Funzioni Armoniche: Un Primo Assaggio

Kevin R. Payne

Appunti per il Corso Avanzato di Analisi Matematica III

CCD in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Università degli Studi di Milano

1 Introduzione.

In questi appunti vogliamo iniziare un discorso che può considerarsi anche un'introduzione alle Equazioni alle Derivate Parziali (EDP). Tali equazioni sono di importanza fondamentale per le scienze piochè danno un linguaggio per i modelli delle leggi fondamentali che governano un sistema di incognite che dipendono da più variabili. Inoltre l'EDP sono il linguaggio della geometria differenziale ed il punto centrale nell'uso dell'analisi in geometria. Molto importante sia per la fisica matematica che per la geometria è *l'equazione di Laplace*

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \tag{1.1}$$

dove $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ è una funzione regolare in un dominio $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ con $n \geq 1$. Quest'equazione ha come icognite la funzione u e si chiama *soluzione dell'equazione di Laplace in* Ω una funzione due volte derivabile per cui la relazione (1.1) sia soddisfata per ogni $x \in \Omega$. Le soluzioni di quest'equazione alle derivate parziali formano una classe di funzioni con una tale ricchezza di belle proprietá che siamo obbligati a dar loro un nome.

Definizione 1.1 *Sia* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$*. Si chiama* $u \in C^2(\Omega)$ *armonica in* Ω *se* u *è soluzione dell'equazione* (1.1) *in* Ω*.*

Si nota che la richiesta $u \in C^2(\Omega)$ è solo per commodità; basta assumere che esistano tutte le derivate parziali di secondo ordine per esempio. Infatti, si potrebbe dire che la definizione 1.1 è quella di una soluzione *classica* dell'EDP (1.1) e tale definzione potrebbe essere indebolita in modo sostanziale ma questo è un altro (importante) discorso. Prima di considerare qualche esempio e di parlare delle proprietà delle funzioni armoniche, presentiamo in modo più preciso qualche motivazione per studiare queste funzioni. Due testi belli sulle EDP sono: a livello base quello di Strauss [**?**] e più avanzato quello di Evans [**?**].

1.1 Modelli dalla Fisica Matematica

Pensiamo a $u = u(x)$ come la densità di qualche quantità in una regione Ω dello spazio; per esempio, possiamo pensare alla densità di *una temperatura, un postenziale elletrostatico, un potenziale di velocità, una concentrazione chimica.* Assumiamo che la densità sia in *equilibrio*; cioè dopo aver trovato una sua distribuzione che è costante nel tempo (ma non necessariamente rispetto lo spazio fisico). In particolare, la nozione di equilibrio dipende dalla considerazione *del flusso dell'energia totale* associata in questo senso: per ogni sottodominio $A \subset \Omega$ dobbiamo avere un flusso netto di energia attraverso il bordo di A uguale a zero; cioè

$$0 = \text{Flusso}(u, \partial A) = \int_{\partial A} \langle F(x, u(x)), \nu \rangle \, d\sigma, \tag{1.2}$$

dove $F(x, u(x))$ è un campo vettoriale che rappresenta la densità di flusso attraverso ∂A. La forma particulare di F deve riflettere la natura fisica del problema in considerazione e rappresenta una fase di modellizzazione. In ogni caso, applicando il *teorema della divergenza* (assumendo che tutto sia abbastanza regolare) si trova

$$\int_A \text{div} F(x, u(x)) \, dx = 0 \quad \forall A \subset \Omega \tag{1.3}$$

dove per la arbitrarietà di A la funzione integranda deve annullarsi e quindi si trova l'equazione alle derivate parziali

$$\text{div} F(x, u(x)) = 0 \quad x \in \Omega. \tag{1.4}$$

Quest'equazione è di forma di divergenza e viene chiamata una *legge di conservazione*. Per studiarla si deve avere la forma particolare della F che rappresenta il modo nella quale la energia si "muove". Un modello che funzione in molti casi è

$$F(x, u(x)) = -d\nabla u(x), \quad d > 0 \text{ costante}; \tag{1.5}$$

cioè un flusso che è proporzianale al gradiente della densità u. La costante d viene chiamata una *costante di diffusione* e il segno in (1.5) è negativo per indicare che il flusso è diretto da una concentrazione alta ad una bassa. In particolare, questo modello è molto buono per *variazioni piccole* in u in *un'ambiente omogeneo* ed è noto come *la legge di Fick/Fourier/Ohm* quando u rappresenta la *denisità di concentrazione chimica/temperatura/potenziale ellettrico* rispettivamente. In ogni caso, l'equazione (1.4) nel caso (1.5) diventa $d\Delta u = 0$ ovvero le soluzioni sono funzioni armoniche.

