

## DOMANDE ANNI PRECEDENTI

### 1. Ricavare la distribuzione degli sforzi tangenziali nel moto di Poiseuille in condotta

Consideriamo un volume di controllo costituito da un cilindro coassiale con la condotta di raggio  $r$  e lunghezza  $L$ . Suddividiamo la superficie di contorno del volume di controllo in due superfici piane 1,2, coincidenti con le basi del cilindro, e una superficie curva 0, corrispondente con quella laterale. Applichiamo dunque l'equazione di Navier Stokes in forma globale a questo volume di controllo:

$$\overline{\Pi_p} + \overline{\Pi_\mu} + \overline{G} + \overline{I} + \overline{M} = \overline{0}$$

$$\overline{\Pi_{p,1}} + \overline{\Pi_{p,2}} + \overline{\Pi_{p,0}} + \overline{\Pi_{\mu,1}} + \overline{\Pi_{\mu,2}} + \overline{\Pi_{\mu,0}} + \overline{M_1} + \overline{M_2} + \overline{M_0} + \overline{I} + \overline{G} = \overline{0}$$

Possiamo notare che:

- La risultante delle inezie locali è nulla perché il problema è stazionario:  $\overline{I} = \overline{0}$
- Il flusso di quantità di moto attraverso la superficie laterale 0 è nullo perché velocità e versore sono tra loro perpendicolari e quindi hanno prodotto nullo:  $\overline{M_0} = \overline{0}$
- Per la continuità il flusso di quantità di moto attraverso le due superfici piane è il medesimo e quindi la loro somma è complessivamente nulla  $\overline{M_1} + \overline{M_2} = \beta\rho V^2 \pi r^2 \hat{i} - \beta\rho V^2 \pi r^2 \hat{i} = \overline{0}$
- La risultante degli sforzi viscosi sulla superficie piana 1 è nulla visto che per continuità la derivata della velocità in direzione  $x$  è ovunque nulla  $\overline{\Pi_{\mu,1}} = \overline{0}$
- La risultante degli sforzi viscosi sulla superficie piana 2 è nulla visto che per continuità la derivata della velocità in direzione  $x$  è ovunque nulla  $\overline{\Pi_{\mu,2}} = \overline{0}$

Semplificando ottengo dunque la seguente equazione:

$$\overline{\Pi_{p,1}} + \overline{\Pi_{p,2}} + \overline{\Pi_{p,0}} + \overline{\Pi_{\mu,0}} + \overline{G} = \overline{0}$$

La proietto ora lungo l'asse  $x$ :

$$\overline{\Pi_{p,1x}} + \overline{\Pi_{p,2x}} + \overline{\Pi_{p,0x}} + \overline{\Pi_{\mu,0x}} + \overline{G_x} = \overline{0}$$

$$\overline{\Pi_{p,1x}} = p_1 \pi r^2 \hat{i}$$

$$\overline{\Pi_{p,2x}} = -p_2 \pi r^2 \hat{i}$$

$$\overline{\Pi_{p,0x}} = \overline{0}$$

$$\overline{\Pi_{\mu,0x}} = -\tau 2\pi r L \hat{i}$$

$$\overline{G_x} = -\gamma \pi r^2 L \sin \psi \hat{i}$$

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r L - \gamma \pi r^2 L \sin \psi = \overline{0}$$

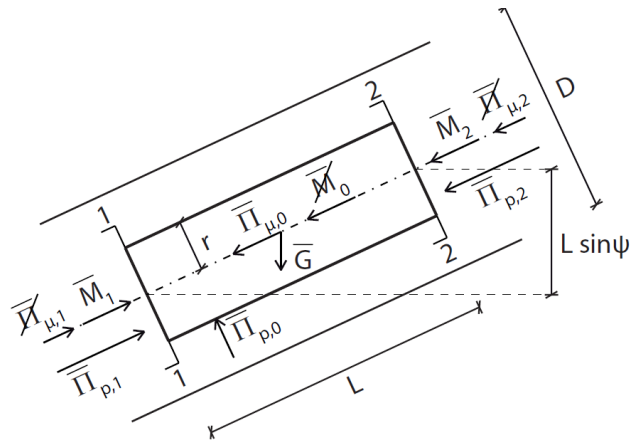
$$L \sin \psi = \tilde{z}_2 - \tilde{z}_1$$

