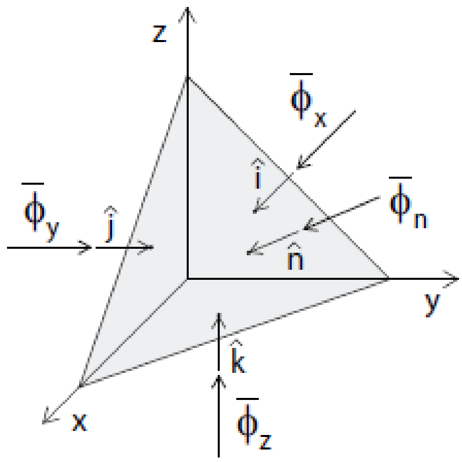
STATICA DEI FLUIDI

PRESSIONE = determiniamo la pressione analizzando il tetraedro di Cauchy. Per farlo applichiamo la seconda legge della dinamica semplificata al caso statico. In questo caso possiamo trascurare la forza di volume perché è di un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla forza di superficie



$$\sum \overline{F_S} + \sum \overline{F_V} = \overline{0}$$

$$\overline{F_V} = \rho \bar{f} dW$$

$$\sum \overline{F_S} = \bar{\phi}_x dA_x + \bar{\phi}_y dA_y + \bar{\phi}_z dA_z + \bar{\phi}_n dA$$

$$\bar{\phi}_x dA_x + \bar{\phi}_y dA_y + \bar{\phi}_z dA_z + \bar{\phi}_n dA_n + \rho \bar{f} dW = \overline{0}$$

$$\bar{\phi}_x dA_x + \bar{\phi}_y dA_y + \bar{\phi}_z dA_z + \bar{\phi}_n dA = \overline{0}$$

$$\bar{\phi}_x = \phi_{xx}\hat{\imath} \qquad \bar{\phi}_y = \phi_{yy}\hat{\jmath}$$

$$\bar{\phi}_z = \phi_{zz}\hat{k} \qquad \bar{\phi}_n = \phi_{nn}\hat{n}$$

$$\phi_{xx}\hat{\imath} dA_x + \phi_{yy}\hat{\jmath} dA_y + \phi_{zz}\hat{k} dA_z + \phi_{nn}\hat{n} dA = \overline{0}$$

Proietto lungo la direzione y: $\phi_{yy} dA_y + \phi_{nn} n_y dA = 0$

$$dA_y = -n_y dA$$

$$\phi_{yy}(-n_y dA) + \phi_{nn} n_y dA = 0$$

$$\phi_{yy} = \phi_{nn}$$

Così anche in tutte le altre direzioni e ottengo: $\phi_{yy} = \phi_{nn} = \phi_{xx} = \phi_{zz} = p$

TENSORE DEGLI SFORZI = grazie all'analisi del tetraedro di Cauchy possiamo definire il tensore degli sforzi che ha come elementi della diagonale principale le componenti normali degli sforzi mentre fuori dalla diagonale principale ha le componenti tangenziali

$$\overline{\overline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zx} & \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix}$$

TENSORE DEGLI SFORZI IN STATICA = per un fluido in quiete le componenti tangenziali degli sforzi sono nulli quindi il tensore degli sforzi si semplifica come segue:

$$\overline{\overline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \phi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = p\overline{\overline{\mathrm{I}}}$$

$$\nabla\overline{\overline{\Phi}} = \frac{\partial \overline{\phi_y}}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial \overline{\phi_z}}{\partial z}\hat{k} + \frac{\partial \overline{\phi_x}}{\partial x}\hat{\imath}$$

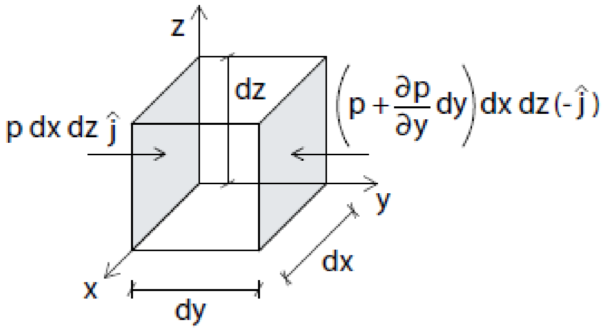
EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA = ricaviamo ora l'equazione indennità della statica dei fluidi analizzando un parallelepipedo infinitesimo di volume. Anche in questo caso deve valere la seconda legge della dinamica semplificata al caso statico. In questo caso non possiamo sperò semplificare la forza di volume perché non è di un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla forza di superficie. Per calcolare le forse di superfice sfruttiamo la meccanica del continuo

$$\sum \bar{F_S} + \sum \overline{F_V} = \bar{0}$$

$$\overline{F_V} = \rho \bar{f} dW \qquad dW = dxdydz \qquad \overline{F_V} = \rho \bar{f} dxdydz$$

$$\bar{F_S} = pdxdz\hat{j} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dxdz(-\hat{j}) + pdxdy\hat{k} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)dxdy\left(-\hat{k}\right) + pdydz\hat{\imath} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz(-\hat{\imath}) =$$
$$= \frac{\partial p}{\partial y}dydxdz(-\hat{j}) + \frac{\partial p}{\partial z}dzdxdy\left(-\hat{k}\right) + \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz(-\hat{\imath}) =$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial y}dydxdz\hat{j} - \frac{\partial p}{\partial z}dzdxdy\hat{k} - \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz\hat{\imath}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}dydxdz\hat{j} - \frac{\partial p}{\partial z}dzdxdy\hat{k} - \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz\hat{\imath} + \rho \bar{f} dxdydz = \bar{0}$$



$$-\frac{\partial p}{\partial y}dydxdz\hat{j} - \frac{\partial p}{\partial z}dzdxdy\hat{k} - \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz\hat{\imath} = -\rho \bar{f} dxdydz$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}dydxdz\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}dzdxdy\hat{k} + \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz\hat{\imath} = \rho \bar{f} dxdydz$$

$$\nabla p = \rho \bar{f}$$

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA PER FLUIDI PESANTI = se consideriamo come forza unitaria di volume la forza peso otteniamo:

$$\bar{f} = -g\nabla\tilde{z}$$

$$\nabla p = -\rho g \nabla \tilde{z}$$

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA PER FLUIDI PESANTI INCOMPRIMIBILI (LEGGE DI STEVINO) = se consideriamo un fluido incomprimibile abbiamo la densità costante. In questo caso dunque possiamo considerare costante anche il prodotto tra densità e accelerazione di gravità, il peso specifico.

$$\rho = cost \qquad \gamma = \rho g = cost$$

$$\nabla p = -\rho g \nabla \tilde{z}$$

$$\frac{\nabla p}{\gamma} = \frac{-\rho g \nabla \tilde{z}}{\gamma}$$

$$\frac{\nabla p}{\gamma} = -\nabla \tilde{z}$$

$$\frac{\nabla p}{\gamma} + \nabla \tilde{z} = \bar{0}$$

$$\nabla\left(\tilde{z}+\frac{p}{\gamma}\right)=\bar{0}$$

Abbiamo così ottenuto la legge di Stevino che afferma che la quota piezometrica per un fluido pesante incomprimibile in quiete è costante. La quota piezometrica è la somma della quota geodetica $\tilde{z}$ e dell'altezza piezometrica p/γ. Questa legge indica che la pressione diminuisce linearmente con la quota geodetica. Tale legge è valida solo per i fluidi incomprimibili e in questi casi è sufficiente per determinare la distribuzione della pressione nel fluido

ANDAMENTO PRESSIONE NEI FLUIDI COMPRIMIBILI = se siamo invece in presenza di un fluido comprimibile la legge di Stevino non è più valida e dunque occorre utilizzare la legge indefinita della statica dei fluidi che abbiamo visto precedentemente. In questi casi inoltre questa equazione non è più sufficiente per determinare la distribuzione della pressione nel fluido: occorre infatti un'altra equazione, nota come equazione di stato, che lega la densità alla pressione e alla temperatura. Se il fluido comprimibile è un gas l'equazione di stato è la seguente:

$$\frac{p}{\rho}=\frac{RT}{M_{mol}}$$

$$\rho=\frac{pM_{mol}}{RT}$$

$$\nabla p=-\rho g\nabla\tilde{z}$$

$$\nabla p=-\frac{pM_{mol}}{RT}g\nabla\tilde{z}$$

$$\frac{\nabla p}{p}=-\left(\frac{pM_{mol}}{RT}g\nabla\tilde{z}\right):p$$

$$\ln p=-\frac{M_{mol}}{RT}g\nabla\tilde{z}$$

$$p=p_0\exp\left[-g\frac{M_{mol}}{RT}(\tilde{z}-\tilde{z}_0)\right]$$

EQUAZIONE GLOBALE DELLA STATICA DEI FLUIDI PESANTI = spesso può essere utile determinare la forza finita che un fluido in quiete esercita su una certa superficie e non conoscere il valore della pressione in un determinato punto. A questo scopo ricaviamo l'equazione globale della statica dei fluidi integrando l'equazione indefinita della statica dei fluidi su un volume finito detto volume di controllo:

$$\int_W \nabla p dW=\int_W \rho\bar{f}\,dW$$

$$\int_W \nabla p dW=teo\ del\ gradiente=-\int_A p\hat{n}dA=\overline{\Pi_p}$$

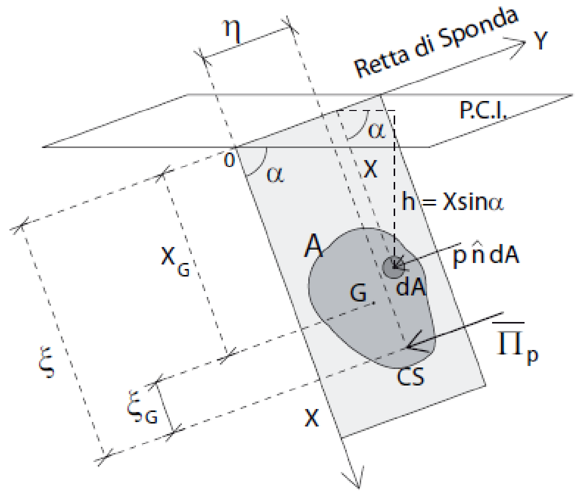
$$\int_W -\rho g\nabla\tilde{z}\,dW=\bar{G}$$

$$\bar{G}+\overline{\Pi_p}=\bar{0}$$

SPINTE STATICHE SU SUPERFICIE PIANA = vediamo ora come determinare le spinte su una superficie piana. Consideriamo una superficie piana generica di area A che giace su un piano inclinato di un certo angolo α rispetto al piano dei carichi idrostatici di un fluido pesante incomprimibile in quiete. Definiamo retta di sponda l'intersezione tra il piano dei carichi idrostatici e il piano in cui giace la superficie. Fissiamo poi un sistema di riferimento in cui l'asse Y coincide con la retta di sponda e l'asse X giace sul piano contenente A ed è ortogonale a Y. La forza esercitata dalla superficie del fluido è rappresenta dalla seguente equazione:

$$\overline{\Pi}_p = \int_A p\hat{n}\, dA =$$
$$= \hat{n}\int_A p\, dA =$$
$$= \hat{n}\int_A \gamma h\, dA =$$
$$= \hat{n}\int_A \gamma X \sin\alpha\, dA =$$
$$= \hat{n}\gamma \sin\alpha \int_A X\, dA =$$
$$= \hat{n}\gamma \sin\alpha\, x_G A =$$
$$= \hat{n}\gamma h_G A =$$
$$= \hat{n} p_G A$$
$$\bar{S} = -\overline{\Pi}_p = -\hat{n} p_G A$$

$$p = \gamma h$$
$$h = X\sin\alpha$$
$$x_G = \frac{\int_A X\, dA}{A}$$
$$\int_A X\, dA = x_G A$$
$$h_G = \sin\alpha\, x_G$$
$$p_G = \gamma h_G$$



La spinta che il fluido esercita sulla superficie è dunque un vettore caratterizzato da modulo, verso e direzione identificata dalla retta di applicazione:

$$\xi = \frac{I}{M} = \xi_G + X_G$$

$$\xi_G = \frac{I_G}{M}$$

$$\eta = \frac{I_{XY}}{M}$$

CINEMATICA DEI FLUIDI

VELOCITA' = si definisce velocità di una particella di fluido:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{dx_i}{dt}\hat{\iota_i} = v_s\hat{t}$$

ACCELERAZIONE = si definisce accelerazione di una particella di fluido:

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \frac{d^2x_i}{dt^2}\hat{\iota_i} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_i}{dt}\hat{\iota_i}$$

DINAMICA DEI FLUIDI

BILANCIO DI MASSA IN FORMA INDEFINITA LAGRANGIANA = il bilancio di massa per una particella di fluido afferma semplicemente che la massa si deve conservare. A partire da questo concetto è possibile ricavare l'espressione del bilancio di massa in forma indefinita lagrangiana:

$\frac{dm}{dt} = 0 \qquad\qquad m = \rho W = cost$

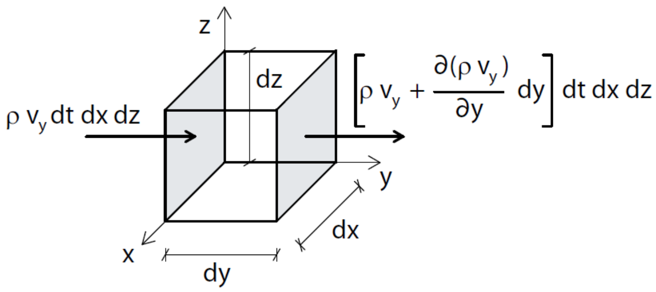
$$\frac{dm}{dt} = \rho\frac{dW}{dt} + W\frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\left(\rho\frac{dW}{dt} + W\frac{d\rho}{dt}\right) : W = \frac{0}{W}$$

$$\rho\frac{dW}{dt}\frac{1}{W} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\frac{dW}{dt}\frac{1}{W} = \nabla \cdot \bar{v}$$

$$\rho\nabla \cdot \bar{v} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$



BILANCIO DI MASSA IN FORMA INDEFINITA EULERIANA = per ricavare il bilancio di massa in forma indefinita euleriana occorre applicare il principio di conservazione della massa a un parallelepipedo di volume infinitesimo. Sempre tenendo conto della validità della meccanica del continuo si deve imporre l'uguaglianza tra la massa accumulata e quella complessivamente entrata

$$massa\ entrante = \rho v_y dtdzdx + \rho v_x dtdzdy + \rho v_z dtdydx$$

$$massa\ uscente = \left(\rho v_y + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y}\right) dydtdxdz + \left(\rho v_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x}\right) dydtdxdz + \left(\rho v_z + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}\right) dydtdxdz$$

$$massa\ assumulata = massa\ entrante - massa\ uscente =$$

$$= \rho v_y dtdzdx + \rho v_x dtdzdy + \rho v_z dtdydx - \left(\rho v_y + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y}\right) dydtdxdz - \left(\rho v_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x}\right) dydtdxdz - \left(\rho v_z + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}\right) dydtdxdz =$$

$$= -\frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dydtdxdz - \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dydtdxdz - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} dydtdxdz$$

$$massa\ netta\ complessivamente\ entrata = \frac{\partial \rho}{\partial t} dydtdxdz$$

$$massa\ assumulata = massa\ netta\ complessivamente\ entrata$$

$$-\frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dydtdxdz - \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dydtdxdz - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} dydtdxdz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dydtdxdz$$

$$-\frac{\partial \rho v_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$-\nabla \cdot (\rho\bar{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\bar{v}) = 0$

PASSAGGIO DA LAGRANGIANA A EULERIANA = vediamo ora come passare dalla forma lagrangiana a quella euleriana:

$$\rho\nabla\cdot\bar{v}+\frac{d\rho}{dt}=0$$

$$\nabla\cdot\bar{v}=\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

$$\rho\nabla\cdot\bar{v}=\rho\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=v_j\frac{\partial\rho}{\partial x_j}+\rho\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}=\nabla\cdot(\rho\bar{v})$$

$$\rho\nabla\cdot\bar{v}+\frac{d\rho}{dt}=\nabla\cdot(\rho\bar{v})+\frac{d\rho}{dt}$$

BILANCIO DI MASSA IN FORMA GLOBALE = ricaviamo ora la forma globale del bilancio di massa che permette di introdurre il flusso di massa, detto anche portata massica. Ricordiamo che per arrivare a definire la portata massica dobbiamo "dividere" in due la superficie una in cui il prodotto tra il versore e la velocità è positivo (massa entrante nel volume) e una in cui il prodotto tra il versore e la velocità è negativo (massa uscente dal volume):

$$\int_W\frac{\partial\rho}{\partial t}dW+\int_W\nabla\cdot(\rho\bar{v})\,dW=0$$

$$\int_W\frac{\partial\rho}{\partial t}dW=\frac{\partial}{\partial t}\int_W\rho dW$$

$$\int_W\nabla\cdot(\rho\bar{v})\,dW=teo\ divergenza=-\int_A\rho\bar{v}\,\hat{n}dA=M_u-M_e$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_W\rho dW+M_u-M_e=0$$

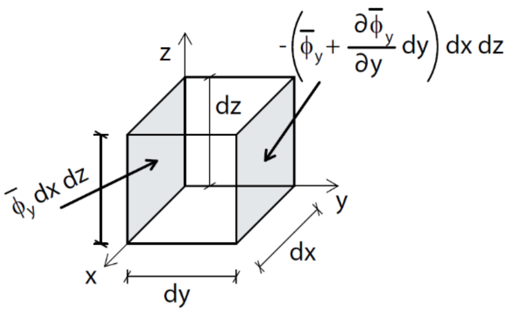
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_W\rho dW=M_e-M_u$$

BILANCIO DI QUANTITA' DI MOTO IN FORMA INDEFINITA = ricaviamo questa equazione applicando la seconda legge della dinamica ad un parallelepipedo di volume infinitesimo

$$\sum\overline{F_S}+\sum\overline{F_V}=\overline{F_{in}}$$

$\overline{F_{in}}=\rho\bar{a}dW$ $\qquad dW=dxdydz$ $\qquad \overline{F_{in}}=\rho\bar{a}dxdydz$

$\overline{F_V}=\rho\bar{f}dW$ $\qquad dW=dxdydz$ $\qquad \overline{F_V}=\rho\bar{f}dxdydz$



$$\begin{aligned}\overline{F_S}=\overline{\phi_y}dxdz\hat{\jmath}&+\left(\overline{\phi_y}+\frac{\partial\overline{\phi_y}}{\partial y}dy\right)dxdz(-\hat{\jmath})+\overline{\phi_z}dxdy\hat{k}\\&+\left(\overline{\phi_z}+\frac{\partial\overline{\phi_z}}{\partial z}dz\right)dxdy(-\hat{k})+\overline{\phi_x}dydz\hat{\imath}\\&+\left(\overline{\phi_x}+\frac{\partial\overline{\phi_x}}{\partial x}dx\right)dydz(-\hat{\imath})=\\=\frac{\partial\overline{\phi_y}}{\partial y}dydxdz(-\hat{\jmath})&+\frac{\partial\overline{\phi_z}}{\partial z}dzdxdy(-\hat{k})+\frac{\partial\overline{\phi_x}}{\partial x}dxdydz(-\hat{\imath})=\end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial\overline{\phi_y}}{\partial y}dydxdz\hat{\jmath} - \frac{\partial\overline{\phi_z}}{\partial z}dzdxdy\hat{k} - \frac{\partial\overline{\phi_x}}{\partial x}dxdydz\hat{\imath}$$

$$-\frac{\partial\overline{\phi_y}}{\partial y}dydxdz\hat{\jmath} - \frac{\partial\overline{\phi_z}}{\partial z}dzdxdy\hat{k} - \frac{\partial\overline{\phi_x}}{\partial x}dxdydz\hat{\imath} + \rho\bar{f}dxdydz = \rho\bar{a}dxdydz$$

$$-\frac{\partial\overline{\phi_y}}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial\overline{\phi_z}}{\partial z}\hat{k} - \frac{\partial\overline{\phi_x}}{\partial x}\hat{\imath} + \rho\bar{f} = \rho\bar{a}$$

$$\rho\bar{f} - \rho\bar{a} = \frac{\partial\overline{\phi_y}}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\overline{\phi_z}}{\partial z}\hat{k} + \frac{\partial\overline{\phi_x}}{\partial x}\hat{\imath}$$

$$\rho(\bar{f} - \bar{a}) = \nabla\overline{\overline{\Phi}}$$

A seconda di come viene espressa l'accelerazione si può ottenere la forma lagrangiana o euleriana del bilancio di quantità di moto

BILANCIO DI QUANTITA' DI MOTO IN FORMA LAGRANGIANA = in questo caso l'accelerazione viene espressa in forma lagrangiana:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \qquad\qquad \bar{f} = -g\nabla\tilde{z}$$

$$\rho(\bar{f} - \bar{a}) = \nabla\overline{\overline{\Phi}}$$

$$\rho(-g\nabla\tilde{z} - \bar{a}) = \nabla\overline{\overline{\Phi}}$$

$$-\rho g\nabla\tilde{z} - \rho\bar{a} = \nabla\overline{\overline{\Phi}}$$

$$-\nabla\overline{\overline{\Phi}} - \rho g\nabla\tilde{z} = \rho\frac{d\bar{v}}{dt}$$

BILANCIO DI QUANTITA' DI MOTO IN FORMA EULERIANA NON CONSERVATIVA = in questo caso l'accelerazione viene espressa in forma euleriana:

$$\bar{a} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \bar{v}\cdot\nabla\bar{v} \qquad\qquad \bar{f} = -g\nabla\tilde{z}$$

$$\rho(\bar{f} - \bar{a}) = \nabla\overline{\overline{\Phi}}$$

$$\rho(-g\nabla\tilde{z} - \bar{a}) = \nabla\overline{\overline{\Phi}}$$

$$-\rho g\nabla\tilde{z} - \rho\bar{a} = \nabla\overline{\overline{\Phi}}$$

$$-\nabla\overline{\overline{\Phi}} - \rho g\nabla\tilde{z} = \rho\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \rho\bar{v}\cdot\nabla\bar{v}$$

$$-\nabla\overline{\overline{\Phi}} - \rho g\nabla\tilde{z} = \rho\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \rho\bar{v}\cdot\nabla\bar{v}$$

$$-\nabla\overline{\overline{\Phi}} - \rho g\nabla\tilde{z} = \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})$$

BILANCIO DI QUANTITA' DI MOTO IN FORMA GLOBALE = ricaviamo ora la forma globale integrando ancora una volta la forma euleriana non conservativa in un volume infinitesimo

$$-\nabla\bar{\bar{\Phi}} - \rho g \nabla \tilde{z} = \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}\bar{v})$$

$$-\nabla\bar{\bar{\Phi}} - \rho g \nabla \tilde{z} - \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \bar{v}\bar{v}) = \bar{0}$$

$$-\int_W \nabla\bar{\bar{\Phi}}\, dW - \int_W \rho g \nabla \tilde{z} dW - \int_W \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} dW - \int_W \nabla \cdot (\rho \bar{v}\bar{v}) dW = \bar{0}$$

$$-\int_W \nabla\bar{\bar{\Phi}}\, dW = \int_A \overline{\phi_n} dA = \bar{\Pi}$$

$$-\int_W \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} dW = -\frac{\partial}{\partial t}\int_W (\rho \bar{v}) dW = \bar{I}$$

$$-\int_W \rho g \nabla \tilde{z} dW = -\left(\int_W \rho dW\right) g \nabla \tilde{z} = \bar{G}$$

$$-\int_W \nabla \cdot (\rho \bar{v}\bar{v}) dW = \int_A \rho(\bar{v} \cdot \hat{n})\, \bar{v} dA = \bar{M}$$

$$\bar{I} + \bar{M} + \bar{G} + \bar{\Pi} = \bar{0}$$

FLUIDI IDEALI

BILANCIO DELLA QUANTITA' MOTO FLUIDI IDEALI = in un fluido ideale dato che gli sforzi tangenziali sono nulli, il bilancio della quantità di moto può essere riscritto in quanto la divergenza del tensore degli sforzi si riduce al gradiente della pressione

$$\nabla\bar{\bar{\Phi}} = \nabla p$$

$$\rho(\bar{f} - \bar{a}) = \nabla\bar{\bar{\Phi}}$$

$$\rho(\bar{f} - \bar{a}) = \nabla p$$

TRINOMIO DI BERNOULLI E TEOREMA = analizziamo ora il moto di una particella di fluido ideale soggetta al campo gravitazionale. A partire dall'analisi del bilancio della quantità di moto è possibile ricavare il trinomio di Bernoulli. Esprimiamo l'accelerazione nelle sue componenti normali e tangenziali:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{r}\hat{n} \qquad \bar{f} = -g\nabla\tilde{z}$$

$$\rho(\bar{f} - \bar{a}) = \nabla p$$

$$\rho\left(-g\nabla\tilde{z} - \frac{dv}{dt}\hat{t} - \frac{v^2}{r}\hat{n}\right) = \nabla p$$

$$-\rho g\nabla\tilde{z} - \rho\left(\frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{r}\hat{n}\right) = \nabla p$$

$$-\rho\left(\frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{r}\hat{n}\right) = \nabla p + \rho g\nabla\tilde{z}$$

Ipotizzando che il fluido sia incomprimibile possiamo riscrivere l'equazione dividendo tutto per il peso specifico:

$$\frac{-\rho\left(\frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{r}\hat{n}\right)}{\gamma} = \frac{\nabla p + \rho g\nabla\tilde{z}}{\gamma}$$

$$-\frac{1}{g}\left(\frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{r}\hat{n}\right) = \nabla\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \tilde{z}\right)$$

Proiettiamo ora questa equazione lungo le tre direzioni:

1. Direzione binormale: $\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \tilde{z}\right) = 0$
2. Direzione normale: $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \tilde{z}\right) = -\frac{1}{g}\frac{v^2}{r}$
3. Direzione tangenziale: $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \tilde{z}\right) = -\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}$

Analizziamo meglio la direzione tangenziale:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma} + \tilde{z}\right) = -\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}$$

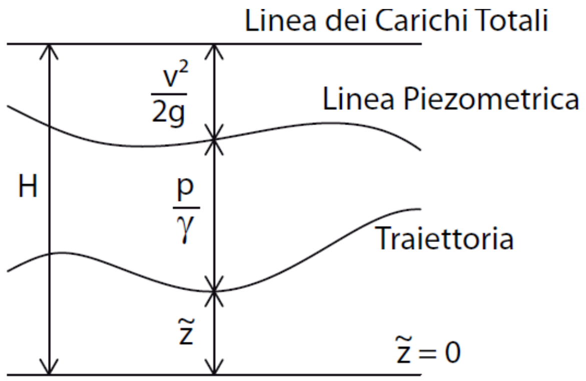
$$\frac{dv}{dt} = v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}\right)=-\frac{1}{g}\left(v\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}\right)=-\frac{1}{g}v\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}\right)+\frac{1}{g}v\frac{\partial v}{\partial s}=-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}+\frac{v^2}{2g}\right)=-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$



Se il moto è stazionario: $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}+\frac{v^2}{2g}\right)=0$

Otteniamo così il trinomio di Bernoulli, noto anche come carico totale. Il teorema di Bernoulli afferma che lungo la traiettoria di una particella di fluido ideale, pesante, incomprimibile, in condizioni di moto permanente il carico totale rimane costante. Il teorema di Bernoulli può anche essere interpretato energeticamente ed esprime quindi il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\left(\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}+\frac{v^2}{2g}\right)mg=0$$

$\frac{\mathrm{p}}{\gamma}$	energia potenziale dovuta alla pressione per unità di peso
$\tilde{z}$	energia potenziale gravitazionale per unità di peso
$\frac{v^2}{2g}$	energia cinetica per unità di peso
$\frac{\mathrm{p}}{\gamma}+\tilde{z}$	energia potenziale per unità di peso

ANALISI ADIMENSIONALE

TEOREMA Π = detto anche teorema di Buckingham afferma che in un sistema fisico è sempre possibile, con un'opportuna scelta del sistema di unità di misura, ridurre il numero delle variabili di controllo di tante unità quante sono le unità di misura fondamentali. Questo teorema è importante perché, tra le altre cose, garantisce l'universalità delle leggi fisiche espresse in termini adimensionali. Vediamo ora la dimostrazione.