1.2 Funzioni olomorfe nell'analisi complessa

Una funzione $f : \Omega \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definita in un dominio del piano complesso a valori complessi si chiama *olomorfa in* Ω quando per ogni $z \in \Omega$ esiste la *derivata complessa*

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{1.6}$$

Il limite in (1.6) è preso rispetto la topologia usuale sul piano complesso; cioè tramite il modulo $|\cdot|$. In particolare, il limite deve esistere e deve essere indipendente dal modo in cui $h \to 0$ in $\mathbf{C}$. Scrivendo f in termini delle sua *parte reale* e *parte immaginaria*; cioè

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{1.7}$$

abbiamo f in termini di due funzioni reali $u = \mathrm{Re} f, v = \mathrm{Im} f$ di due varibili reali $x = \mathrm{Re} z, y = \mathrm{Im} z$. Vicino z se calcoliamo (1.6) lungo un incremento reale h (cioè $\mathrm{Im} h = 0$) si trova

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} \right) + i \left(\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \tag{1.8}$$

e in modo analogo, calcolando lungo un incremento imaginario ih con $h \in \mathbf{R}$ troviamo

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+i(y+h)) - f(x+iy)}{ih} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\left(\frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{h} \right) - i \left(\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{h} \right) \right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Quindi dobbiamo avere il sistema di equazioni alle derivate parziali per u, v

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{1.10}$$

le cosidette <u>*equazioni di Cauchy-Riemann*</u> per la parte reale ed immaginaria di una funzione olomorfe. Se u, v sono di classe $C^2(\Omega)$ (e lo sono per forza anche se non è banale mostrarlo) si trova

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ovvero $\Delta u(x,y) = 0$ nel dominio Ω considerato come un dominio in $\mathbf{R}^2$. In modo analogo, la parte imaginaria v soddisfa anche $\Delta v(x,y) = 0$ in Ω. Quindi si può dire che *le parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche.*

Le funzioni olomorfe sono gli oggetti di base nello studio dell'analisi complessa e godono tantissime proprietà bellisime; per esempio sono tutte di classe C^∞, sono esplicitabili localmente tramite serie di Taylor (sono le funzioni analitiche nel campo complesso), soddisfano la proprietà del valor medio, sono *mappe conformi* nel piano complesso, etc. Vedi per esempio i testi [**?**], [**?**], [**?**].

2 Costruendo funzioni armoniche

In questo paragrafo vogliamo dare qualche esempio concreto di funzioni armoniche e presentare qualche metodo per costruire altri esempi imponendo altre richieste del tipo geometrico/algebrico sulla funzione.

2.1 Primi esempi

Anche se è un po' disonesto uno può considerare funzioni armoniche in una variabile sola; cioè $u \in C^2(a,b)$ tale che $u''(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

Esempio 2.1 *Una funzione u è armonica in un intervallo $(a,b) \subset \mathbf{R}$ se e solo se è una funzione affine; cioè $u(x) = \alpha x + \beta$ per qualche $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.*

Cioè in dimensione 1, lo spazio di funzioni "armoniche" è finito dimensionale ed è uguale allo spazio delle funzioni affine. In dimensione superiore, il fatto che l'equazione è davvero un EDP (e non è un equazione differenziale ordinarie EDO) implica che lo spazio di soluzioni è infinito dimensionale. Communque, l'esempio sugerisce che in dimensione superiore le funzione affini saranno una sotto classe delle funzioni armoniche.

Esempio 2.2 *Per ogni $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ ed ogni $\beta \in \mathbf{R}$ la funzione affine*

$$u(x) = \langle \alpha, x \rangle + \beta = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + \beta$$

è armonica su $\mathbf{R}^n$.

Questi esempi dicono che ogni polimomio di grado 1 è una funzione armonica e questo è un fatto utile nella costruzione di funzioni armoniche con proprietà desiderate. Per esempio possiamo alzare o abbassare i valori di una funzione armonica u nella classe di funzioni armoniche prendendo $u + \beta$ oppure possiamo "aggiustare" il gradiente di u via $u + \langle \alpha, x \rangle$ nella classe di funzioni armoniche. D'altre parte, il fatto che tutte le funzioni affini siano armoniche dipende solo sul fatto che l'equazione di Laplace è una somma di derivate di ordine 2 uguale a zero. La struttura particolare dell'equazione si comincia già a vedere pensando ai polinomi di grado 2.

Esempio 2.3 *Sia $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ una matrice con $a_{ij} \in \mathbf{R}$. La forma quadratica associata ad A*

$$u(x) = \langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

è armonica se e solo se A ha traccia nulla; cioè

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = 0.$$

A questo punto possiamo cominciare di avere qualche idea che le funzioni armoniche devonno essere molto particolari; in particolare, possiamo notare che per una funzione $u \in C^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto

$$\Delta u = \mathrm{tr}[H_u(x)] \tag{2.1}$$

dove $H_u(x) = [\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j]_{n\times n}$ è la *Hessiana* di u che è una matrice simmetrica (per il Teorema di Schwartz) che avrà n autovalori reali. Come conseguenza, si vede che ci potrebbe essere qualche ostruzione ad avere dei massimi e minimi locali forti. Sicuramente non è possible avere H_u positiva o negativa definita. Infatti, è così. Non ci sono estremi locali forti nell'interno del dominio Ω e questo fatto viene chiamato il principio di massimo/ minimo forte per le funzioni armoniche. Torniamo a questo fatto nel paragrafo 3.