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r L - \gamma \pi r^2 (\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) = \overline{0}$$

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r L - \gamma \pi r^2 \tilde{z}_2 + \gamma \pi r^2 \tilde{z}_1 = \overline{0}$$

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \gamma \pi r^2 \tilde{z}_2 + \gamma \pi r^2 \tilde{z}_1 = \tau 2\pi r L$$

$$\gamma \pi r^2 \left[ \left( \tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right] = \tau 2\pi r L$$

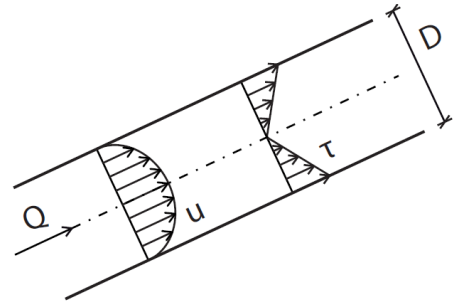


$$\left(\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(\tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = JL$$

$$\gamma \pi r^2 JL = \tau 2\pi r L$$

$$\gamma r J = \tau 2$$

$$\tau = \frac{\gamma r J}{2}$$



Ciò vuol dire che lo sforzo tangenziale viscoso è distribuito linearmente con la coordinata radiale, è nullo in corrispondenza dell'asse e massimo in corrispondenza della parete condotta.

## 2. Significato fisico del tensore di velocità delle deformazioni

Il tensore delle velocità delle deformazioni, noto anche come D, è uno dei due tensori in cui può essere scomposta la divergenza della velocità: il prodotto tra questo tensore di velocità delle deformazioni e il tensore delle deformazioni rigide dà proprio la divergenza del vettore velocità. Il tensore di velocità delle deformazioni è un tensore simmetrico che in un primo momento può essere scritto nel seguente modo:

$$\bar{\bar{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Da un'analisi più approfondita possiamo comprendere che i termini diagonali di questo tensore rappresentano in realtà delle dilatazioni volumetriche a forma costante quindi possiamo sostituire i tre elementi diagonali con le corrispettive dilatazioni volumetriche espresse nel seguente modo (allungamento unitario):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z}$$

Possiamo inoltre dedurre che gli elementi extra diagonali o rettangolari rappresentano dei cambiamenti di forma a volume costante e possono essere scritti nel seguente modo (variazioni degli angoli della figura):

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_y}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_x}{\partial t}$$

In conclusione il tensore delle velocità di deformazione può essere riscritto nel seguente modo:

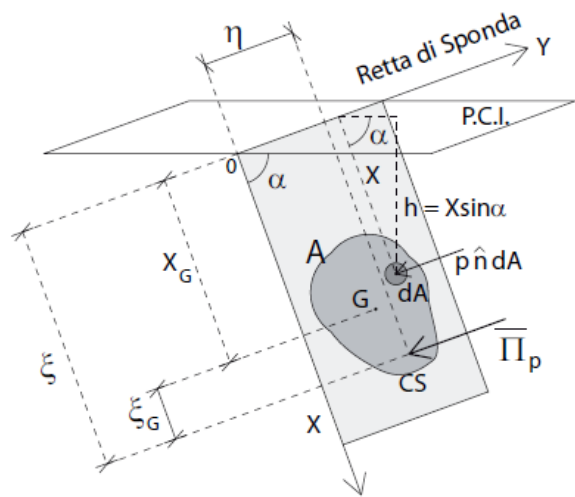
$$\bar{\bar{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_z}{\partial t} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_z}{\partial t} & \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} & \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