- Prendiamo una generica variabile di stato g_0 e supponiamo che esista un legame fisico tra di essa e le n variabili di controllo g_i, allora si può dire: $g_0=f(g_1,g_2,g_3,\dots,g_n)$
- Consideriamo per semplicità il caso $k=3$: $g_0=f(g_1,g_2,g_3)$
- La misura della grandezza g_0 rispetto alla terna è: $\Pi_0=\frac{g_0}{{g_1}^{\alpha}{g_2}^{\beta}{g_3}^{\gamma}}$
- Dove gli esponenti α,β,γ delle variabili di controllo g_i sono determinati imponente che Π_0 sia un numero puro. Ciò può essere riscritto nel seguente modo: $[g_0]=[g_1]^{\alpha}[g_2]^{\beta}[g_3]^{\gamma}$
- Dato che deve vale $g_0=f(g_1,g_2,g_3,\dots,g_n)$ si può scrivere: $\Pi_0=f^*(\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3,\dots,\Pi_n)$
- Per via dell'ipotesi di indipendenza dimensionale delle grandezze che costituiscono la terna base si ha che $\Pi_1=\Pi_2=\Pi_3=1$, quindi si ha: $\Pi_0=f^*(\Pi_4,\dots,\Pi_n)$
- Combinando $\Pi_0=\frac{g_0}{{g_1}^{\alpha}{g_2}^{\beta}{g_3}^{\gamma}}$ con $\Pi_0=f^*(\Pi_4,\dots,\Pi_n)$ si ottiene: $g_0={g_1}^{\alpha}{g_2}^{\beta}{g_3}^{\gamma}f^*(\Pi_4,\dots,\Pi_n)$

La funzione f^* che abbiamo introdotto nella dimostrazione del teorema di Buckingham può essere utilizzata per predire il comportamento di sistemi fisici di dimensioni diverse da quello sul quale è stata condotta la sperimentazione.

FLUIDI VISCOSI

FORMULA DI DARCY-WEISBACH = tale formula permette di calcolare la cadente energetica media J cioè il modulo della derivata del carico totale medio lungo la coordinata curvilinea s. Per ricavare tale formula utilizziamo il teorema Π; scegliamo come variabile di stato la caduta di pressione per unità di lunghezza $\Delta p/L$ mentre come variabili di controllo alcune proprietà del fluido circolante come densità ρ, viscosità μ, velocità media V, diametro del condotto D e scabrezza $\mathcal{R}$:

$$\frac{\Delta p}{L} = f(\rho, \mu, V, D, \mathcal{R})$$

Per determinare la funzione f occorrerebbero 10^5 esperimenti, per ridurli passiamo ad un sistema di unità di misura intrinseco al problema e scegliamo 3 variabili di controllo tra di loro dimensionalmente indipendenti che costituiscono la nuova base del sistema di misura. Le due terne possibili sono quella inerziale (ρ, V, D) e quella viscosa (μ, V, D). Scegliendo la terna inerziale si ottiene:

$$\Pi_{\Delta p/L} = \frac{\frac{\Delta p}{L}}{\frac{\rho V^2}{D}} = f'(\Pi_\mu, \Pi_\mathcal{R})$$

$$\Pi_\mu = \frac{\mu}{\rho V D} \qquad \Pi_\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R}}{D}$$

$$\frac{1}{\Pi_\mu} = Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Possiamo quindi scrivere che:

$$\frac{\frac{\Delta p}{L}}{\frac{\rho V^2}{D}} = f''\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}\right)$$

$$\frac{\Delta p}{L} = \gamma J$$

$$\frac{\gamma J}{\frac{\rho V^2}{D}} = f''\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}\right)$$

$$\frac{\gamma J D}{\rho V^2} = f''\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}\right)$$

$$\frac{\gamma J D}{\rho V^2}\frac{1}{\gamma} = f''\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}\right)\frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{J D}{\rho V^2} = f''\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}\right)\frac{1}{\gamma}$$

$$\gamma = \rho g$$

$$\frac{J D}{\rho V^2} = f''\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}\right)\frac{1}{\rho g}$$

Massa:	M
Lunghezza:	L
Tempo:	T
Pressione:	$P = ML^{-1}T^{-2}$
Densità:	ML^{-3}
Velocità:	LT^{-1}

Ricaviamo questo valore $\frac{\rho V^2}{D}$ dall'analisi adimensionale di $\frac{\Delta p}{L}$:

$$\left[\frac{\Delta p}{L}\right] = ML^{-2}T^{-2}$$

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[V] = LT^{-1}$$

$$[D] = L$$

$$[ML^{-3}]^\alpha\,[LT^{-1}]^\beta[L]^\gamma = ML^{-2}T^{-2}$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 2$$

$$\gamma = -1$$

$$[ML^{-3}]^1\,[LT^{-1}]^2[L]^{-1} = \frac{\rho V^2}{D}$$

$$\frac{JD}{V^2} = f''\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}\right)\frac{1}{g}$$

$$J = 2f''\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}\right)\frac{V^2}{2Dg} = \lambda\frac{V^2}{2gD}$$

L'analisi fatti fino ad ora è corretta e valida per i fluidi incomprimibili perché abbiamo imposto che $\gamma = \rho g$, vediamo ora come cambia l'analisi per i fluidi comprimibili. Per prima cosa dobbiamo aggiungere una variabile di controllo cioè la comprimibilità ϵ:

$$\frac{\Delta p}{L} = f(\rho, \mu, V, D, \mathcal{R}, \epsilon)$$

Ricaviamo il gruppo Π associato alla comprimibilità:

$$\Pi_\epsilon = \frac{\epsilon}{\rho V^2} = \frac{1}{Ca} = \frac{1}{Ma^2}$$

Dove Ca è il numero di Cauchy mentre Ma è il numero di Mach e rappresenta il rapporto tra la velocità media del fluido e la velocità del suono nel fluido stesso:

- $Ma = 1$ fluidi transonici
- $Ma < 1$ fluidi subsonici
- $Ma > 1$ fluidi supersonici

$$\lambda = 2f''\left(Re, \frac{\mathcal{R}}{D}, Ma\right)$$

MOTO LAMINARE = $Re < 2100$ in questo regime di moto le traiettorie delle particelle di fluido sono tra di loro parallele. In questo caso l'indice di resistenza λ dipende solo dal numero di Reynolds Re e non dalla scabrezza $\mathcal{R}$. Inoltre se il moto è stazionario e le traiettorie sono rettilinee e parallele i termini inerziali nel bilancio della quantità di moto si annullano; ciò significa che la densità non influenza il moto laminare quindi si può tranquillamente usare la terna viscosa per passare alla formulazione in termini di gruppi Π:

$$\frac{\Delta p}{L} = f(\mu, V, D,)$$

$$\Pi_{\Delta p/L} = \frac{\frac{\Delta p}{L}}{\mu\frac{V}{D^2}} = f'(1,1,1) = C = 32 \qquad \text{per via sperimentale}$$

$$\frac{\frac{\Delta p}{L}}{\frac{\rho V^2}{D}} = \frac{\lambda}{2} = C$$

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

MOTO TURBOLENTO = $Re > 4000$ in questo caso l'indice di resistenza dipende sia dal numero di Reynolds che dalla scabrezza relativa. Dobbiamo dunque studiare i diversai casi in funzione dei tipi di tubi:

- Formula di Prandtl-von Karman per tubi lisci: $\frac{\mathcal{R}}{D} = 0$
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

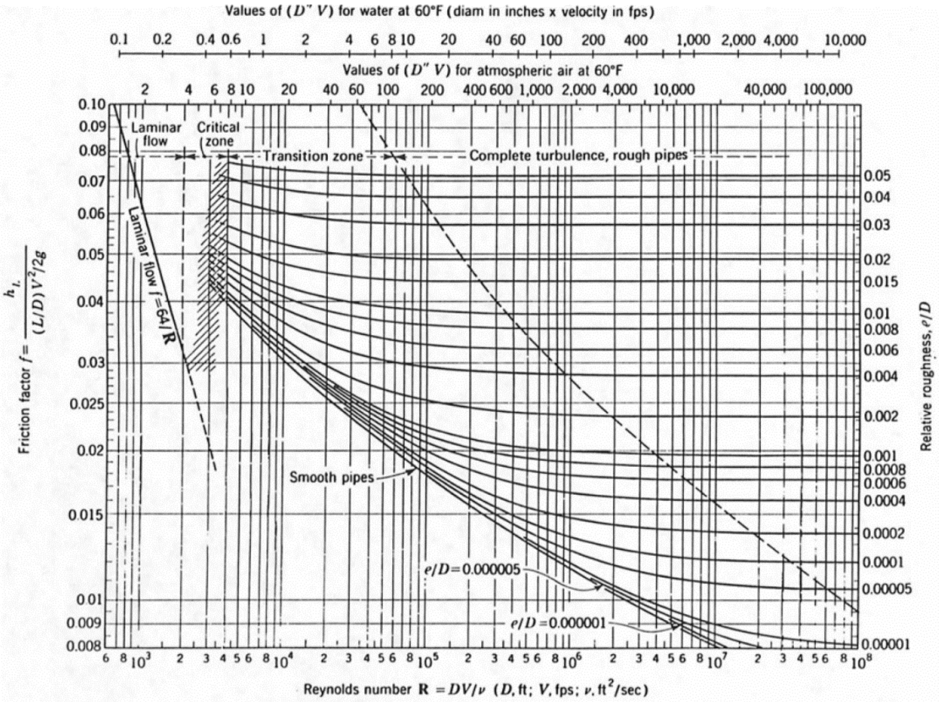
- Formula di Prandtl-von Karman per tubi scabri: $\frac{\mathcal{R}}{D} \neq 0$
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{1}{3{,}71}\frac{\mathcal{R}}{D}\right)$$

- Transizione: nel caso di tubi commerciali cioè caratterizzati da scabrezza disomogenea si ha (formula di Colebrook-White):

$$\frac{\mathcal{R}}{D} = \frac{3,71}{10^{0,5}/\sqrt{\lambda_\infty}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3,71}\frac{\mathcal{R}}{D}\right)$$

Un'alternativa ampiamente usata prima della diffusione dei calcolatori per la determinazione dell'indice di resistenza λ era l'abaco di Moody cioè un diagramma che rappresenta le curve $\lambda - Re$ interpolanti i dati sperimentali relativi a tubi commerciali di diversa scabrezza relativa equivalente. È dunque un diagramma bilogaritmico che riporta il fattore di attrito di Darcy in funzione del numero di Reynolds al variare della rugosità secondo la correlazione di Colebrook.