Infine, vale la pena dire che lo spazio della funzioni armoniche ha una struttura lineare che deriva dalla linearità dell'equazione.

Proposizione 2.4. *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Allora lo spazio della funzioni armoniche in Ω*

$$\mathcal{A}(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) : \quad \Delta u = 0 \ \text{ in } \Omega\} \tag{2.2}$$

è uno spazio vettoriale (sottospazio di $C^2(\Omega)$).

Dim. Siano $u, v \in \mathcal{A}(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Allora la funzione $w = \alpha u + \beta v$ soddisfa

$$\Delta w = \alpha \Delta u + \beta \Delta v = 0 \ \text{ in } \Omega.$$

2.2 Invarianze nell'equazione di Laplace

Il punto qui è che per costruire altri esempi di funzioni armoniche partendo da soluzioni note, possiamo sfruttare il comportamento che l'operatore Δ ha rispetto a trasformazioni elementari dello spazio $\mathbf{R}^n$. Cioè, vogliamo trovare delle trasformazioni $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ che conservanno lo spazio di soluzioni in questo senso: *sia u una qualsiasi soluzione di* (1.1) *in Ω, allora la funzione $v(x) = u(Tx)$ è una soluzione di* (1.1) *in* $T^{-1}(\Omega) = \{x \in \mathbf{R}^n : Tx \in \Omega\}$. Un tale T sarà chiamato *invarianze* per l'equazione (1.1). In seguito considereremo qualche applicazione di queste invarianze.

Proposizione 2.5: (Invarianza rispetto le traslazioni) *Siano* $p \in \mathbf{R}^n$ *e* u *armonica in* Ω. *Allora la funzione traslata*

$$u_p(x) = u(x-p), \quad x \in \Omega + \{p\} \tag{2.3}$$

è armonica in $\Omega + \{p\} = \{x \in \mathbf{R}^n : \ x - p \in \Omega\}$.

Dim: Per prima cosa notiamo che la traslazione rispetto a p è una trasformazione $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ con la regola $\tilde{x} = Tx = x - p$ e l'insieme $\Omega + \{p\} = T^{-1}(\Omega)$. Infatti, $x \in T^{-1}(\Omega)$ se e solo se $Tx = x - p \in \Omega$. Per mostrare che $u_p(x)$ definita tramite (2.3) è armonica basta notare che

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[u(x-p)] = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x-p)$$

per la regola della catena e quindi $\Delta[u(x-p)] = (\Delta u)(x-p) = 0$ essendo $x-p \in \Omega$ per $x \in \Omega + \{p\}$.

Proposizione 2.6: (Invarianza rispetto le dilatazoni) *Sia* $\lambda > 0$ *e* u *armonica in* Ω. *Allora la funzione dilatata*

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x) \quad x \in \lambda^{-1}\Omega \tag{2.4}$$

è armonica in $\lambda^{-1}\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : \ \lambda x \in \Omega\}$.

Dim: Per prima cosa notiamo che la dilatazione rispetto a λ è una trasformazione $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ con la regola $\tilde{x} = Tx = \lambda x$ e l'insieme $\lambda^{-1}\Omega = T^{-1}(\Omega)$. Infatti, $x \in T^{-1}(\Omega)$ se e solo se $Tx = \lambda x \in \Omega$. Per mostrare che $u_\lambda(x)$ definita tramite (2.4) è armonica basta notare che

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[u(\lambda x)] = \lambda \frac{\partial u}{\partial x_j}(\lambda x)$$

per la regola della catena e quindi $\Delta[u(\lambda x)] = \lambda^2 (\Delta u)(\lambda x) = 0$ essendo $\lambda x \in \Omega$ per $x \in \lambda^{-1}\Omega$.

Proposizione 2.7: (Invarianza rispetto le trasformazioni ortogonali) *Sia* $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *una trasformazione lineare con matrice* $[T_{ij}]$ *ortogonale (rispetto la base canonica per* $\mathbf{R}^n$*) ; cioè* $T^tT = I = TT^t$. *Sia* u *armonica in* Ω. *Allora la funzione traformate*

$$u_T(x) = u(Tx) \quad x \in T^{-1}(\Omega) \tag{2.5}$$

è armonica in $T^{-1}(\Omega) = \{x \in \mathbf{R}^n : \ Tx \in \Omega\}$.