### 3. Spinta idrostatica su superfici piane, determinazione del modulo e punto di applicazione

Consideriamo una superficie piana generica di area  $A$  che giace su un piano inclinato di un certo angolo  $\alpha$  rispetto al piano dei carichi idrostatici di un fluido pesante incompressibile in quiete. Definiamo retta di sponda l'intersezione tra il piano dei carichi idrostatici e il piano in cui giace la superficie. Fissiamo poi un sistema di riferimento in cui l'asse  $Y$  coincide con la retta di sponda e l'asse  $X$  giace sul piano contenente  $A$  ed è ortogonale a  $Y$ . La forza esercitata dalla superficie del fluido è rappresentata dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_p &= \int_A p \hat{n} dA = \\ &= \hat{n} \int_A p dA = \\ &= \hat{n} \int_A \gamma h dA = \\ &= \hat{n} \int_A \gamma X \sin \alpha dA = \\ &= \hat{n} \gamma \sin \alpha \int_A X dA = \\ &= \hat{n} \gamma \sin \alpha x_G A = \\ &= \hat{n} \gamma h_G A = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \gamma h \\ h &= X \sin \alpha \\ x_G &= \frac{\int_A X dA}{A} \\ \int_A X dA &= x_G A \\ h_G &= \sin \alpha x_G \\ p_G &= \gamma h_G \end{aligned}$$



$$= \hat{n} p_G A$$

$$\bar{S} = -\bar{\Pi}_p = -\hat{n} p_G A$$

La spinta che il fluido esercita sulla superficie è dunque un vettore caratterizzato da modulo, verso e direzione identificata dalla retta di applicazione:

$$\xi = \frac{I}{M} = \xi_G + X_G$$

$$\xi_G = \frac{I_G}{M}$$

$$\eta = \frac{I_{XY}}{M}$$

### 4. Fornire le ipotesi, enunciare e dimostrare il teorema di Bernoulli

Analizziamo il moto di una particella di fluido ideale soggetta al campo gravitazionale. A partire dall'analisi del bilancio della quantità di moto è possibile ricavare il trinomio di Bernoulli. Esprimiamo l'accelerazione nelle sue componenti normali e tangenziali:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \quad \bar{f} = -g \nabla \bar{z}$$

$$\rho(\bar{f} - \bar{a}) = \nabla p$$

$$\rho \left( -g \nabla \bar{z} - \frac{dv}{dt} \hat{t} - \frac{v^2}{r} \hat{n} \right) = \nabla p$$

$$-\rho g \nabla \bar{z} - \rho \left( \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \right) = \nabla p$$

$$-\rho \left( \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \right) = \nabla p + \rho g \nabla \tilde{z}$$

Ipotizzando che il fluido sia incomprimibile possiamo riscrivere l'equazione dividendo tutto per il peso specifico:

$$\frac{-\rho \left( \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \right)}{\gamma} = \frac{\nabla p + \rho g \nabla \tilde{z}}{\gamma}$$

$$-\frac{1}{g} \left( \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{r} \hat{n} \right) = \nabla \left( \frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right)$$

Proiettiamo ora questa equazione lungo le tre direzioni:

1. Direzione binormale:  $\frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = 0$
2. Direzione normale:  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = -\frac{1}{g} \frac{v^2}{r}$
3. Direzione tangenziale:  $\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = -\frac{1}{g} \frac{dv}{dt}$

Analizziamo meglio la direzione tangenziale:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = -\frac{1}{g} \frac{dv}{dt}$$