TENSORE GRADIENTE DELLA VELOCITÀ = Il tensore gradiente velocità di deformazione può essere decomposto nella somma di un tensore emisimmetrico $\overline{\overline{\Omega}}$ e di uno simmetrico $\overline{\overline{D}}$:

$$\nabla\bar{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}$$

TENSORE DELLE VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE = prima di specificare e spiegare cosa sia il tensore delle velocità di deformazione occorre sottolineare che nell'analisi di un fluido le deformazioni non risultano un buon parametro per la caratterizzazione del fluido stesso, al contrario invece della velocità di deformazione. Questo perché le deformazioni di un fluido tendono a infinito. Il tensore delle velocità di deformazione è un tensore simmetrico che vale:

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Mediante un'analisi approfondita del tensore delle velocità di deformazione è possibile dimostrare che:

- Gli elementi diagonali di $\overline{\overline{D}}$ comportano una dilatazione volumetrica a forma costante $tr\overline{\overline{D}} = \nabla \cdot \bar{v}$: $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x}$
- Gli elementi rettangolari di $\overline{\overline{D}}$ generano cambiamenti di forma a superfice o volume costante

È dunque possibile riscrivere $\overline{\overline{D}}$ come:

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} & -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_z}{\partial t} & -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_y}{\partial t} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_z}{\partial t} & \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} & -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_x}{\partial t} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_y}{\partial t} & -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_x}{\partial t} & \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

TENSORE DELLE ROTAZIONI RIGIDE = il tensore delle rotazioni rigide è un tensore emisimmetrico dove gli elementi del tensore delle rotazioni rigide rappresentano la velocità di rotazione angolare attorno agli assi:

$$\overline{\overline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

FLUIDI STOKESIANI = fluidi per i quali gli sforzi dipendono solo dalle velocità di deformazione e non dalle deformazioni stesse + quando la velocità si annulla il tensore degli sforzi si riconduce al caso statico + la funzione che lega gli sforzi alle velocità di deformazione è indipendente dal sistema di riferimento adottato. Queste caratteristiche sono soddisfatte se il generico elemento del tensore degli sforzi si può scrivere come:

$$\Phi_{ij} = p\delta_{ij} + f(D_{ij}, I_1, I_2, I_3)$$

FLUIDI NEWTONIANI E LEGAME REOLOGICO = fluidi stokesiani per cui la dipendenza del tensore degli sforzi $\overline{\overline{\Phi}}$ dal tensore delle velocità di deformazione $\overline{\overline{D}}$ è lineare perciò possiamo scrivere il tensore degli sforzi come:

$$\overline{\overline{\Phi}} = (p + b\nabla \cdot \bar{v})\overline{\overline{\mathrm{I}}} + a\overline{\overline{D}}$$

Cerchiamo ora di capire cosa sono a e b:

- Il valore a ha a che fare con gli sforzi tangenziali, è l'indice della resistenza che il fluido oppone a cambiamenti di forma e possiamo determinarlo nel seguente modo tenendo presente che sperimentalmente $v_x = 0$:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\phi_{xy} = aD_{yx} = a\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = a\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\tau = -\phi_{xy}$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = -a\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\mu = -a\frac{1}{2}$$

$$a = -2\mu$$

- Per determinare il termine b (viscosità di dilatazione) che esprime la variazione percentuale di volume nell'unità di tempo ed è indice della resistenza che il fluido oppone a variazioni di volume, occorre per prima cosa calcolare la traccia del tensore degli sforzi:

$$tr(\overline{\overline{\Phi}}) = (p + b\nabla \cdot \bar{v})tr(\overline{\overline{\mathrm{I}}}) + atr(\overline{\overline{\mathrm{D}}}) = (p + b\nabla \cdot \bar{v})3 + a\nabla \cdot \bar{v} = 3p + 3b\nabla \cdot \bar{v} + a\nabla \cdot \bar{v}$$

In statica $tr(\overline{\overline{\Phi}}) = 3p$ e $\nabla \cdot \bar{v} = tr(\overline{\overline{\mathrm{D}}})$ e $a = -2\mu$ dunque:

$$tr(\overline{\overline{\Phi}}) = 3p + 3b\nabla \cdot \bar{v} + a\nabla \cdot \bar{v}$$

$$3p = 3p + 3btr(\overline{\overline{\mathrm{D}}}) + atr(\overline{\overline{\mathrm{D}}})$$

$$0 = +3btr(\overline{\overline{\mathrm{D}}}) - 2\mu tr(\overline{\overline{\mathrm{D}}})$$

$$0 = +3b - 2\mu$$

$$b = \frac{2}{3}\mu$$

Noti a e b possiamo scrivere il tensore degli sforzi e la sua divergenza:

$$\Phi = \left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \bar{v}\right)\overline{\overline{\mathrm{I}}} - 2\mu\overline{\overline{D}}$$

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\Phi}} = \nabla\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \bar{v}\right) - 2\mu\nabla \cdot \overline{\overline{D}} = \qquad\qquad \nabla \cdot \overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}\nabla^2\bar{v} + \frac{1}{2}\nabla(\nabla \cdot \bar{v})$$

$$= \nabla \cdot \overline{\overline{\Phi}} = \nabla\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \bar{v}\right) - 2\mu\nabla \cdot \overline{\overline{D}} =$$

$$= \nabla\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\bar{v}\right) - 2\mu\left(\frac{1}{2}\nabla^2\bar{v} + \frac{1}{2}\nabla(\nabla\cdot\bar{v})\right) =$$

$$= \nabla\left(p - \frac{1}{3}\mu\nabla\cdot\bar{v}\right) - \mu\nabla^2\bar{v}$$

EQUAZIONI DI STOKES INDEFINITE FLUIDI COMPRIMIBILI (1845) = inseriamo ora la reologia dei fluidi newtoniani nell'equazione del bilancio della quantità di moto in forma indefinita euleriana non conservativa:

$$-\nabla\cdot\bar{\bar{\Phi}} - \rho g\nabla\tilde{z} = \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})$$

$$\nabla\cdot\bar{\bar{\Phi}} = \nabla\left(p - \frac{1}{3}\mu\nabla\cdot\bar{v}\right) - \mu\nabla^2\bar{v}$$

$$-\left[\nabla\left(p - \frac{1}{3}\mu\nabla\cdot\bar{v}\right) - \mu\nabla^2\bar{v}\right] - \rho g\nabla\tilde{z} = \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})$$

$$-\nabla\left(p - \frac{1}{3}\mu\nabla\cdot\bar{v}\right) + \mu\nabla^2\bar{v} - \rho g\nabla\tilde{z} = \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})$$

Questa a sistema con l'equazione di continuità e l'equazione di stato costituiscono le equazioni di Stokes che descrivono la dinamica isoterma dei fluidi newtoniani comprimibili (se la temperatura non è costante occorre introdurre una nuova equazione di bilancio energetico per risolvere il campo delle temperature):

$$\begin{cases} -\nabla\left(p - \frac{1}{3}\mu\nabla\cdot\bar{v}\right) + \mu\nabla^2\bar{v} - \rho g\nabla\tilde{z} = \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v}) \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}) = 0 \\ \rho = \rho(T,p) \end{cases}$$

EQUAZIONI DI STOKES INDEFINITE FLUIDI INCOMPRIMIBILI (EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES INDEFINITE) = se il fluido oltre a essere newtoniano è anche incomprimibile le equazioni si semplificano e si ottiene questo nuovo sistema di 4 equazioni scalari nelle 4 incognite $\mathrm{p}, v_x, v_y, v_z$. Le equazioni di Navier-Stokes sono equazioni differenziali alle derivate parziali necessitano di condizioni iniziali e condizioni al contorno per essere risolte. Solo in alcuni casi estremamente semplici possono essere risolte per via analitica. La difficoltà di risoluzione è dovuta alla nonlinearità, causata dalle inerzie convettive $\nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})$, e alla ellitticità causata dal termine viscoso proporzionale al Laplaciano della velocità $\mu\nabla^2\bar{v}$:

$$\begin{cases} -\nabla\mathrm{p} + \mu\nabla^2\bar{v} - \rho g\nabla\tilde{z} = \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v}) \\ \nabla\cdot\bar{v} = 0 \end{cases}$$

Possiamo notare che la prima equazione semplificata al caso statico diventa: $\nabla\mathrm{p}_{stat} = -\rho g\nabla\tilde{z}$ dove p_{stat} rappresenta la componente idrostatica della pressione, se la inseriamo nell'equazione da cui l'abbiamo ottenuta

$$-\nabla\mathrm{p} + \mu\nabla^2\bar{v} - \rho g\nabla\tilde{z} = \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})$$

$$\nabla\mathrm{p}_{stat} = -\rho g\nabla\tilde{z}$$

$$-\nabla\mathrm{p} + \mu\nabla^2\bar{v} + \nabla\mathrm{p}_{stat} = \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})$$

$$-\nabla(\mathrm{p} - \mathrm{p}_{stat}) + \mu\nabla^2\bar{v} = \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})$$

$\nabla(\mathrm{p}-\mathrm{p}_{stat})=\mathrm{p}_e$

$$-\nabla \mathrm{p}_e+\mu\nabla^2\bar{v}=\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})$$

dove p_e rappresenta l'eccesso della pressione rispetto alla componente idrostatica. Il termine gravitazione dunque aggiunge solo una componente idrostatica alla pressione, ecco perché non è stata considerata come variabile di controllo nello studio della cadente energetica media.

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES GLOBALI (FLUIDI INCOMPRIMIBILI) = per ricavare queste equazioni in forma globale integriamo come al solito su un volume di controllo finito

$$\begin{cases}\int_W(-\nabla \mathrm{p}+\mu\nabla^2\bar{v}-\rho g\nabla\tilde{z})\,dW=\int_W\left(\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})\right)dW\\ \int_W\nabla\cdot\bar{v}\,dW=0\end{cases}$$

$$\int_W-\nabla \mathrm{p}\,dW=\int_A \mathrm{p}\,\hat{n}dA=\overline{\Pi_p}$$

$$\int_W\mu\nabla^2\bar{v}\,dW=\int_W\mu\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial \mathrm{x}_j\,\partial \mathrm{x}_j}dW=-\int_A\mu\frac{\partial\bar{v}}{\partial \mathrm{x}_j}n_j dA=-\int_A\mu\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial n}dA=-\int_A\mu\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}dA=\overline{\Pi_\mu}$$

$$\int_W-\rho g\nabla\tilde{z}\,dW=\bar{G}$$

$$\int_W\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t}dW=\frac{\partial}{\partial t}\int_W\rho\bar{v}dW=\bar{I}$$

$$\int_W\nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})dW=\bar{M}$$

Quindi l'equazione in forma globale di Navier-Stokes è:

$$\overline{\Pi_p}+\overline{\Pi_\mu}+\bar{G}+\bar{I}+\bar{M}=\bar{0}$$

EQUAZIONI DI STOKES IN FORMA ADIMENSIONALE = come abbiamo già visto può essere conveniente usare una formulazione in termini adimensionali. Per determinarla occorre in primo luogo determinare le grandezze scala cioè le variabili di controllo che fissano l'ordine di grandezza delle quantità ad esse omogenee:

$\check{x}=\frac{x}{L}$ $\check{y}=\frac{y}{L}$ $\check{z}=\frac{z}{L}$ spazio

$\check{u}=\frac{u}{V}$ $\check{v}=\frac{v}{V}$ $\check{w}=\frac{w}{V}$ velocità

$\check{t}=\frac{t}{T}$ tempo

$\check{p}=\frac{p}{P}$ pressione

$\check{\rho}=\frac{\rho}{R}$ densità

Scriviamo ora l'equazione di continuità in termini adimensionali:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0$$

$$\frac{R}{T}\frac{\partial \breve{\rho}}{\partial \breve{t}} + \frac{RV}{L}\breve{\nabla} \cdot (\breve{\rho}\breve{\bar{v}}) = 0$$

$$\frac{\frac{R}{T}\frac{\partial \breve{\rho}}{\partial \breve{t}} + \frac{RV}{L}\breve{\nabla} \cdot (\breve{\rho}\breve{\bar{v}})}{RV/L} = 0$$

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial \breve{\rho}}{\partial \breve{t}} + \breve{\nabla} \cdot (\breve{\rho}\breve{\bar{v}}) = 0$$

$\frac{L}{VT} = St$ numero di Strouhal = rappresenta il rapporto tra il tempo che il fluido impiega per attraversa il dominio geometrico L/V e il tempo scala associato con la non stazionarietà del moto T

$$St\frac{\partial \breve{\rho}}{\partial \breve{t}} + \breve{\nabla} \cdot (\breve{\rho}\breve{\bar{v}}) = 0$$

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES IN FORMA ADIMENSIONALE = nel caso di fluido incomprimibile $\breve{\rho} = 1$ e $Ma = 0$ e quindi le equazioni di Stokes in forma adimensionale si semplificano nelle equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale (non adimensionalizziamo né la densità né la viscosità in questo caso):

$$\begin{cases} -\nabla \mathrm{p} + \mu\nabla^2\bar{v} - \rho g \nabla\tilde{z} = \dfrac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\bar{v}\bar{v}) \\ \breve{\nabla} \cdot (\breve{\bar{v}}) = 0 \end{cases}$$

$$-\nabla \mathrm{p} + \mu\nabla^2\bar{v} - \rho g \nabla\tilde{z} = \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\bar{v}\bar{v})$$

$$-\frac{P}{L}\breve{\nabla}\breve{\mathrm{p}} + \frac{V}{L^2}\mu\breve{\nabla}^2\breve{v} - \rho g\frac{L}{L}\breve{\nabla}\breve{\tilde{z}} = \frac{V}{T}\frac{\partial(\rho\breve{\bar{v}})}{\partial \breve{t}} + \frac{V^2}{L}\breve{\nabla} \cdot (\rho\breve{\bar{v}}\breve{\bar{v}})$$

$$\frac{-\frac{P}{L}\breve{\nabla}\breve{\mathrm{p}} + \frac{V}{L^2}\mu\breve{\nabla}^2\breve{v} - \rho g\frac{L}{L}\breve{\nabla}\breve{\tilde{z}}}{\rho V^2/L} = \frac{\frac{V}{T}\frac{\partial(\rho\breve{\bar{v}})}{\partial \breve{t}} + \frac{V^2}{L}\breve{\nabla} \cdot (\rho\breve{\bar{v}}\breve{\bar{v}})}{\rho V^2/L}$$

$$-\frac{P}{\rho V^2}\breve{\nabla}\breve{\mathrm{p}} + \frac{1}{LV\rho}\mu\breve{\nabla}^2\breve{v} - \rho g\frac{L}{\rho V^2}\breve{\nabla}\breve{\tilde{z}} = \frac{L}{\rho TV}\frac{\partial(\rho\breve{\bar{v}})}{\partial \breve{t}} + \frac{1}{\rho}\breve{\nabla} \cdot (\rho\breve{\bar{v}}\breve{\bar{v}})$$

$$-\frac{P}{\rho V^2}\breve{\nabla}\breve{\mathrm{p}} + \frac{\mu}{LV\rho}\breve{\nabla}^2\breve{v} - \frac{gL}{V^2}\breve{\nabla}\breve{\tilde{z}} = \frac{L}{TV}\frac{\partial(\breve{\bar{v}})}{\partial \breve{t}} + \breve{\nabla} \cdot (\breve{\bar{v}}\breve{\bar{v}})$$