Dim: (caso $\mathbf{n = 2}$) Il caso $n \geq 3$ è lasciato per esercizio. Abbiamo

$$Tx = \begin{bmatrix} T_{11}x_1 + T_{12}x_2 \\ T_{21}x_1 + T_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Tx)_1 \\ (Tx)_2 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

e quindi per la regola della catena

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[u_T(x)] = \frac{\partial u}{\partial x_1}(Tx)\frac{\partial}{\partial x_1}[(Tx)_1] + \frac{\partial u}{\partial x_2}(Tx)\frac{\partial}{\partial x_1}[(Tx)_2] = T_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}(Tx) + T_{21}\frac{\partial u}{\partial x_2}(Tx)$$

ed in modo analogo si trova

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[u_T(x)] = T_{11}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(Tx) + [T_{11}T_{21} + T_{21}T_{11}]\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(Tx) + T_{21}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}[u_T(x)] = T_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}(Tx) + T_{21}\frac{\partial u}{\partial x_2}(Tx) \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[u_T(x)] = T_{12}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(Tx) + [T_{12}T_{22} + T_{12}T_{22}]\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(Tx) + T_{22}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \tag{2.9}$$

Quindi combinando (2.7) – (2.9) e usando $I = T^tT$ ovvero

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^2 + T_{12}^2 & T_{11}T_{21} + T_{12}T_{22} \\ T_{11}T_{21} + T_{12}T_{22} & T_{21}^2 + T_{22}^2 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

si trova

$$\Delta[u_T(x)] = \Delta u(Tx) = 0 \quad \text{essendo} \quad Tx \in \Omega \quad \text{e} \quad u \in \mathcal{A}(\Omega).$$

2.3 Costruendo altre funzioni armoniche

Avendo in mano qualche invarianza T per l'equazione di Laplace, possiamo usarle per ridurre il numero di variabili nelle soluzioni via *un'riduzione per simmetria.* L'idea è la seguente. Prendiamo qualche famiglia $\mathcal{T}$ di invarianze $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ per Δ e cerchiamo delle soluzioni che siano *invariante rispetto la famiglia $\mathcal{T}$*. L'idea è più chiara facendo qualche esempio.

Esempio 2.8 *Sia $u \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$ tale che u è invariante ripetto le traslazioni in x; cioè*

$$u(x - x_0, y) = u(x, y) \quad x_0 \in \mathbf{R}, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \tag{2.11}$$

allora $u(x, y) = f(y)$ per qualche funzione f di y e quindi per l'Esempio 2.1 abbiamo $u(x, y) = \alpha y + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Infatti, è chiaro che u deve dipendere solo su y e quindi $0 = \Delta u = f_{xx} + f_{yy} = f''(y)$ e quindi il f è affine in y.

Adesso consideriamo funzioni armoniche che siano invarianti rispetto alle rotazioni in $\mathbf{R}^n$. Ogni rotazione è una trasformazione ortogonale e quindi per Proposizione 2.7 un'invarianza. Una funzione u invariante per le rotazione sarà una funzione che dipende solo dalla distanza dall'origine; cioè $u(x) = f(||x||)$ dove $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ è una funzione di una sola variabile. Tale funzioni vengono chiamte *funzioni radiali*. Essendo $||x||$ continua ma non differenziabile nell'origine possiamo imaginare che ci potrebbe essere qualche problema nell'origine. Vediamo. Se calcoliamo il laplaciano di $u(x) = f(\rho)$ dove abbiamo messo $\rho = ||x||$ troviamo via la regola della catena: per ogni $j = 1, \ldots, n$

$$u_{x_j} = f'(\rho)\rho_{x_j}, \quad u_{x_j x_j} = f''(\rho)\rho_{x_j}^2 + f'(\rho)\rho_{x_j x_j}$$

dove abbiamo

$$\rho_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[x_1^2 + \ldots x_n^2\right]^{1/2} = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + \ldots x_n^2\right]^{-1/2} 2x_j = \frac{x_j}{\rho}$$

e

$$\rho_{x_j x_j} = \frac{1}{\rho} - x_j \rho^{-2} \rho_{x_j} = \frac{1}{\rho} - \frac{x_j^2}{\rho^3}.$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta u &= f''(\rho)\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\rho^2}\right] + f'(\rho)\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{x_j^2}{\rho^3}\right)\right] \\ &= f''(\rho) + \left[\frac{n-1}{\rho}\right] f'(\rho) = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Quindi le funzioni armoniche invariante rispetto le rotazioni sono determinate come soluzioni dell'equazione differenziale ordinarie (2.12). Quest'equazione diventa un'equazione del primo ordine con variabili separabile con la sostituzione $g(\rho) = f'(\rho)$. Risolvendolo si trova esempi importanti di funzioni armoniche (non costanti) che sono alle fine singolari nell'origine. In particolare, abbiamo:

Esempio 2.9 *In dimensione $n = 2$ le funzioni armoniche (non costanti) con simmetria radiale sono armoniche in $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ e sono tutte della forma*

$$u(x) = u(x_1, x_2) = C_1 \ln\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) + C_2, \quad C_i \in \mathbf{R}. \tag{2.13}$$

Esempio 2.10 *In dimensione $n \geq 3$ le funzioni armoniche (non costante) con simmetria radiale sono armoniche in $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ e sono tutte della forma*

$$u(x) = C_1 ||x||^{2-n} + C_2 \quad C_i \in \mathbf{R}. \tag{2.14}$$

Notiamo che con una scelta opportuna delle costanti $C_2 = 0$ e C_1 si può definire le cosidette *soluzioni fondamentali* dell'equazione di Laplace. Sono delle soluzioni *singolari* assai utile nello studio di costruzione di soluzioni, regolarità delle soluzioni, etc.