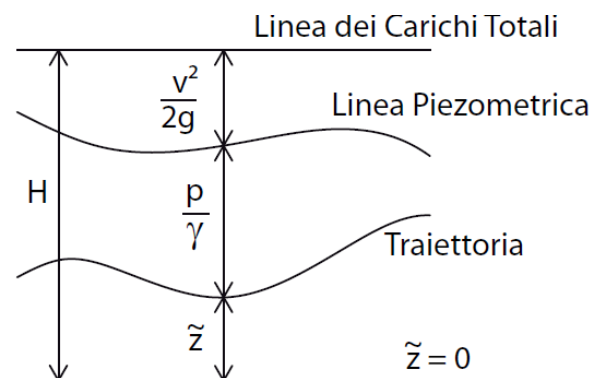
$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = -\frac{1}{g} \left( v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) = -\frac{1}{g} v \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\gamma} + \tilde{z} \right) + \frac{1}{g} v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\gamma} + \tilde{z} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$



Se il moto è stazionario:  $\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\gamma} + \tilde{z} + \frac{v^2}{2g} \right) = 0$

Otteniamo così il trinomio di Bernoulli, noto anche come carico totale. Il teorema di Bernoulli afferma che lungo la traiettoria di una particella di fluido ideale, pesante, incomprimibile, in condizioni di moto permanente il carico totale rimane costante. Il teorema di Bernoulli può anche essere interpretato energeticamente ed esprime quindi il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\left( \frac{p}{\gamma} + \tilde{z} + \frac{v^2}{2g} \right) mg = 0$$

$\frac{p}{\gamma}$  energia potenziale dovuta alla pressione per unità di peso

$\tilde{z}$  energia potenziale gravitazionale per unità di peso

$\frac{v^2}{2g}$  energia cinetica per unità di peso

$\frac{p}{\gamma} + \bar{z}$  energia potenziale per unità di peso

### 5. formulare il legame costituito per un fluido newtoniano

Per prima cosa definiamo il fluido newtoniano come un particolare tipo di fluido stokesiani in cui la funzione tra il tensore degli sforzi e il tensore delle velocità di deformazione è di tipo lineare. Ricordiamo che i fluidi stokesiani sono fluidi che godono di tre caratteristiche:

- Il tensore degli sforzi è funzione delle velocità di deformazioni e non delle deformazioni stesse (questo in realtà avviene in qualsiasi tipo di fluido in quanto la deformazione di un fluido tende a infinito e dunque non è un parametro caratterizzante dei fluidi stessi)
- Quando la velocità si annulla il tensore degli sforzi si riduce al caso statico  
La funzione che lega il tensore degli sforzi alle velocità di deformazione è indipendente dal sistema di riferimento utilizzato

Tale legame può essere scritto come:

$$\bar{\Phi} = (p + b\nabla \cdot \bar{v})\bar{I} + a\bar{D}$$

Cerchiamo ora di capire cosa sono a e b:

- Il valore  $a$  ha a che fare con gli sforzi tangenziali, è l'indice della resistenza che il fluido oppone a cambiamenti di forma e possiamo determinarlo nel seguente modo tenendo presente che sperimentalmente  $v_x = 0$ :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\phi_{xy} = aD_{yx} = a \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = a \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau = -\phi_{xy}$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = -a \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\mu = -a \frac{1}{2}$$

$$a = -2\mu$$

- Per determinare il termine  $b$  (viscosità di dilatazione) che esprime la variazione percentuale di volume nell'unità di tempo ed è indice della resistenza che il fluido oppone a variazioni di volume, occorre per prima cosa calcolare la traccia del tensore degli sforzi:

$$tr(\bar{\Phi}) = (p + b\nabla \cdot \bar{v})tr(\bar{I}) + atr(\bar{D}) = (p + b\nabla \cdot \bar{v})3 + a\nabla \cdot \bar{v} = 3p + 3b\nabla \cdot \bar{v} + a\nabla \cdot \bar{v}$$