- $\frac{P}{\rho V^2} = Eu$ numero di Eulero = rapporto tra forze di pressione e forze di inerzia
- $\frac{\mu}{LV\rho} = \frac{1}{Re}$ numero di Reynolds
- $\frac{gL}{V^2} = \frac{1}{Fr^2}$ numero di Froude = rapporto tra forze di inerzia e forze peso
- $\frac{L}{TV} = St$ numero di Strouhal

$$-Eu\breve{\nabla}\breve{\mathrm{p}} + \frac{1}{Re}\breve{\nabla}^2\breve{\bar{v}} - \frac{1}{Fr^2}\breve{\nabla}\breve{\tilde{z}} = St\frac{\partial(\breve{\bar{v}})}{\partial \breve{t}} + \breve{\nabla} \cdot (\breve{\bar{v}}\breve{\bar{v}})$$

Utilizzando p_e, il numero di Froude sparisce, inoltre $Eu = 1$,:

$$-\breve{\nabla}\widetilde{\mathrm{p}_e} + \frac{1}{Re}\breve{\nabla}^2\breve{\bar{v}} = St\frac{\partial\breve{\bar{v}}}{\partial\breve{t}} + \breve{\nabla}\cdot(\breve{\bar{v}}\breve{\bar{v}})$$

Se il moto fosse stazionario:

$$-\breve{\nabla}\widetilde{\mathrm{p}_e} + \frac{1}{Re}\breve{\nabla}^2\breve{\bar{v}} = \breve{\nabla}\cdot(\breve{\bar{v}}\breve{\bar{v}})$$

Quindi le equazioni di Navier Stokes adimensionalizzate per un moto stazionario sono:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\bar{v} = 0 \\ -\breve{\nabla}\widetilde{\mathrm{p}_e} + \dfrac{1}{Re}\breve{\nabla}^2\breve{\bar{v}} = \dfrac{\partial\breve{\bar{v}}}{\partial\breve{t}} + \breve{\nabla}\cdot(\breve{\bar{v}}\breve{\bar{v}}) \end{cases}$$

Prima abbiamo detto che le equazioni di Stokes, a causa della loro difficoltà di risoluzione, non possono essere risolte per via analitica se non in alcuni casi semplificati. Vediamo ora alcuni di questi casi

FLUSSO PIANO DI COUETTE = consideriamo due lastre piane indefinite parallele posto a distanza δ l'una dall'altra tra le quali si trova un fluido pesante newtoniano incomprimibile di densità ρ e μ. La lastra superiore si muove con velocità v mentre quella inferiore è ferma. Visto che una delle due lastre è in moto, per la condizione di aderenza si metterà in movimento anche il fluido. Ipotizziamo:

1. Di avere moto laminare e quindi $\bar{v} = (u, 0)$
2. Il gradiente di pressione lungo la direzione x sia nullo $\frac{\partial p_e}{\partial x} = 0$

Risolviamo adimensionalmente le equazioni di Navier Stokes tenendo presente che come grandezze scala scegliamo la velocità V della lastra superiore e lo spesso dell'intercapedine δ:

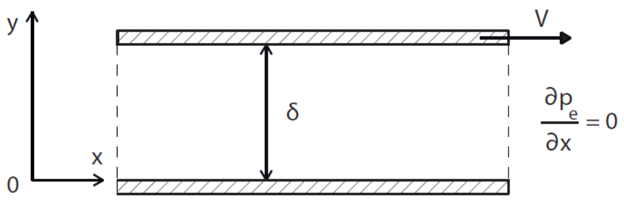
$$\nabla\cdot\bar{v} = 0$$

$$\frac{\partial\breve{u}}{\partial\breve{x}} + \frac{\partial\breve{v}}{\partial\breve{y}} = 0$$

$$\bar{v} = (u, 0)$$

$$\frac{\partial\breve{u}}{\partial\breve{x}} = 0$$

Deduciamo da questa equazione che l'unica componente della velocità presente, se varia, varia solo lungo $\breve{y}$. L'obiettivo del problema sarà dunque determinare il profilo di velocità in forma adimensionale



$$-\breve{\nabla}\widetilde{\mathrm{p}_e} + \frac{1}{Re}\breve{\nabla}^2\breve{\bar{v}} = \frac{\partial\breve{\bar{v}}}{\partial\breve{t}} + \breve{\nabla}\cdot(\breve{\bar{v}}\breve{\bar{v}})$$

Proiettiamo questa equazione nelle direzioni $\breve{y}$ e $\breve{x}$:

$$-\frac{\partial\widetilde{p_e}}{\partial\breve{x}} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\breve{u}}{\partial\breve{x}^2} + \frac{\partial^2\breve{u}}{\partial\breve{y}^2}\right) = \frac{\partial\breve{u}}{\partial\breve{t}} + \breve{u}\frac{\partial\breve{u}}{\partial\breve{x}} + \breve{v}\frac{\partial\breve{u}}{\partial\breve{y}}$$

$$-\frac{\partial\widetilde{p_e}}{\partial\breve{y}} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\breve{v}}{\partial\breve{x}^2} + \frac{\partial^2\breve{v}}{\partial\breve{y}^2}\right) = \frac{\partial\breve{v}}{\partial\breve{t}} + \breve{u}\frac{\partial\breve{v}}{\partial\breve{x}} + \breve{v}\frac{\partial\breve{v}}{\partial\breve{y}}$$

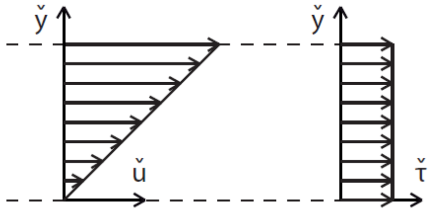
Possiamo notare che, in seguito alle ipotesi fatte, al moto stazionario, alla laminarità del moto e a quanto determinato dalla prima equazione di Navier Stokes in forma adimensionale le equazioni si semplificano a:

$$\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\breve{u}}{\partial\breve{y}^2}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial\widetilde{p_e}}{\partial\breve{y}} = 0$$

Integrando due volte la prima equazione si ottiene una soluzione del tipo:

$$\bar{u} = A\breve{y} + B$$



A, B sono le costanti di integrazioni da determinare con le condizioni al contorno:

$$u(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \breve{u}(0) = 0$$

$$u(\delta) = V \quad \rightarrow \quad \breve{u}(1) = 1$$

Si ottiene dunque che $A = 1$ e $B = 0$. Possiamo inoltre determinare lo sforzo tangenziale:

$$\tau = \frac{\mu V}{\delta}$$

FLUSSO PIANO DI POISEUILLE = consideriamo due lastre piane indefinite parallele posto a distanza δ l'una dall'altra tra le quali si trova un fluido pesante newtoniano incomprimibile di densità ρ e viscosità μ. Entrambe le lastre sono ferme. Ipotizziamo:

1. Di avere moto laminare e quindi $\bar{v} = (u, 0)$
2. Il gradiente di pressione lungo la direzione x sia costante $\frac{\partial p_e}{\partial x} = cost$

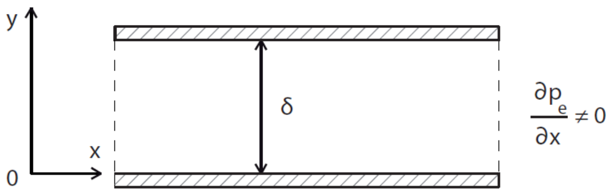
Risolviamo adimensionalmente le equazioni di Navier Stokes tenendo presente che come grandezze scala scegliamo la velocità media V del flusso lungo la direzione y e lo spessore dell'intercapedine δ, ricordiamo inoltre che $Re = \rho V D/\mu$

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0$$

$$\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{x}} + \frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{y}} = 0$$

$$\bar{v} = (u, 0)$$

$$\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{x}} = 0$$



$$-\breve{\nabla}\breve{p}_e + \frac{1}{Re}\breve{\nabla}^2\breve{\bar{v}} = \frac{\partial \breve{\bar{v}}}{\partial \breve{t}} + \breve{\nabla} \cdot (\breve{\bar{v}}\breve{\bar{v}})$$

Proiettiamo questa equazione nelle direzioni $\breve{y}$ e $\breve{x}$:

$$-\frac{\partial \breve{p}_e}{\partial \breve{x}} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial \breve{x}^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial \breve{y}^2}\right) = \frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{t}} + \breve{u}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{x}} + \breve{v}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{y}}$$

$$-\frac{\partial \breve{p}_e}{\partial \breve{y}} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \breve{v}}{\partial \breve{x}^2} + \frac{\partial^2 \breve{v}}{\partial \breve{y}^2}\right) = \frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{t}} + \breve{u}\frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{x}} + \breve{v}\frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{y}}$$

Possiamo notare che, in seguito alle ipotesi fatte, al moto stazionario, alla laminarità del moto e a quanto determinato dalla prima equazione di Navier Stokes in forma adimensionale le equazioni si semplificano a:

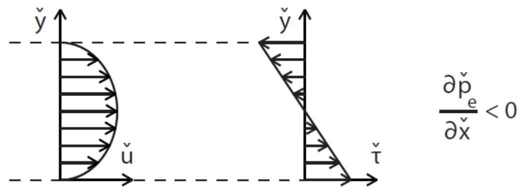
$$-\frac{\partial \breve{p}_e}{\partial \breve{x}} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial \breve{y}^2}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial \breve{p}_e}{\partial \breve{y}} = 0$$

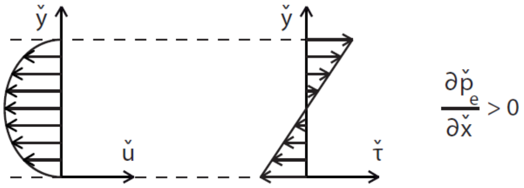
Integrando due volte la prima equazione si ottiene una soluzione del tipo:

$$\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{y}} = Re\frac{\partial \breve{p}_e}{\partial \breve{x}}\breve{y} + A$$

$$\bar{u} = \frac{Re}{2}\frac{\partial \breve{p}_e}{\partial \breve{x}}\breve{y}^2 + A\breve{y} + B$$



(a)



A, B sono le costanti di integrazioni da determinare con le condizioni al contorno e la condizione di simmetrica:

$$\breve{u}(0) = 0$$

$$\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{y}} = 0 \quad quando \quad \breve{y} = \frac{1}{2}$$

Si ottiene dunque che $A = -\frac{Re}{2}\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}}$ e $B = 0$. Possiamo inoltre determinare lo sforzo tangenziale:

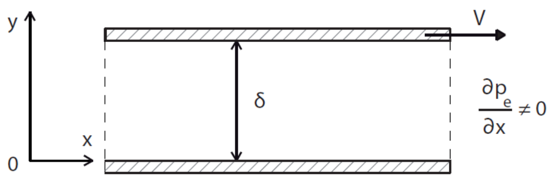
$$\tau = \frac{1}{Re}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{y}}$$

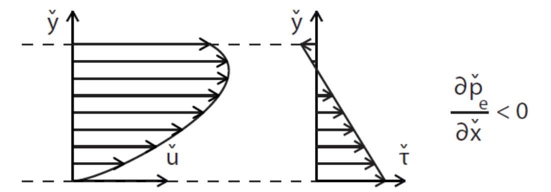
FLUSSO PIANO DI COUETTE- POISEUILLE = consideriamo due lastre piane indefinite parallele posto a distanza δ l'una dall'altra tra le quali si trova un fluido pesante newtoniano incomprimibile di densità ρ e μ. La lastra superiore si muove con velocità v mentre quella inferiore è ferma. Visto che una delle due lastre è in moto, per la condizione di aderenza si metterà in movimento anche il fluido. Ipotizziamo:

1. Di avere moto laminare e quindi $\bar{v} = (u, 0)$
2. Il gradiente di pressione lungo la direzione x sia costante $\frac{\partial p_e}{\partial x} = cost$