Infine, consideriamo delle funzioni armoniche **nel piano** che sono invarianti rispetto le dilatazioni; cioè $u(\lambda x) = u(x)$ per ogni $\lambda > 0$. Introducendo le coordinati polari $(x, y) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$ nel piano e definendo la funzione $v(\rho, \theta) = u(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$ con u armonica in $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ si può verificare che v deve soddisfare l'equazione

$$\Delta_{\text{pol}} v(\rho, \theta) = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta} = 0, \quad (\rho, \theta) \in \Omega^* \tag{2.15}$$

dove Ω^* è il dominio nel piano polare in correspondenza con Ω. Ovviamente dobbiamo fare attenzione all'origine dove $\rho = 0$. Adesso se u è una funzione invariante per le dilatazioni è chiaro che la funzione v associata dipende solo da θ; cioè $v(\rho, \theta) = f(\theta)$. Così abbiamo il seguente esempio risolvendo l'equazione (2.15) per v nel caso in cui $v_\rho = v_{\rho\rho} = 0$.

Esempio 2.11 *Le funzioni armoniche nel semi-piano $x > 0$ invariante rispetto le dilatazioni sono della forma*

$$u(x, y) = C_1 \arctan(y/x) + C_2, \quad C_i \in \mathbf{R} \tag{2.16}$$

3 Proprietà qualitative delle funzioni armoniche

In questo paragrafo esaminiamo delle proprietà qualitative che sono soddisfate da ogni funzione armonica. Queste proprietà forniscono informazioni sulle soluzioni dell'eqazione di Laplace e rappresentano un'informazione preziosa da almeno due punti di vista. Uno è *a posteriori* nel senso che possiamo confrontare una presunta soluzione con le proprietà che si sa lei deve avere. L'altro è *a priori* nel senso che possiamo cercare di usare queste informazioni (spesso nella forma di stime oppure formule di rappresentazione) per auitarci o a mostrare l'esistenza di una soluzione con certe caratteristiche oppure di addiritura a costruirla. Consideriamo adesso qualche proprietà insieme con le sue prime applicazioni.

3.1 Il principio di massimo

Abbiamo già notato in paragrafo 2.1 che una funzione armonica ha una certa avversione ad avere massimi/minimi locali. Come un primo passo possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 3.1. (Principio di massimo/minimo debole) *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto e limitato. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica in Ω. Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \text{e} \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \tag{3.1}$$

In particolare esistono $x_m, x_M \in \partial\Omega$ tali che

$$\min_{\overline{\Omega}} u = u(x_m) \leq u(x) \leq u(x_M) = \max_{\overline{\Omega}} u, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.2}$$

Dim: Facciamo solo il caso del massimo notando che il caso del minimo è analogo. In alternativa, si vede che mettendo $v = -u$ il principio di minimo per u è il principio di massimo per v.

Passo 1: (Weierstrass) Abbiamo $u \in C^0(\overline{\Omega})$ con $\overline{\Omega}, \partial\Omega$ compatti quindi i massimi sono assunti e vale sicuramente la disuguaglianza

$$\max_{\overline{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u \tag{3.3}$$

Rimane solo di mostrare la disuguaglianza opposta per avere la prima formula in (3.1). Inoltre in tal caso esiste $x_M \in \partial\Omega$ per cui vale la seconda disuguaglianze in (3.2).

Passo 2: (Massimi globali per funzioni strettamente sub-armoniche) Consideriamo una funzione $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che

$$\Delta v(x) = \operatorname{tr}(H_v(x)) > 0 \quad x \in \Omega \tag{3.4}$$

Tale v viene detta *strettamente sub-armonica in* Ω. Affermiamo che **non** esiste un massimo nel interno per v. Per assurdo supponiamo $x_M \in \Omega^\circ$ tale che $v(x_M) = \max_{\overline{\Omega}} v$. Questo massimo globale nell'interno deve essere anche un massimo locale e quindi abbiamo

$$\nabla v(x_M) = 0 \tag{3.5}$$

$$H_v(x_M) \leq 0 \tag{3.6}$$

che è assurdo.

Passo 3: (Perturbazione sub-armonica di u) Dato $\epsilon > 0$ arbitrario consideriamo la perturbazione

$$v(x) = u(x) + \epsilon ||x||^2 = u(x) + \epsilon \left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right] \tag{3.7}$$

di u. Abbiamo $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e v strettamente sub-armonica

$$\Delta v = \Delta u + \epsilon[2n] = 2n\epsilon > 0.$$

Per il Passo 2, il massimo di v deve essere assunto solamente sul bordo di Ω; cioè

$$\exists x_0 \in \partial\Omega : \quad v(x) \leq v(x_0) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} u(x) \leq v(x) \leq v(x_0) &= u(x_0) + \epsilon ||x_0||^2, \ \forall x \in \overline{\Omega} \\ &\leq \max_{\partial\Omega} u + \epsilon K, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \end{aligned}$$

perchè $x_0 \in \partial\Omega$ ed esiste K perchè $\overline{\Omega}$ è limitato. Infine ϵ è arbitrario e quindi

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega}$$

e la dimostrazione è completa.