In statica  $tr(\bar{\Phi}) = 3p$  e  $\nabla \cdot \bar{v} = tr(\bar{D})$  e  $a = -2\mu$  dunque:

$$tr(\bar{\Phi}) = 3p + 3b\nabla \cdot \bar{v} + a\nabla \cdot \bar{v}$$

$$3p = 3p + 3btr(\bar{D}) + atr(\bar{D})$$

$$0 = +3btr(\bar{D}) - 2\mu tr(\bar{D})$$

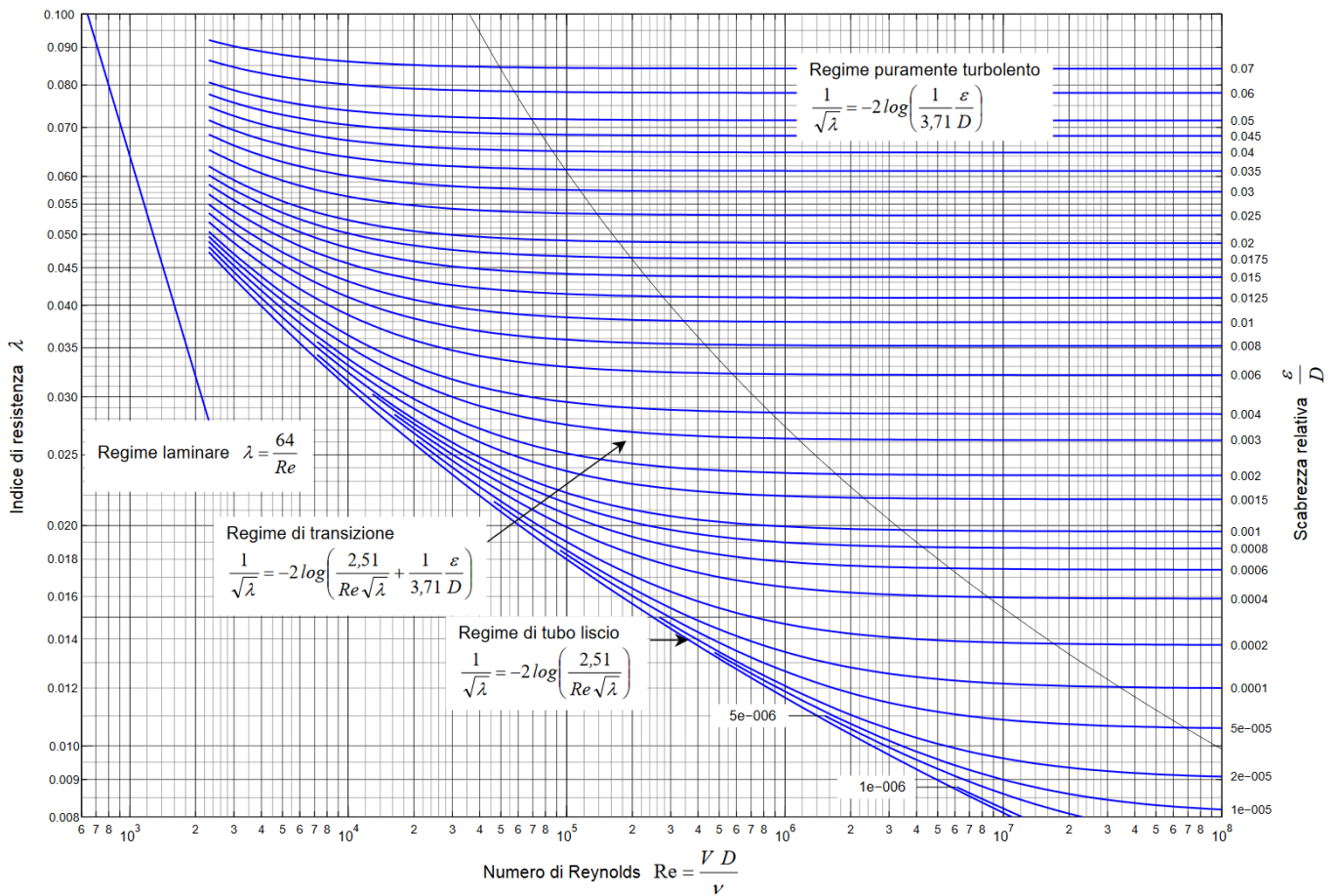
$$0 = +3b - 2\mu$$

$$b = \frac{2}{3}\mu$$

Noti a e b possiamo scrivere il tensore degli sforzi:  $\Phi = \left( p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \bar{v} \right)\bar{I} - 2\mu\bar{D}$

