COMPLETEZZA DELL'INSIEME DEI NUMERI REALI $\mathbb{R}$.

FABIO CIPRIANI

1. Completezza dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ la condizione di Cauchy e' necessaria e sufficiente per la convergenza di successioni. Da questa proprieta' di completezza ne seguono altre tre che dimostriamo qui di seguito. La prima riguarda la convergenza di successioni monotone, la seconda l'esistenza dell'estremo superiore di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ mentre la terza concerne l'esistenza di punti di accumulazione di sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$.

Theorem 1.1. *(Convergenza di successione monotone e limitate in $\mathbb{R}$) Sia $\{x_n \in \mathbb{R} : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ una successione monotona crescente (risp. decrescente) e superiormente (risp. inferiormente) limitata. Allora la successione e' convergente.*

Proof. Limiteremo la dimostrazione alle successioni crescenti superiormente limitate. Per la completezza di $\mathbb{R}$ e' sufficiente mostrare che la successione e' di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \text{esiste} \qquad N \geq 1 \qquad \text{tale che se} \qquad n, m \geq N \qquad \text{allora} \qquad |x_n - x_m| < \varepsilon\,.$$

Supponiamo, per assurdo, che la successione non sia di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$ si avrebbe che

$$\forall\ N \geq 1 \qquad \text{esistono} \qquad n_N\,, m_N \geq N \qquad \text{tale che} \qquad |x_{n_N} - x_{m_N}| \geq \varepsilon\,.$$

Possiamo supporre che $m_N \leq n_N$ per ogni $N \geq 1$ di modo che, essendo la successione crescente si abbia

$$x_{n_N} - x_{m_N} = |x_{n_N} - x_{m_N}| \geq \varepsilon\,.$$

Per $N_1 := 1$ siano quindi $n_1 \geq m_1 \geq 1$ tali che $x_{n_1} \geq \varepsilon + x_{m_1}$,
per $N_2 := n_1$ siano quindi $n_2 \geq m_2 \geq N_2 = n_1$ tali che $x_{n_2} \geq \varepsilon + x_{m_2}$,
. . .
per $N_{k+1} := n_k$ siano quindi $n_{k+1} \geq m_{k+1} \geq N_{k+1} = n_k$ tali che $x_{n_{k+1}} \geq \varepsilon + x_{m_{k+1}}$,
. . . .
Poiche' la successione e' crescente abbiamo che $m_{k+1} \geq n_k$ implica che $x_{m_{k+1}} \geq x_{n_k}$ e di conseguenza che

$$x_{n_{k+1}} \geq \varepsilon + x_{m_{k+1}} \geq \varepsilon + x_{n_k} \geq \cdots \geq k\varepsilon + x_{n_1} \geq k\varepsilon + x_1 \qquad \forall \quad k \geq 1.$$

Quindi

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_{k+1}} = +\infty\,.$$

Poiche' cio' contraddice l'ipotesi di limitatezza superiore, la successione e' necessariamente di Cauchy. $\square$

Esercizio. Mostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ cioe' che l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni razionali.

Esercizio. Mostrare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ cioe' che l'equazione $x^2 = 3$ non ha soluzioni razionali.

Esercizio. Sia $p \in \mathbb{P}$ un numero primo. Mostrare che $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ cioe' che l'equazione $x^2 = p$ non ha soluzioni razionali. **Suggerimento**: ogni numero naturale $m \in \mathbb{N}$ puo' essere decomposto in maniera unica come prodotto di numeri primi

$$m = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \qquad p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}\,, \qquad n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\,.$$

Example 1.2. La successione definita per ricorrenza da

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad n \geq 1\,,$$

converge al numero $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Poiche' $x_1 = 2 > 0$ per definizione e, se supponiamo $x_n > 0$, dalla relazione di ricorrenza, segue che $x_{n+1} > 0$, per il Principio di Induzione si deduce che $x_n > 0$ per $n \geq 1$ per cui la successione e' ben definita (in particolare cioe' $x_n \neq 0$ per $n \geq 1$) e inferiormente limitata.

Poiche' $x_1 = 2 \in \mathbb{Q}$ per definizione e, se supponiamo $x_n \in \mathbb{Q}$, dalla relazione di ricorrenza, segue che $x_{n+1} \in \mathbb{Q}$, per il Principio di Induzione si deduce che $x_n \in \mathbb{Q}$ per $n \geq 1$ per cui la successione e' formata da numeri razionali.