Notiamo che la formula (3.2) consiste in una stima a priori sui valori delle soluzioni di $\Delta u = 0$ in termine dei valori sul bordo. Questi valori al bordo determinano le soluzioni in modo unico.

Corollario 3.2. (Determinazione unica di una funzione armonica) *Siano Ω un aperto limitato e $g \in C^0(\partial\Omega)$ una funzione data. Se esiste una funzione armonica $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che $u_{|\partial\Omega} = g$ allora u è unica.*

Dim: Per assurdo supponiamo che ci sono due funzioni armoniche u, v uguali a g al bordo. Allora la funzione $w = u - v$ è una funzione armonica che si annulla sul bordo. Quindi per il principio di massimo/minimo abbiamo

$$\max_{\overline{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w = 0 \quad \text{e} \quad \min_{\overline{\Omega}} w = \min_{\partial\Omega} w = 0.$$

Cioè $w \equiv 0$ ovvero $u \equiv v$.

Questo problema di determinare una funzione armonica con valori prescelti sul bordo; cioè data $g \in C^0(\partial\Omega)$ trovare $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ in } \ \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{3.8}$$

è un esempio di un *problema al contorno* per l'equazione di Laplace, il cosidetto *Problema di Dirichlet*.

3.2 La proprietà del valor medio

Forse la proprietà più bella e più improbabile (a prima vista) delle funzioni armoniche è il fatto che il suo valore in ogni punto fissato è la media dei suoi valori sulle palle (e sulle sfere) intorno quel punto fissato.

Teorema 3.3. *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto e connesso. Sia $u \in C^2(\Omega)$ armonica in Ω. Per ogni palla $B_R(x) \subset \Omega$ si ha*

$$u(x) = \frac{1}{|B_R(x)|_n} \int_{B_R(x)} u(y)\, dy \tag{3.9}$$

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_R(x)|_{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y)\, d\sigma_{n-1}(y) \tag{3.10}$$

dove σ_{n-1} è l'elemento di misura $n-1$ dimensionale sulla sfera $S_R(x) = \partial B_R(x)$.

Facciamo qualche commento prima di cominciare la "dimostrazione". Per prima cosa si può mostrare che le formule (3.9) e (3.10) sono equivalenti sfruttando la seguente formula di *co-area* (cf. [**?**] formule (108.41) e (108.45)))

$$\int_{B_R(0)} f(x)\,dx = \int_0^R \left(\int_{\partial B_t(0)} f d\sigma_{n-1} \right) dt \tag{3.11}$$

che è una formula di "riduzione per bucce" . Ovviamente abbiamo discusso solo i casi di σ_{n-1} per $n = 2, 3$ ma un discorso sul caso di dimensione superiore si può trovare in [**?**], capitolo 12 ed in particolare paragrafo 108.

Dim: (formula 3.10 per n = 3) Possiamo assumere $0 \in \Omega$ sfruttando l'invarianza per traslazione e quindi dobbiamo mostrare solo che

$$u(0) = \frac{1}{|\partial B_R(0)|_2} \int_{\partial B_R(0)} u\,d\sigma \tag{3.12}$$

Consideriamo tutte le medie sulle sfere di raggio $r \in (0, R)$; cioè definiamo la funzione

$$\psi(r) = \frac{1}{|\partial B_r(0)|_2} \int_{\partial B_R(0)} u\,d\sigma \tag{3.13}$$

Affermiamo che $\psi'(r) = 0$ per ogni r e quindi $\psi(r)$ è costante. Facendo tendere $r \to 0^+$ troviamo $u(0)$ perchè u è continua e facendo $r \to R^-$ troviamo il membro destro di (3.12). Quindi rimane solo di verificare la affermazione. In coordinate sferiche abbiamo

$$\begin{aligned}
\psi(r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi\, d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) \sin\varphi\, d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(\Phi(r;\theta,\varphi)) \sin\varphi\, d\theta d\varphi \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

dove $\Phi(r;\theta,\varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$ è la parametrizzazione della sfera di raggio r. Calcolando la derivata rispetto a r possiamo derivare sotto il segno dell'integrale trovando

$$\psi'(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle \nabla u(\Phi(r;\theta,\varphi)), \Phi_r(r;\theta,\varphi) \rangle \sin\varphi\, d\theta d\varphi \tag{3.15}$$

Il vettore

$$\Phi_r(r;\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$$

è un versore normale esterna ν_{e} sulla sfera perchè se pensata in funzione di r con (θ, φ) fissati la funzione $\Phi(r; \theta, \varphi)$ traccia un segmento radiale che è ortogonale ad ogni sfera. Inoltre si verifica che questo vettore è un versore. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
\psi'(r) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \langle \nabla u(\Phi(r;\theta,\varphi)), \nu_{\mathrm{e}}\rangle \sin\varphi \, d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \langle \nabla u(\Phi(r;\theta,\varphi)), \nu_{\mathrm{e}}\rangle r^2 \sin\varphi \, d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{|\partial B_r(0)|_2}\int_{\partial B_R(0)} \langle \nabla u, \nu_{\mathrm{e}}\rangle \, d\sigma \\
&= |\partial B_r(0)|_2 \int_{B_R(0)} \mathrm{div}(\nabla u)\, dx = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

dove abbiamo usato il Teorema della divergenza e u armonica in $B_r(0)$. La dimostrazione è completa.