## 6. disegnare e spiegare in dettaglio l'abaco di Moody

L'abaco di Moddy è un diagramma che rappresenta le curve  $\lambda - Re$  interpolanti i dati sperimentali relativi a tubi commerciali di diversa scabrezza relativa equivalente. È dunque un diagramma bilogarithmico che riporta il fattore di attrito di Darcy in funzione del numero di Reynolds al variare della rugosità secondo la correlazione di Colebrook.



## 7. Ricavare la soluzione analitica delle equazioni di Navier Stokes per il flusso piano di poiseuille

consideriamo due lastre piane indefinite parallele posto a distanza  $\delta$  l'una dall'altra tra le quali si trova un fluido pesante newtoniano incomprimibile di densità  $\rho$  e viscosità  $\mu$ . Entrambe le lastre sono ferme. Ipotizziamo:

1. Di avere moto laminare e quindi  $\vec{v} = (u, 0)$
2. Il gradiente di pressione lungo la direzione  $x$  sia costante  $\frac{\partial p_e}{\partial x} = cost$

Risolviamo adimensionalmente le equazioni di Navier Stokes tenendo presente che come grandezza scala scegliamo la velocità media  $V$  del flusso lungo la direzione  $y$  e lo spessore dell'intercapedine  $\delta$ , ricordiamo inoltre che  $Re = \rho V \delta / \mu$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \ddot{u}}{\partial \ddot{x}} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial \ddot{y}} = 0$$

$$\vec{v} = (u, 0)$$

$$\frac{\partial \ddot{u}}{\partial \ddot{x}} = 0$$

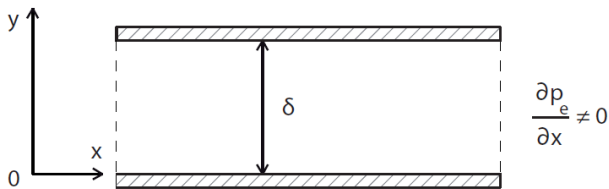
$$-\nabla \ddot{p}_e + \frac{1}{Re} \nabla^2 \ddot{v} = \frac{\partial \ddot{v}}{\partial \ddot{t}} + \nabla \cdot (\ddot{v} \ddot{v})$$

Proiettiamo questa equazione nelle direzioni  $\ddot{y}$  e  $\ddot{x}$ :

$$-\frac{\partial \ddot{p}_e}{\partial \ddot{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \ddot{u}}{\partial \ddot{x}^2} + \frac{\partial^2 \ddot{u}}{\partial \ddot{y}^2} \right) = \frac{\partial \ddot{u}}{\partial \ddot{t}} + \ddot{u} \frac{\partial \ddot{u}}{\partial \ddot{x}} + \ddot{v} \frac{\partial \ddot{u}}{\partial \ddot{y}}$$

$$-\frac{\partial \ddot{p}_e}{\partial \ddot{y}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \ddot{v}}{\partial \ddot{x}^2} + \frac{\partial^2 \ddot{v}}{\partial \ddot{y}^2} \right) = \frac{\partial \ddot{v}}{\partial \ddot{t}} + \ddot{u} \frac{\partial \ddot{v}}{\partial \ddot{x}} + \ddot{v} \frac{\partial \ddot{v}}{\partial \ddot{y}}$$