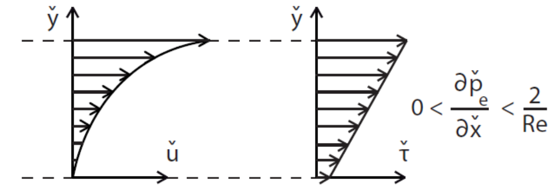
Risolviamo adimensionalmente le equazioni di Navier Stokes tenendo presente che come grandezze scala scegliamo la velocità V della lastra superiore e lo spesso dell'intercapedine δ. Vale il principio di sovrapposizione degli effetti quindi possiamo dire a priori che la soluzione è del tipo:

$$\bar{u} = \frac{Re}{2}\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}}\breve{y}(1 - \breve{y}) + \breve{y}$$

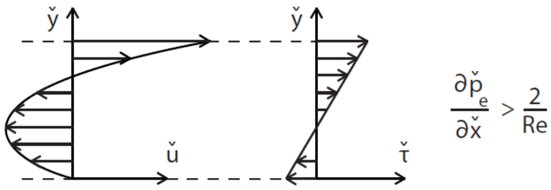




(a)



(b)



MOTO DI POISEUILLE IN CONDOTTA = risolviamo ora il caso di un fluido newtoniano incomprimibili che si muove in condizioni di moto laminare con portata Q costante in una condotta cilindrica a sezione circolare di diametro D e asse rettilineo inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo ψ. L'unica componente di velocità non nulla è quella in direzione x così che $\bar{v} = u\hat{\imath}$). Risolviamo per caso questo le equazioni di Navier-Stokes in:

1. <u>Forma indefinita adimensionale:</u>

$$\begin{cases} -\nabla \mathrm{p} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho g \nabla \tilde{z} = \dfrac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v} \bar{v}) \\ \nabla \cdot \bar{v} = 0 \end{cases}$$

L'equazione di continuità (la seconda equazione del sistema) si riduce a:

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$w=v=0$ per ipotesi di laminarità del moto

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

Analizziamo ora l'equazione del bilancio della quantità di moto proiettandola nelle tre direzioni:

$$-\nabla \mathrm{p}+\mu\nabla^2\bar{v}-\rho g\nabla\tilde{z}=\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\bar{v}\bar{v})$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u-\rho g\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}=\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial x}+\rho w\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v-\rho g\frac{\partial\tilde{z}}{\partial y}=\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial x}+\rho w\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 w-\rho g\frac{\partial\tilde{z}}{\partial z}=\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho u\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial x}+\rho w\frac{\partial w}{\partial x}$$

Considerando che il moto è stazionario $w=v=0$, vale inoltre che $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, e dividendo tutto per γ:

$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u-\rho g\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}=0$	$-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho g\frac{\partial\tilde{z}}{\partial y}=0$	$-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g\frac{\partial\tilde{z}}{\partial z}=0$
$\frac{\mu\nabla^2 u}{\gamma}=\frac{\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g\frac{\partial\tilde{z}}{\partial x}}{\gamma}$	$\frac{-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho g\frac{\partial\tilde{z}}{\partial y}}{\gamma}=\frac{0}{\gamma}$	$\frac{-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g\frac{\partial\tilde{z}}{\partial z}}{\gamma}=\frac{0}{\gamma}$
$\frac{\mu\nabla^2 u}{\gamma}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{z}+\frac{p}{\gamma}\right)$	$\frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{z}+\frac{p}{\gamma}\right)=0$	$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{z}+\frac{p}{\gamma}\right)=0$
$\frac{\mu\nabla^2 u}{\gamma}=-J$		
$-J=\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{z}+\frac{p}{\gamma}\right)$		

Le equazioni proiettate lungo y e lungo z indicano la distribuzione delle pressioni è idrostatica sulla sezione trasversale al flusso: si tratta infatti di una corrente gradualmente variata. Per risolvere la prima equazione (quella proiettata lungo l'asse x) conviene passare alle coordinate cilindriche:

$$-\frac{\gamma J}{\mu}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Integrando una volta si ottiene:

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{\gamma J}{\mu}\frac{r^2}{2}+A$$

Per simmetria la costante di integrazione A è nulla, integrando una seconda volta si ottiene:

$$u = -\frac{\gamma J}{\mu}\frac{r^2}{4} + B$$

Imponendo le condizioni di aderenza della parete si ricava B:

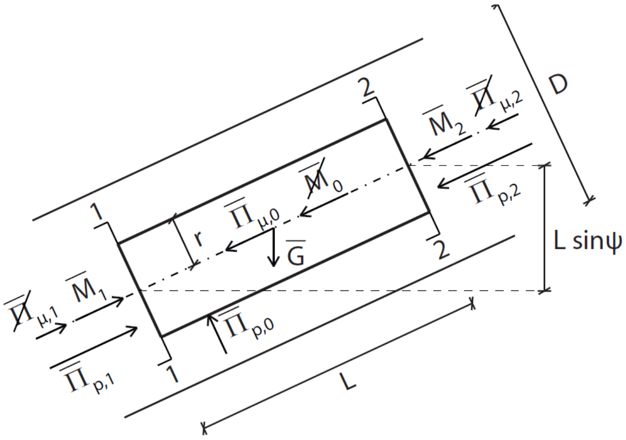
$$u(R) = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = \frac{\gamma J}{\mu}\frac{R^2}{4}$$

$$u = -\frac{\gamma J}{\mu}\frac{r^2}{4} + \frac{\gamma J}{\mu}\frac{R^2}{4}$$

$$u = \frac{\gamma J}{\mu}\frac{R^2 - r^2}{4}$$

L'andamento di u è di tipo parabolico. Quindi nel moto laminare la distribuzione di velocità è parabolica.

2. <u>Forma globale</u>: consideriamo un volume di controllo costituito da un cilindro coassiale con la condotta di raggio r e lunghezza L. Suddividiamo la superfice di contorno del volume di controllo in due superfici piane 1,2, coincidenti con le basi del cilindro, e una superficie curva 0, corrispondente con quella laterale. Applichiamo dunque l'equazione di Navier Stokes in forma globale a questo volume di controllo:



$$\overline{\Pi_p} + \overline{\Pi_\mu} + \bar{G} + \bar{I} + \bar{M} = \bar{0}$$

$$\overline{\Pi_{p,1}} + \overline{\Pi_{p,2}} + \overline{\Pi_{p,0}} + \overline{\Pi_{\mu,1}} + \overline{\Pi_{\mu,2}} + \overline{\Pi_{\mu,0}} + \overline{M_1} + \overline{M_2} + \overline{M_0} + \bar{I} + \bar{G} = \bar{0}$$

Possiamo notare che:

- La risultante delle inezie locali è nulla perché il problema è stazionario: $\bar{I} = \bar{0}$
- Il flusso di quantità di moto attraverso la superficie laterale 0 è nullo perché velocità e versore sono tra loro perpendicolari e quindi hanno prodotto nullo: $\overline{M_0} = \bar{0}$
- Per la continuità il flusso di quantità di moto attraverso le due superfici piane è il medesimo e quindi la loro somma è complessivamente nulla $\overline{M_1} + \overline{M_2} = \beta\rho V^2 \pi r^2 \hat{\imath} - \beta\rho V^2 \pi r^2 \hat{\imath} = \bar{0}$
- La risultante degli sforzi viscosi sulla superfice piana 1 è nulla visto che per continuità la derivata della velocità in direzione x è ovunque nulla $\overline{\Pi_{\mu,1}} = \bar{0}$
- La risultante degli sforzi viscosi sulla superfice piana 2 è nulla visto che per continuità la derivata della velocità in direzione x è ovunque nulla $\overline{\Pi_{\mu,2}} = \bar{0}$

Semplificando ottengo dunque la seguente equazione:

$$\overline{\Pi_{p,1}} + \overline{\Pi_{p,2}} + \overline{\Pi_{p,0}} + \overline{\Pi_{\mu,0}} + \bar{G} = \bar{0}$$

La proietto ora lungo l'asse x:

$$\overline{\Pi_{p,1x}} + \overline{\Pi_{p,2x}} + \overline{\Pi_{p,0x}} + \overline{\Pi_{\mu,0x}} + \overline{G_x} = \bar{0}$$

$$\overline{\Pi_{p,1x}} = p_1 \pi r^2 \hat{\imath}$$

$$\overline{\Pi_{p,2x}} = -p_2 \pi r^2 \hat{\imath}$$

$\overline{\Pi_{p,0x}} = \bar{0}$

$\overline{\Pi_{\mu,0x}} = -\tau 2\pi r L\hat{\imath}$

$\overline{G_x} = -\gamma \pi r^2 L \sin\psi\, \hat{\imath}$

$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r L - \gamma \pi r^2 L \sin\psi = \bar{0}$

$L \sin\psi = \widetilde{z_2} - \widetilde{z_1}$

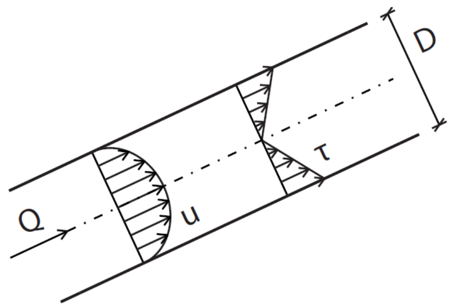
$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r L - \gamma \pi r^2 (\widetilde{z_2} - \widetilde{z_1}) = \bar{0}$

$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r L - \gamma \pi r^2 \widetilde{z_2} + \gamma \pi r^2 \widetilde{z_1} = \bar{0}$

$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \gamma \pi r^2 \widetilde{z_2} + \gamma \pi r^2 \widetilde{z_1} = \tau 2\pi r L$

$\gamma \pi r^2 \left[\left(\widetilde{z_1} + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(\widetilde{z_2} + \frac{p_2}{\gamma}\right)\right] = \tau 2\pi r L$

$\left(\widetilde{z_1} + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(\widetilde{z_2} + \frac{p_2}{\gamma}\right) = JL$



$\gamma \pi r^2 JL = \tau 2\pi r L$

$\gamma r J = \tau 2$

$\tau = \frac{\gamma r J}{2}$

Cioè vuol dire che lo sforzo tangenziale viscoso è distribuito linearmente con la coordinata radiale, è nullo in corrispondenza dell'asse e massimo in corrispondenza della parete condotta.

Abbiamo fino ad ora analizzato praticamente solo il caso di moto laminare, tale regime di moto è però estremamente raro, al contrario, invece del moto turbolento. Anche nel moto turbolento sono valide le equazioni di Navier Stokes, la difficoltà è insita nella risoluzione di tali equazioni. Nel caso, infatti di moto turbolento non è più possibile eliminare i termini inerziali e ciò impedisce di trovare soluzioni analitiche anche in presenza di geometrie semplici. L'alternativa più utilizzata è quella di risolvere numericamente le equazioni differenziali. Risolvere numericamente un'equazione significa:

1. Identificare un numero finito di punti del dominio geometrico di interesse N_s, detti nodi della griglia spaziale
2. Identificare un numero finito di istanti temporali N_t, detti nodi della griglia temporale
3. Risolvere in corrispondenza di questi punti le $4 * N_s * N_t$ equazioni algebriche in cui sono state trasformate le 4 equazioni differenziali di partenza di Navier-Stokes.

Nel nostro studio siamo interessati non tanto ai metodi risolutivi quanto piuttosto all'opportuna scelta dei nodi di griglia spaziale e temporale, o equivalentemente di scegliere il passo di griglia.

DECOMPOSIZIONE DI REYNOLDS E MEDIA ALLA REYNOLDS = Reynolds fu uno dei primi studiosi a ipotizzare che fosse sufficiente conoscere la media temporale a finestra mobile per caratterizzare e quindi studiare un fluido che si muove in regime turbolento. Egli affermò che la una generica grandezza ξ può in realtà essere scomposta nella somma tra il valore medio di Reynold e la deviazione della media, nota anche come fluttuazione turbolenta di quella stessa grandezza:

$\xi = \langle \xi \rangle + \xi'$

$\langle \xi \rangle = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} \xi dt$

Per definizione di media e grazie alla decomposizione di Reynolds possiamo subito affermare che la media delle fluttuazioni è nulla. la scelta dell'ampiezza dell'intervallo T non è universale ma varia in funzione del problema studiato. Inoltre l'intervallo T deve essere:

- Abbastanza ampio da eliminare le non-stazionarietà dovute alle turbolenze
- Abbastanza piccolo da fare in modo che la media sia comunque influenzata da eventuali non-stazionarietà di grande scala dovuto alle condizioni al contorno

BILANCIO DI MASSA INDEFINITO PER TURBOLENZA = rivediamo ora il bilancio di massa, o l'equazione di continuità, considerando le definizioni appena date. L'unica differenza è che nel bilancio di massa dell'equazione di Navier-Stokes si ha il campo di moto istantaneo $\bar{v}$ mentre in questo caso si ha il campo di moto medio $\langle\bar{v}\rangle$:

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0$$

$$\langle \nabla \cdot \bar{v} = 0 \rangle$$

$$\nabla \cdot \langle\bar{v}\rangle = 0$$

Applicando la decomposizione di Reynolds si nota che il campo di moto fluttuante ha divergenza nulla e quindi è isocoro:

$$\nabla \cdot \bar{v} = \nabla \cdot (\langle\bar{v}\rangle + \bar{v}') = \nabla \cdot \langle\bar{v}\rangle + \nabla \cdot \bar{v}' = \nabla \cdot \bar{v}' = 0$$