Concludiamo questo paragrafo mostrando che la proprietà del valor medio implica la versione forte del principio di massimo.

Teorema 3.4: (Principio di massimo/minimo forte) *Sia Ω aperto. limitato, e connesso. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica in Ω. Se esiste massimo o minimo globale nell'interno di Ω allora u è costante.*

Cioè in questo contesto i massimi, minimi esistono ma solo al bordo, tranne il caso banale di una funzione costante.

Dim: Di nuovo facciamo solo il caso del massimo (vedi il commento all'inizio della dimostrazione di Teorema 3.1). Inoltre, pensiamo alla dimensione $n = 3$ anche se l'argomento è identico per ogni dimensione; dipende solo sul Teorema 3.3.

Assumiamo che esita $x_M \in \Omega^\circ$ t.c. $u(x_M) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Vogliamo mostrare che u è costante. Scegliamo r_M t.c. $\overline{B}_{r_M}(x_M) \subset \Omega$. Essendo u armonica in $B_{r_M}(x_M)$ abbiamo per ogni $r \in (0, r_M]$

$$u(x_M) = \frac{1}{|\partial B_r(x_M)|}\int_{\partial B_r(x_M)} u \, d\sigma = \bar{u}_{|\partial B_r(x_M)} \leq \max_{\partial B_r(x_M)} u \leq u(x_M). \tag{3.17}$$

Quindi tutte le disuguaglianze in (3.17) sono uguaglianze e abbiamo la media di u su ogni sfera di raggio $r \leq r_M$ ugale al massimo globale M su $\overline{\Omega}$. Di conseguenza abbiamo $u \equiv M$ su $\overline{B}_{r_M}(x_M)$. Essendo Ω limitato e connesso per archi troviamo $u \equiv M$ in Ω ma $u \in C^0(\overline{\Omega})$ e quindi u è costante ed uguale a M ovunque.

Concludiamo con una osservazione. Abbiamo detto a prima vista la proprietà del valor medio sembra improbabile. Ma se pensiamo alla applicazione del problema di temperatura u in equillibrio, stiamo dicendo che lo stato preferito è una distribuzione molto uniforme dove il valore in un punto è la media dei valori dei vicini. Qui è importante di non avere fonti di energia termica dentro il dominio per cui vale l'equazione di Laplace e non quello di Poisson con un termine di sorgente $\Delta u = f$ (vedi Esercizio 4.7).

3.3 Il Teorema di Liouville

Qui vogliamo indicare una proprietà delle funzioni armoniche sul tutto lo spazio $\mathbf{R}^n$. Devono essere o illimitate oppure costante. La dimostrazione è fatta usando la proprietà del valor medio sulle palle più una *stima a priori* sul gradiente di u. Di nuovo ci limitiamo ad una dimostrazione completa solo nel caso di dimensione $n = 3$.

Lemma 3.5: *Sia $u \in C^3(\overline{B}_r(x_0))$ armonica in $B_r(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ e $u \geq 0$. Allora*

$$|D_{x_j} u(x_0)| \leq \frac{n}{r} u(x_0), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.18}$$

Dim: Essendo $u \in C^3$ ogni derivata parziale $v = D_{x_j}$ è anche lei una funzione armonica. Quindi possiamo applicare la formula (3.9) del valor medio sulla palla per trovare

$$D_{x_j} u(x_0) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} D_{x_j} u(x)\, dx = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) \nu_j \, d\sigma, \tag{3.19}$$

dove ν_j è il componente j-esima del normale esterna e abbiamo uato il Teorema della divergenza. Adesso usando $u \geq 0$ sul bordo e $|\nu_j| \leq 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} |D_{x_j} u(x_0)| &\leq \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, d\sigma \\ &= \frac{|\partial B_r(x_0)|}{|B_r(x_0)|} u(x_0) = \frac{n}{r} u(x_0), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula (3.10) del valor medio.

Notiamo che l'ipotesi di regolarità $u \in C^3$ è solamente tecnica; in particolare, si può mostrare che ogni funzione armonica è necessariamente di classe C^∞. In ogni caso, il nostro risultato è il seguente.