Possiamo notare che, in seguito alle ipotesi fatte, al moto stazionario, alla laminarità del moto e a quanto determinato dalla prima equazione di Navier Stokes in forma adimensionale le equazioni si semplificano a:



$$-\frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) = 0$$

$$-\frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{y}} = 0$$

Integrando due volte la prima equazione si ottiene una soluzione del tipo:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = Re \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{x}} \bar{y} + A$$

$$\bar{u} = \frac{Re}{2} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{x}} \bar{y}^2 + A \bar{y} + B$$

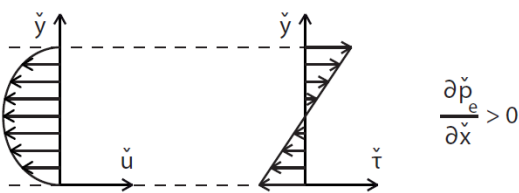
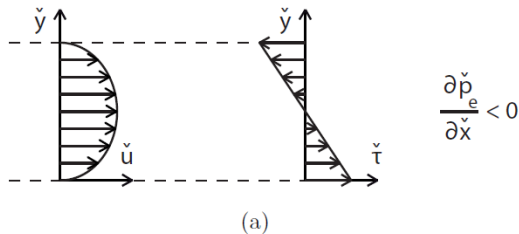
$A, B$  sono le costanti di integrazioni da determinare con le condizioni al contorno e la condizione di simmetria:

$$\bar{u}(0) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{quando} \quad \bar{y} = \frac{1}{2}$$

Si ottiene dunque che  $A = -\frac{Re}{2} \frac{\partial \bar{p}_e}{\partial \bar{x}}$  e  $B = 0$ . Possiamo inoltre determinare lo sforzo tangenziale:

$$\tau = \frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$$



## 9. Drag sui corpi tozzi

vediamo ora come il coefficiente di drag dipende dalla scabrezza relativa e dal numero di Reynolds nel caso di corpi tozzi. Il caso più estremo di corpo tozzo è rappresentato da una lastra posta perpendicolare al flusso. Notiamo subito che a valle della lastra il flusso si separa a causa degli spigoli vivi. La forza di drag in questo caso è dovuta solamente alle pressioni e non agli sforzi tangenziali. Il drag è dunque generato da una mancata simmetria nella distribuzione delle pressioni tra monte e valle del corpo, a sua volta associato con la separazione del flusso e la conseguente creazione di una zona di scia. La velocità è massima e quindi la pressione è minima in corrispondenza del massimo ingombro del corpo.

Prendiamo come esempi di corpo tozzo una sfera di diametro  $d$  investita da una corrente stazionaria e uniforme con velocità  $U$ :

- $Re < 1$  si parla ancora di flusso di Stokes. Il coefficiente di drag risulta essere inversamente proporzionale al numero di  $Re$  e la costante di proporzionalità dipende dalla forma del corpo tozzo. In questo caso non si verifica separazione
- $1 < Re < 50$  il flusso si separa dal corpo e si formano a valle del corpo due vortici a delta simmetrici e stazionari noti come bolle stazionarie
- $50 < Re < 10^3$  si forma la scia vorticoso oscillante di Karman che consiste nella formazione alternata di vortici controrrotanti a valle del corpo in corrispondenza del quadrante superiore e inferiore
- $10^3 < Re < 10^5$  si crea attorno al corpo uno strato limite laminare che si separa dalla sfera più o meno in corrispondenza della sezione di massimo ingombro. A valle del corpo è presente una scia turbolenta all'interno della quale la pressione si mantiene circa uniforme
- $Re \cong 10^5$  vi è transizione da strato limite laminare a turbolento. La separazione viene più a valle rispetto allo strato limite laminare. Una volta avvenuta la transizione il coefficiente di drag aumenta con il numero di Reynolds fino a saturare quando la scabrezza è interamente emersa dal substrato limite viscoso: il coefficiente di drag diventa auto simile rispetto a  $Re$ .