BILANCIO DI MASSA GLOBALE PER TURBOLENZA = rivediamo ora il bilancio di massa globale e scopriamo che, la portata media entrante è uguale a quella che esce dal contorno del volume di controllo (l'equazione è infatti uguale a 0):

$$\int_W \nabla \cdot \langle\bar{v}\rangle \, dW = 0$$

$$\int_W \nabla \cdot \langle\bar{v}\rangle \, dW = -\int_A \langle\bar{v}\rangle \, \hat{n} dA = 0$$

BILANCIO DI QUANTITÀ DI MOTO INDEFINITO PER TURBOLENZA = applichiamo ora l'operatore media di Reynolds all'equazione di bilancio della quantità di moto in forma conservativa e notiamo che abbiamo due fattori: il primo che rappresenta le inerzie convettive del moto medio e uno che invece rappresenta le inerzie convettive associate con le fluttuazioni di velocità e coincide con la divergenza del tensore degli sforzi di Reynolds che rappresenta lo sforzo turbolento:

$$\left\langle -\nabla \mathrm{p} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho g \nabla \tilde{z} = \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}\bar{v}) \right\rangle$$

$$-\nabla\langle \mathrm{p}\rangle + \mu \nabla^2 \langle\bar{v}\rangle - \rho g \nabla \tilde{z} = \frac{\partial(\rho\langle\bar{v}\rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \langle\bar{v}\bar{v}\rangle)$$

$$\nabla \cdot (\rho\langle\bar{v}\bar{v}\rangle) = \nabla \cdot \big(\rho(\langle\bar{v}\rangle + \bar{v}')(\langle\bar{v}\rangle + \bar{v}')\big) = \nabla \cdot (\rho\langle\bar{v}\rangle\langle\bar{v}\rangle) + \nabla \cdot (\rho\langle\bar{v}'\bar{v}'\rangle)$$

$$\nabla \cdot (\rho\langle\bar{v}'\bar{v}'\rangle) = \nabla \cdot \overline{\overline{\Phi_{Re}}}$$

$$-\nabla\langle \mathrm{p}\rangle + \mu \nabla^2 \langle\bar{v}\rangle - \rho g \nabla \tilde{z} = \frac{\partial(\rho\langle\bar{v}\rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\langle\bar{v}\rangle\langle\bar{v}\rangle) + \nabla \cdot \overline{\overline{\Phi_{Re}}}$$

BILANCIO DI QUANTITÀ DI MOTO IN FORMA GLOBALE PER TURBOLENZA = applichiamo ora l'operatore media di Reynolds all'equazione di bilancio della quantità di moto in forma globale e notiamo che il flusso della quantità di moto

M può essere scomposto in una grandezza $\overline{M_m}$ che rappresenta il flusso di quantità di moto medio e una grandezza $\bar{M}'$ che rappresenta invece il flusso di quantità di moto turbolento dovuto alle componenti di agitazione:

$$\langle\overline{\Pi_p}\rangle + \langle\overline{\Pi_\mu}\rangle + \bar{G} + \langle\bar{I}\rangle + \langle\bar{M}\rangle = \bar{0}$$

$$\langle\bar{I}\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\int_W \rho\langle\bar{v}\rangle dW$$

$$\langle\overline{\Pi_p}\rangle = -\int_A \langle \mathrm{p}\rangle\, \hat{n} dA$$

$$\langle\overline{\Pi_\mu}\rangle = -\int_A \mu\frac{\partial\langle\bar{v}\rangle}{\partial n}dA$$

$$\langle\bar{M}\rangle = \overline{M_m} + \bar{M}'$$

$$\langle\overline{\Pi_p}\rangle + \langle\overline{\Pi_\mu}\rangle + \bar{G} + \langle\bar{I}\rangle + \overline{M_m} + \bar{M}' = \bar{0}$$

APPLICAZIONE DEL MOTO TURBOLENTO IN CONDOTTA = analizziamo ora il moto di un fluido in regime turbolento in una condotta a sezione circolare di diametro D. Suddividiamo la superfice di contorno del volume di controllo in due superfici piane 1,2, coincidenti con le basi del cilindro, e una superficie curva 0, corrispondente con quella laterale. Applichiamo dunque l'equazione del bilancio di quantità di moto in forma globale per il regime turbolento:

$$\langle\overline{\Pi_p}\rangle + \langle\overline{\Pi_\mu}\rangle + \bar{G} + \langle\bar{I}\rangle + \overline{M_m} + \bar{M}' = \bar{0}$$

$$\langle\overline{\Pi_{p,0}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{p,1}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{p,2}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{\mu,1}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{\mu,2}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{\mu,0}}\rangle + \bar{G} + \langle\bar{I}\rangle + \overline{M_{m,1}} + \overline{M_1}' + \overline{M_{m,2}} + \overline{M_2}' + \overline{M_{m,0}} + \overline{M_0}' = \bar{0}$$

Possiamo notare che:
- La risultante delle inezie locali medie è nulla perché il problema è stazionario in media: $\langle\bar{I}\rangle = \bar{0}$
- Il flusso di quantità di moto medio attraverso la superficie laterale è nullo per il versore e il vettore velocità sono tra loro perpendicolari e quindi il loro prodotto è nullo: $\overline{M_1}' + \overline{M_2}' = \bar{0}$
- La somma dei due flussi di quantità di moto medio attraverso le due superfici piane è nulla: $\overline{M_{m,1}} + \overline{M_{m,2}} = \bar{0}$
- La somma dei due flussi di quantità di moto turbolenti attraverso le due superfici piane è nulla: $\overline{M_{m,1}} + \overline{M_{m,2}} = \bar{0}$
- La risultante degli sforzi viscosi medi sulla superficie piana 1 risulta nulla vito che per continuità la dritta della velocità media in direzione x è ovunque nulla: $\langle\overline{\Pi_{\mu,1}}\rangle = \bar{0}$
- La risultante degli sforzi viscosi medi sulla superficie piana 2 risulta nulla vito che per continuità la dritta della velocità media in direzione x è ovunque nulla: $\langle\overline{\Pi_{\mu,2}}\rangle = \bar{0}$

Ottengo dunque un'equazione che proietto poi lungo l'asse x:

$$\langle\overline{\Pi_{p,0}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{p,1}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{p,2}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{\mu,0}}\rangle + \bar{G} + \overline{M_0}' = \bar{0}$$

$$\langle\overline{\Pi_{p,0x}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{p,1x}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{p,2x}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{\mu,0x}}\rangle + \overline{G_x} + \overline{M_{0x}}' = \bar{0}$$

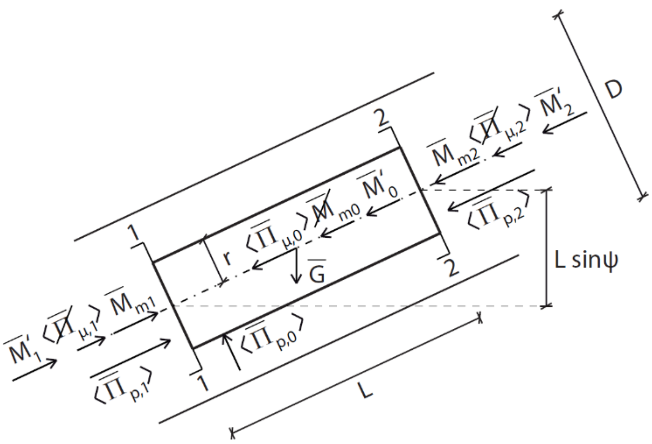
$$\langle\overline{\Pi_{p,0x}}\rangle = \bar{0}$$

$$\langle\overline{\Pi_{p,1x}}\rangle = \langle p_1\rangle\pi r^2\hat{\imath}$$

$$\langle\overline{\Pi_{p,2x}}\rangle = -\langle p_2\rangle\pi r^2\hat{\imath}$$

$$\langle\overline{\Pi_{\mu,0x}}\rangle = -\tau_{visc}2\pi r L\hat{\imath}$$

$$\overline{G_x} = -\gamma\pi r^2 L\sin\psi\,\hat{\imath}$$



$\overline{M_0}' = -\tau_{turb}2\pi rL\hat{\imath}$

$\langle\overline{\Pi_{p,0x}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{p,1x}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{p,2x}}\rangle + \langle\overline{\Pi_{\mu,0x}}\rangle + \overline{G_x} + \overline{M_{0x}}' = \bar{0}$

$\langle p_1\rangle\pi r^2 - \langle p_2\rangle\pi r^2 - \tau_{visc}2\pi rL - \gamma\pi r^2 L\sin\psi - \tau_{turb}2\pi rL = \bar{0}$

$\langle p_1\rangle\pi r^2 - \langle p_2\rangle\pi r^2 - \gamma\pi r^2 L\sin\psi = \tau_{visc}2\pi rL + \tau_{turb}2\pi rL$

$L\sin\psi = \widetilde{z_2} - \widetilde{z_1}$

$\langle p_1\rangle\pi r^2 - \langle p_2\rangle\pi r^2 - \gamma\pi r^2(\widetilde{z_2} - \widetilde{z_1}) = 2\pi rL(\tau_{visc} + \tau_{turb})$

$\langle p_1\rangle\pi r^2 - \langle p_2\rangle\pi r^2 - \gamma\pi r^2\widetilde{z_2} + \gamma\pi r^2\widetilde{z_1} = 2\pi rL(\tau_{visc} + \tau_{turb})$

$$\gamma\pi r^2\left[\left(\widetilde{z_1} + \frac{\langle p_1\rangle}{\gamma}\right) - \left(\widetilde{z_2} + \frac{\langle p_2\rangle}{\gamma}\right)\right] = 2\pi rL(\tau_{visc} + \tau_{turb})$$

$$\left[\left(\widetilde{z_1} + \frac{\langle p_1\rangle}{\gamma}\right) - \left(\widetilde{z_2} + \frac{\langle p_2\rangle}{\gamma}\right)\right] = JL$$

$\gamma\pi r^2 JL = 2\pi rL(\tau_{visc} + \tau_{turb})$

$\gamma rJ = 2(\tau_{visc} + \tau_{turb})$

$$\tau_{visc} + \tau_{turb} = \frac{\gamma rJ}{2}$$

Questa equazione indica che lo sforzo tangenziale totale, somma di quello viscoso e di quello turbolento, è distribuito linearmente con la coordinata radiale: è nullo in corrispondenza dell'asse e massimo in corrispondenza della parete della condotta.

PARADOSSO E VELOCITA' FRATTALE = analizzando l'equazione qui sotto scritta, che può essere facilmente ricavata, notiamo che se $Re \to \infty$ il primo termine sembrerebbe tendere a 0 e dunque vorrebbe dire che il termine associato agli sforzi viscosi è nullo, tuttavia a destra dell'uguale è presente un termine dissipativo che dipende dalla cadente che è diverso da 0 perché per $Re \to \infty$ l'indice di resistenza $\lambda \to \lambda_\infty$ che è diverso da 0, il problema è che l'unico termine che rimane cioè tao turbolento non è un termine dissipativo ma un termine cinetico, il paradosso è dunque che sembra che per $Re \to \infty$ gli sforzi viscosi non ci siano ma le dissipazioni rimangono, l'unica soluzione a questo problema è che l$\langle\frac{\partial\breve{u}}{\partial\breve{r}}\rangle$ non sia un numero finito un numero che tenda all'infinito in modo tale il prodotto tra ∞e $1/\infty$ non tenda a zero. Una funzione u che è continua ma che ha derivata infinita è detta frattale. Per tanto l'unica soluzione è che u sia una funzione matematica molto particolare la cui derivata tenda ad infinito.

$$\frac{1}{Re}\langle\frac{\partial\breve{u}}{\partial\breve{r}}\rangle - \langle\breve{u}'\breve{v_r}'\rangle = -\frac{\lambda}{4}\breve{r}$$

$Re \to \infty \qquad \frac{1}{Re}\langle\frac{\partial\breve{u}}{\partial\breve{r}}\rangle \to 0$

$Re \to \infty \qquad \lambda \to \lambda_\infty \neq 0$

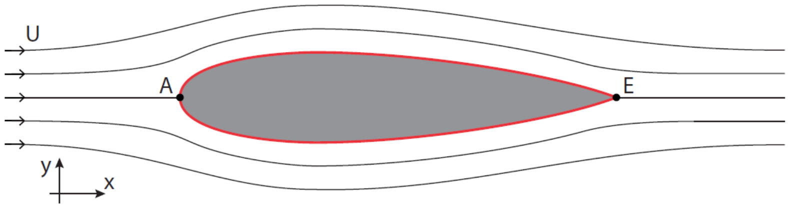
METODO DNS = metodi numerici che risolvono il moto turbolento discretizzando le equazioni di Navier Stokes. Si risolvono direttamente tutte le scale turbolente della cascata energetica senza modellare alcunché

METODO RANS = metodi numerici che risolvono il moto turbolento risolvendo le equazioni di Reynolds. Si risolve solo il moto medio e si modella tutta la turbolenza. Presenta una serie di vantaggi computazioni rispetto al metodo DNS come ad esempio la possibilità di scegliere un passo di griglia abbastanza piccolo da garantire la stabilità numerica durante l'integrazione e consentire nel contempo di ottenere una descrizione sufficientemente dettagliata del campo di moto e di pressione medio. Presenta però anche degli svantaggi come la necessità di modellizzare la turbolenza stessa (pdf)

METODO LES = metodi numerici che di fatto è un compromesso tra i metodi DNS e i metodi RANS perché risolve tutta la turbolenza ma con i vantaggi computazionali dei RANS. Tecnicamente si applica un filtro passa-basso alle equazioni di Navier Stokes.