Teorema 3.6. (di Liouville) *Sia $u \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ una funzione armonica su tutto lo spazio. Se u è limitata allora u è costante.*

Dim: Assumiamo u limitata e armonica su $\mathbf{R}^n$. Possiamo assumere $u \geq 0$ altrimenti possiamo trattare $v = u - m$ dove $m = \inf u$. Assumiamo anche $u \in C^3(\mathbf{R}^n)$. Per ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$ fisso, il Lemma 3.5 implica

$$|\nabla u(x_0)|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left[D_{x_j} u(x_0)\right]^2 \leq \frac{n^2}{r^2} u(x_0) \quad \forall r > 0$$

e quindi mandando $r \to +\infty$ si trova $|\nabla u(x_0)| = 0$ per ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$ connesso. Quindi u è costante e la dimostrazione è completa.

Infine osserverviamo che c'è tutta una storia ancora da raccontare. In particolare, il Lemma 3.5 apre tutto un discorso sul problema di ottenre stime a priori sulle soluzioni. Altre proprietà qualitative seguono ma ci fermiamo qui per il momento.

4 Esercizi

Esercizio 4.1. Verificare le affermazioni fatte negli Esempi 2.1, 2.2, 2.3.

Esercizio 4.2. Mostrare la Proposizione 2.7 nel caso generale di dimensione n. Suggerimento: la formula

$$\delta_{ij} = [T^t T]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [T^t]_{ik} T_{kj} = \sum_{k=1}^{n} [T]_{ki} T_{kj}$$

potrebbe essere utile.

Esercizio 4.3. Risolvere l'equazione differenziale (2.12) e così completare le affermazioni degli Esempi 2.9, 2.10.

Esercizio 4.4. Verificare la formula (2.15) per il laplaciano in coordinate polari e completare la affermazione dell'Esempio 2.11

Esercizio 4.5. Verificare che il principio di minimo per u equivale il principio di massimo per $v = -u$. Quale equazione è soddisfata da v? Che cos'è la relazione fra $\max(-u)$ e $\min(u)$?

Esercizio 4.6. È possibile trovare una funzine armonica sul disco $B_2(0) \subset \mathbf{R}^2$ t.c.

$$u(\bar{x}) = 10, \quad \bar{x} \in B_2(0) \ \text{ e } \ u = x_1^2 \ \text{ sul bordo?}$$

È possibile con $u(\bar{x}) = 4$?

Esercizio 4.7. Mostrare il seguente teorema di unicità per il problema di Dirichet per *l'equazione di Poisson*. Siano Ω aperto e limitato, $f \in C^0(\Omega), g \in C^0(\partial\Omega)$ funzioni date. Se esiste $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = f \ \text{ in } \ \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{4.1}$$

allora u è unica.

Esercizio 4.8. Nel caso di dimensione $n = 3$ mostrare che le formule di valor medio (3.9) e (3.10) sono equivalenti fra loro quando $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Suggerimento: usare la formula di riduzione (3.11).

Esercizio 4.9. Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ armonica in $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ aperto e limitato con bordo amissibile per il Teorema della divergenza. Mostrare che il flusso del gradiente attraverso il bordo è nullo; cioè

$$0 = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu_{\mathrm{e}} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma$$

dove ν è il versore normale esterna al bordo e la quantità $\partial u / \partial \nu$ viene chiamato *derivata normale al bordo* .

Esercizio 4.10. Sia Ω aperto, limitato, con bordo ammissibile per il Teorema della divergenza. Mostrare la seguente *condizione di compatibilità* per il *problema di Neumann* per l'equazione di Poisson: Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = f \ \text{ in } \ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Allora il termine noto f ha media nulla su Ω. Che cosa succede nel caso $\partial u/\partial \nu = g$ sul bordo?

Esercizio 4.11 Mostrare le *identità di Green*: Siano $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ con $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ammissibile per il Teorema della divergenza. Allora

$$\int_\Omega v\Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma - \int_\Omega \langle \nabla v, \nabla u\rangle\, dx \tag{4.3}$$

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})\, d\sigma \tag{4.4}$$

Cosa dice la formula (4.4) nel caso in cui u è armonico in Ω e abbiamo $v(x) = G^y(x)$ t.c. $v_{|\partial\Omega} = 0$ e $\int_\Omega u\Delta v\, dx = u(y)$ con $y \in \Omega$? Questo è la base del metodo delle *funzioni di Green* per rappresentare le soluzioni dell'equazione di Laplace/Poisson.

Esercizio 4.12 La funzione

$$u(x) = \frac{\sin(||x||^2)}{1 + ||x||^2} \arctan(x_1 + x_2 + x_3)$$

è armonica su $\mathbf{R}^3$?

References

[1] L. Ahlfors - *Complex Analysis, 3rd Edition*, McGraw-Hill, New York, 1976.

[2] L. C. Evans - *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics **Vol. 19**, Americam Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[3] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone - *Analisi Matematica Due*, Liguori Editore, Napoli, 1996.

[4] G. Gillardi - *Analisi III*, McGraw-Hill Italia, Milano, 1994.

[5] W. Rudin - *Analisi Reale e Complessa*, Editore Boringhieri, Torino, 1974.

[6] W. A. Strauss - *Partial Differential Equations, An Introduction*, John Wiley & Sons, New York, 1992.