Poiche' per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $(a-b)^2 \geq 0$, ne segue la disuguaglianza $2ab \leq a^2+b^2$. La relazione di ricorrenza implica allora che per $n \geq 1$ si abbia

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad \Rightarrow \qquad 2 + x_n^2 = 2x_n x_{n+1} \leq x_n^2 + x_{n+1}^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2 \leq x_{n+1}^2\,.$$

Poiche' $x_1^2 = 4 > 2$ si ha

$$x_n^2 \geq 2 \qquad \forall \quad n \geq 1\,.$$

Poiche' per $n \geq 1$ si ha

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \Big(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\Big) = \frac{x_n}{2} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \geq 0,$$

la successione e' monotona decrescente e inferiormente limitata e quindi, per il Teorema 1.1 convergente in $\mathbb{R}$. Sia $l := \lim_{n\to+\infty} x_n \in \mathbb{R}$ il suo limite. Infine, poiche' la relazione di ricorrenza implica che

$$l = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\Big) = \frac{l}{2} + \frac{1}{l}\,,$$

deduciamo che il numero l e' la soluzione positiva dell'equazione $l^2 = 2$, cioe' che $l = \sqrt{2}$.

Esercizio. Siano $k \geq 1$ intero e $p > 0$ fissati. Si scelga $x_1 \in \mathbb{N}$ tale che $x_1^k \geq p$ e si mostri che la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} := \frac{k-1}{k} x_n + \frac{p}{k x_n^{k-1}} \qquad n \geq 1\,,$$

converge al numero $p^{1/k} \in \mathbb{R}$.
Suggerimento: si usi la disuguaglianza di Bernoulli: $a^k \geq (1-k) + ka$ valida per $a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$.

Definition 1.3. (Estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo)
Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, un numero $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e' detto **extremo superiore di** A se

- $\overline{x}$ un **maggiorante di** A
$$x \in A \Rightarrow x \leq \overline{x}$$
- e se $\overline{x}$ e' il **minimo dei maggioranti di** A nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$, $\overline{x} - \varepsilon$ non e' un maggiorante di A, esiste cioe' $x \in A$ tale che $\overline{x} - \varepsilon < x$.

Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, un numero $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e' detto **extremo inferiore di** A se

- $\overline{x}$ un **minorante di** A
$$x \in A \Rightarrow x \geq \overline{x}$$
- e se $\overline{x}$ e' il **massimo dei minoranti di** A nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$, $\overline{x} - \varepsilon$ non e' un minorante di A, esiste cioe' $x \in A$ tale che $\overline{x} - \varepsilon > x$.

Se esiste, l'estremo superiore (risp. inferiore) di A si indica con $\sup A$ (risp. $\inf A$). Se l'estremo superiore (risp. inferiore) appartiene all'insieme, $\sup A \in A$ (risp.$\inf A \in A$), allora e' detto **massimo** (risp. **minimo**) e indicato con $\max A$ (risp. $\min A$).

Example 1.4. Se $A = (a, b)$ allora $\sup A = b$, $\inf A = a$ e non esistono $\max A$ e $\min A$. Se $B = [a, b]$ allora $\sup A = \max A = b$, $\inf A = \min A = a$.

Esercizio. Determinare, se esistono, $\sup A\,, \inf A\,, \max A\,, \min A$ di
$$A := \{(-1)^{n+1} - \frac{1}{n} : n \geq 1\}\,.$$

Esercizio. Sia $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la successione dell'Esempio 1.2. Determinare $\inf A$.

Se un insieme A **non e' superiormente (risp. inferiormente) limitato** allora non esistono maggioranti (risp. minoranti) ne tantomeno esiste $\sup A$ (risp. $\inf A$). Viceversa

Theorem 1.5. *(Esistenza dell'estremo superiore per insiemi superiormente limitati) Se $A \subset \mathbb{R}$ e' superiormente limitato, allora esiste $\sup A \in \mathbb{R}$.*

Proof. Poiche' A e' superiormente limitato, esiste $b_0 \in \mathbb{R}$ maggiorante di A:

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq b_0 \,.$$

Sia $a_0 \in A$ un elemento fissato di A di modo che

$$[a_0 \,, b_0] \cap A \neq \emptyset \,.$$

Sia $c := \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio di $[a_0 \,, b_0]$ e consideriamo i due sub-intervalli

$$[a_0 \,, c] \qquad \text{e} \qquad [c \,, b_0] \,.$$

Evidentemente in almeno uno dei due sub-intervalli vi sono elementi di A. Ne scegliamo uno dei due, denotandolo con $[a_1 \,, b_1]$, optando per quello di destra se entrambe le meta' contengono elementi di A. Evidentemente abbiamo che

$$[a_1 \,, b_1] \cap A \neq \emptyset$$

e che b_1 e' un maggiorante di A:

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq b_1 \,.$$

Iterando questo procedimento (detto di dicotomia) otteniamo una successione decrescente di intervalli

$$\cdots \subset [a_{n+1} \,, b_{n+1}] \subset [a_n \,, b_n] \cdots \subset [a_1 \,, b_1] \subset [a_0 \,, b_0]$$

tali che per ogni $n \geq 1$ si ha che b_n e' maggiorante di A

$$n \geq 1 \,, \qquad x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq b_n \tag{1.1}$$

e che per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$[a_n \,, b_n] \cap A \neq \emptyset \,.$$

Poiche ' la successione $\{a_n\}$ e' crescente e superiormente limitata da b_0

$$\ldots a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_0 \,,$$

la successione $\{b_n\}$ e' decrescente e inferiormente limitata da a_0

$$a_0 \leq \ldots \ldots b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0 \,,$$

per il Teorema 1.1, esiste $\overline{x} \in \mathbb{R}$ limite comune delle due successioni

$$\overline{x} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n \,.$$

Mostriamo ora che proprio $\overline{x}$ e' $\sup A$. Infatti, per il teorema del confronto, passando al limite nella (1.1) abbiamo che

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq \overline{x}$$

e che quindi $\overline{x}$ e' un maggiorante di A. Se, per assurdo, non fosse $\overline{x} = \sup A$, esisterebbe $\varepsilon > 0$ per il quale $\overline{x} - \varepsilon$ sarebbe un maggiorante di A, strettamente minore di $\overline{x}$:

$$x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x \leq \overline{x} - \varepsilon < \overline{x} \,.$$

Ma poiche' $\overline{x} = \lim_{n\to+\infty} a_n$, esisterebbe $n \geq 1$ per cui $\overline{x} - \varepsilon < a_n < \overline{x}$. Cio' contradirebbe il fatto che, per costruzione, $[a_n \,, b_n] \cap A \neq \emptyset$. $\square$

Definition 1.6. (Punti di accumulazione)
Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ e' detto di **accumulazione per** E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (E \setminus \{\overline{x}\}) \cap (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon) \neq \emptyset$$

cioe' se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in E \setminus \{\overline{x}\} \quad \textit{such that} \ |x - \overline{x}| < \varepsilon$$

cioe' se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ l'insieme \ \ E \cap (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon) \ \ e' \ infinito \ (ha \ cioe' \ infiniti \ elementi)\,.$$

L'insieme dei punti di accumulazione di $E \subseteq \mathbb{R}$ e' detto **insieme derivato di** E e si denota con $\mathbf{E}'$.

Dato un insieme A, indicheremo con il simbolo $\sharp(\mathbf{A}) = \infty$ il fatto che abbia infiniti elementi (cioe' che non sia un insieme finito).

Theorem 1.7. *(Proprieta' di Bolzano-Weierstrass.)*
Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato e infinito. L'insieme dei punti di accumulazione E' di E e' allora non vuoto:

$$E' \neq \emptyset\,.$$

Proof. Poiche' E e' limitato, esiste un intervallo limitato $[a_0\,, b_0] \subset \mathbb{R}$ che lo contine: $E \subseteq [a_0\,, b_0]$. Sia $c := \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio di $[a_0\,, b_0]$. Evidentemente almeno uno dei due sub-intervalli

$$[a_0\,, c] \qquad \text{e} \qquad [c\,, b_0]$$

contiene infiniti punti di E. Ne scegliamo uno e lo denotiamo con $[a_1\,, b_1]$. Avremo che $[a_1\,, b_1] \cap E$ e' infinito:

$$\sharp([a_1\,, b_1] \cap E) = \infty\,.$$

Iterando questo procedimento (detto di dicotomia) otteniamo una successione decrescente di intervalli

$$\cdots \subset [a_{n+1}\,, b_{n+1}] \subset [a_n\,, b_n] \cdots \subset [a_1\,, b_1] \subset [a_0\,, b_0]$$

tali che per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$\sharp([a_n\,, b_n] \cap E) = \infty\,.$$

Poiche' la successione $\{a_n\}$ e' crescente e superiormente limitata da b_0

$$\ldots a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_0\,,$$

la successione $\{b_n\}$ e' decrescente e inferiormente limitata da a_0

$$a_0 \leq \ldots \ldots b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0\,,$$

per il Teorema 1, esiste $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tale che

$$\overline{x} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n\,.$$

Scegliendo $x_n \in [a_n\,, b_n] \cap E$ con $x_n \neq \overline{x}$ (cio' si puo' fare poiche' in $[a_n\,, b_n] \cap E$ vi sono infiniti punti ed al piu' uno solo di essi puo' coincidere con $\overline{x}$), otteniamo una successione $\{x_n\} \subseteq E \setminus \{\overline{x}\}$ tale che

$$a_n \leq x_n \leq b_n \qquad n \geq 1\,.$$

Per il teorema del confronto (per limiti di successioni) abbiamo che $\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ e che quindi $\overline{x} \in E'$. $\square$