Fino ad ora abbiamo analizzato la dinamica dei fluidi Newtoniani di flussi interni, fluidi cioè che sono in movimento e sono circondati da superfici solide. Molti problemi ingegneristici però riguardano il caso duale di oggetti solidi investiti da un flusso di fluido newtoniano che li avvolge completamente. In questo secondo caso si parla di flussi esterni su corpi immersi.

FLUSSI DI FLUIDOIIDEALI ESTERNI SU PROFILO ALARE = consideriamo il caso in cui un oggetto solido dotato di piano di simmetria si muova con una certa velocità U costante nel tempo all'interno di un fluido che si può considerare fermo ad una sufficiente distanza dal corpo. Utilizzando la relatività galileiana possiamo metterci in un sistema di riferimento solidale con il corpo che risulta quindi fermo e investito da una corrente fluida avente profilo uniforme di velocità, di modulo U, a monte dell'oggetto. Essendo un fluido ideale non vale la condizione di aderenza alla parete quindi la velocità del fluido in corrispondenza della superficie solida non è nulla e di conseguenza esistono linee di corrente che appartengono alla superficie dell'oggetto. I punti da cui queste linee divergono e convergono sono detti punti di stagnazione; nello specifico quello da cui divergono è detto punto di attacco mentre il punto a cui convergono è detto punto di uscita. In questi punti la pressione è massima visto che la velocità è minima (dal teorema di Bernoulli). Nell'area di passaggio dunque la velocità aumenta e la pressione diminuisce



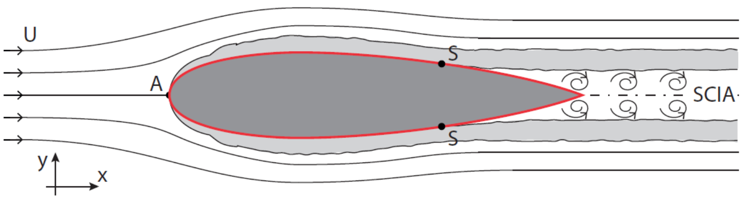
FLUSSI DI FLUIDI REALI ESTERNI SU PROFILO ALARE = consideriamo ora il caso in cui il fluido sia reale. In questo caso vale invece la condizione di aderenza e dunque la velocità del fluido in corrispondenza della superficie solida è nulla. lontano dalla superfice la velocità del fluido è pari a U dunque deve necessariamente essere presente un gradiente di velocità così che questa possa passare da un valore nullo al suo modulo massimo. La zona intorno al corpo in cui deve essere presente questo gradiente di velocità avrà uno spessore δ. Per valutare lo spessore δ possiamo ricorre all'analisi degli ordini di grandezza nel caso di corpi affusolati, corpi cioè per i quali la dimensione in direzione y è molto minore di quella in direzione x. Dall'analisi dimensionale dell'equazione di continuità e dell'equazione del bilancio di quantità di moto possiamo ricavare la seguente equazione:

$$\check{y} \sim \check{\delta} = \frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

Intuiamo così che nel caso di un fluido reale possiamo distinguere:

1. Strato limite adiacente al corpo che può essere interamente o parzialmente laminare, all'interno del quali gli effetti viscosi sono importanti e valgono le equazioni di Navier Stokes
2. Zona esterna allo strato limite, detto flusso libero, dove il fluido può essere considerato ideale e valgono quindi le equazioni di Eulero

Inoltre possiamo affermare che esiste una zona a valle detta zona di separazione in cui la componente x della velocità è sia positiva che negativa.



EQUAZIONI DI STRATO LIMITE = svolgiamo ora in maniera più dettagliata un'analisi degli ordini di grandezza dei vari termini che compongono le equazioni di Navier-Stokes all'interno dello strato limite

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0$$

$$\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{x}} + \frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{y}} = 0$$

$$-\breve{\nabla}\widetilde{p_e} + \frac{1}{Re}\breve{\nabla}^2 \breve{v} = \breve{\nabla} \cdot (\breve{v}\breve{v})$$

Proiettiamo questa equazione nelle direzioni $\breve{y}$ e$\breve{x}$:

$$-\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial \breve{x}^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial \breve{y}^2}\right) = \breve{u}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{x}} + \breve{v}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{y}}$$

$$-\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{y}} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \breve{v}}{\partial \breve{x}^2} + \frac{\partial^2 \breve{v}}{\partial \breve{y}^2}\right) = \breve{u}\frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{x}} + \breve{v}\frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{y}}$$

Riscriviamo queste equazioni mettendo in evidenza gli ordini di grandezza:

$$\breve{u} = O(1) \qquad \breve{x} = O(1) \qquad \breve{y} = O(\breve{\delta}) \qquad \frac{1}{Re} = O(\breve{\delta}^2)$$

$$\breve{y}^2 = O(\breve{\delta}^2) \qquad \breve{v} = O(\breve{\delta})$$

$$-\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}} + O(\breve{\delta}^2)\left(\frac{O(1)}{O(1)} + \frac{O(1)}{O(\breve{\delta}^2)}\right) = O(1)\frac{O(1)}{O(1)} + O(\breve{\delta})\frac{O(1)}{O(\breve{\delta})}$$

$$-\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{y}} + O(\breve{\delta}^2)\left(\frac{O(\breve{\delta})}{O(1)} + \frac{O(\breve{\delta})}{O(\breve{\delta}^2)}\right) = O(1)\frac{O(\breve{\delta})}{O(1)} + O(\breve{\delta})\frac{O(\breve{\delta})}{O(\breve{\delta})}$$

Possiamo trascurare le grandezze di ordini $O(\breve{\delta}^2)$ e $O(\breve{\delta}^3)$ quindi otteniamo le equazioni parabolizzate di Navier Stokes:

$$-\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial \breve{y}^2} = \breve{u}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{x}} + \breve{v}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{y}}$$

$$-\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{y}} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 \breve{v}}{\partial \breve{y}^2} = \breve{u}\frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{x}} + \breve{v}\frac{\partial \breve{v}}{\partial \breve{y}}$$

Posiamo trascurare anche i termini $O(\breve{\delta})$ e otteniamo le equazioni di strato limite:

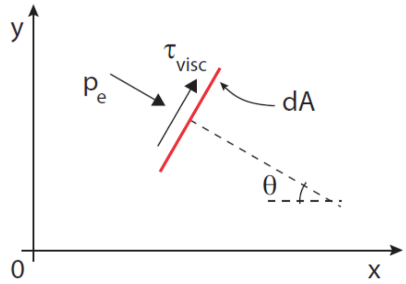
$$-\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{x}} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial \breve{y}^2} = \breve{u}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{x}} + \breve{v}\frac{\partial \breve{u}}{\partial \breve{y}}$$

$$\frac{\partial \widetilde{p_e}}{\partial \breve{y}} = 0$$

La pressione all'interno dello strato limite è pari a quella in corrispondenza dell'interfaccia con il flusso libero, all'interno del quale valgono le equazioni di Eulero. Per risolvere queste equazioni conviene ipotizzare di avere un fluido ideale.

Vogliamo ora risolvere il problema tipicamente ingegneristico di determinare le forze e i momenti che un flusso esterno esercita su di un corpo immerso. Analizziamo per semplicità solo le forze e non i momenti.

DRAG E LIFT = per prima cosa notiamo che le forze sono dovute al fatto che localmente, sulla superficie infinitesima dA, è presente p_e e lo sforzo tangenziale viscoso τ_{visc}. Una volta individuato l'orientamento della superficie possiamo scrivere la forza infinitesima esercitata lungo le due direzione x e y:



$$dF_x = (p_e \cos\vartheta + \tau_{visc} \sin\vartheta)dA$$

$$dF_y = (-p_e \sin\vartheta + \tau_{visc} \cos\vartheta)dA$$

La risultante delle forze infinitesimi nelle due direzioni si ottiene integrando le due forze infinitesime:

$$F_x = D = \int_A dF_x\, dA = \int_A (p_e \cos\vartheta + \tau_{visc} \sin\vartheta)dA = \int_A p_e \cos\vartheta\, dA + \int_A \tau_{visc} \sin\vartheta\, dA$$

$$F_y = L = \int_A dF_y\, dA = \int_A (-p_e \sin\vartheta + \tau_{visc} \cos\vartheta)dA = \int_A -p_e \sin\vartheta\, dA + \int_A \tau_{visc} \cos\vartheta\, dA$$

La risultante delle forze infinitesime lungo la direzione x prende il nome di Drag, cioè resistenza, e può essere vista come sommatoria di due contributi: uno dovuto alla distribuzione di pressione (drag di pressione o drag di forma) e una dovuta alla distribuzione degli sforzi tangenziali (drag d'attrito e drag viscoso). La risultante delle forze infinitesime lungo la direzione y prende invece il nome di Lift cioè portanza. Anche in questo caso abbiamo un contributo dovuto alla distribuzione di pressione e uno dovuto alla distribuzione degli sforzi tangenziale.
Chiaramente per determinare drag e lift di un corpo occorre conoscere la geometria dello stesso e la distribuzione delle pressioni e degli sforzi tangenziali.

DRAG PER FLUIDI IDEALI (TEOREMA DI D'ALAMBERT) = il drag per fluidi ideali è nullo perché entrambe le componenti lo sono. Ciò comporta che non è possibile si può stabilire il verso del flusso indisturbato e quindi il fluido ideale non può esercitare forze nella direzione del flusso indisturbato.

DRAG PER FLUIDI REALI = come già accennato il drag per i fluidi reali dipende dalla geometria del corpo immerso, ma anche dalle proprietà del fluido come densità, viscosità e comprimibilità, dalla velocità del flusso indisturbato e dalla scabrezza superficiale:

$$D = f(forma, l, \rho, \mu, \epsilon, U, \mathcal{R})$$

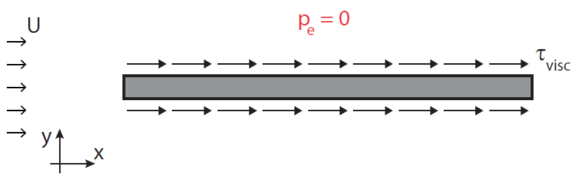
Se usiamo la terna inerziale per adimensionalizzate il problema otteniamo il coefficiente di Drag cioè il gruppo pigreco associato con il drag:

$$\Pi_D = C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = f'\left(forma, Re, Ma, \frac{\mathcal{R}}{l}\right)$$

- Corpi affusolati = vediamo ora come il coefficiente di drag dipende dalla scabrezza relativa e dal numero di Reynolds nel caso di corpi affusolati. Questo caso è rappresentato da una lastra piana di lunghezza l. In questo caso la il drag di pressione e dunque la forza di drag è dovuta solo al drag d'attrito. L'area che compare nella formula del coefficiente di drag sarà l'area della lastra quindi il prodotto tra la lunghezza e la profondità. Inoltre se Re<1 (si parla di flusso di Stokes) le inerzie non contano quindi né la densità né la scabrezza vanno considerate come variabili di controllo:

  $$D = f(forma, l, \mu, U)$$

  Usando la terna viscosa: $\frac{D}{\rho U l} = f''(forma)$



- Corpi tozzi = vediamo ora come il coefficiente di drag dipende dalla scabrezza relativa e dal numero di Reynolds nel caso di corpi tozzi. Il caso più estremo di corpo tozzo è rappresentato da una lastra posta perpendicolare al flusso. Notiamo subito che a valle della lastra il flusso di è separato a causa degli spigoli vivi. La forza di drag in questo caso è dovuta solamente alle pressioni e non agli sforzi tangenziali. Il drag è dunque generato da una mancata simmetria nella distribuzione delle pressioni tra monte e valle del corpo, a sua volta associato con la separazione del flusso e la conseguente creazione di una zona di scia. La velocità è massima e quindi la pressione è minima in corrispondenza del massimo ingombro del corpo.
  Prendiamo come esempi di corpo tozzo una sfera di diametro d investita da una corrente stazionario e uniforma con velocità U:
  - $Re < 1$ si parla ancora di flusso di Stokes. Il coefficiente di drag risulta essere inversamente proporzionale al numero di Re e la costante di proporzionalità dipende dalla forma del corpo tozzo. In questo caso non si verifica separazione
  - $1 < Re < 50$ il flusso si separa dal corpo e si formano a valle del corpo due vortici a delta simmetrici e stazionari noti come bolle stazionarie
  - $50 < Re < 10^3$ si forma la scia vorticosa oscillante di Karman che consiste nella formazione alternata di vortici controrotanti a valle del corpo in corrispondenza del quadrante superiore e inferiore
  - $10^3 < Re < 10^5$ si crea attorno al corpo uno strato limite laminare che si separa dalla sfera più o meno in corrispondenza della sezione di massimo ingombro. A valle del corpo è presente una scia turbolenta all'interno della quale la pressione si mantiene circa uniforme
  - $Re \cong 10^5$ vi è transizione da strato limite laminare a turbolento. La separazione viene più a valle rispetto allo strato limite laminare. Una volta avvenuta la transizione il coefficiente di drag aumenta con iol numero di Reynolds fino a saturare quando la scabrezza è interamente emersa dal substrato limite viscoso: il coefficiente di drag diventa auto simile rispetto a Re.