• **Massimi e Minimi Locali** $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(\Omega)$. $P_0 \in \Omega$ punto di max per f se $\exists$ un intorno W di P_0 tale che $\forall X \in W$ $\quad f(X) \leq f(P_0)$

Proposizione: Se $P_0 \in \Omega$, Ω aperto, e P_0 è un punto di max per $f \in C^2(\Omega)$. Allora $(\nabla f)_{P_0} = \emptyset$

Dimostrazione: $P_0 = (x_0, y_0)$. Poniamo $g(x) = f(x, y_0)$. Se P_0 è punto di max per $f(x,y)$ allora la funzione $x \mapsto g(x) = f(x, y_0)$ ha un punto di max in x_0. Allora $g'(x_0) = \emptyset$, ma $\emptyset = g'(x_0) = (D_1 f)_{(x_0, y_0)}$.
In modo analogo si dim che $(D_2 f)_{(x_0, y_0)} = \emptyset$. Quindi $(\nabla f)_{P_0} = \emptyset$

• **Punto Stazionario o Singolare** P_0 si dice punto stazionario, o singolare, per f se $(\nabla f)_{P_0} = \emptyset$

P_0 punto di max (o min) locale $\Rightarrow$ P_0 punto stazionario ($\not\Leftarrow$)

• **Formula di Taylor** $P = (p_1, p_2)$, $H = (h, k)$, se H molto piccolo

$$\underbrace{f(P)}_{\text{Termine grado } \emptyset} \quad f(P+H) = f(P) + \underbrace{(D_1 f)_p h + (D_2 f)_p k}_{\text{Termine grado 1}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[(D_{11} f)_p h^2 + 2(D_{12})_p hk + (D_{22})_p k^2\right]}_{\text{Termine grado 2}} + R^3 \rightarrow \text{resto}$$

dove $\dfrac{R_3}{\|H\|^2} \xrightarrow[H \to \emptyset]{} \emptyset$

• **Massimi e Minimi Vincolati** Cerco i punti (x,y) sul vincolo $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = \emptyset\}$ tali che $(\nabla f)_{(x,y)}$ sia ortogonale al vincolo S, cioè cerco i punti di max o di min di $f(x,y)$ con la condizione $g(x,y) = \emptyset$.

Cerco i punti che soddisfano:

$$\begin{cases} (\nabla f)_{(x,y)} = \lambda (\nabla g)_{(x,y)} \\ g(x,y) = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = \emptyset \end{cases}$$

Sist. lineare 3 eq. in 3 incognite, in genere non lineare (λ moltiplicatore di Lagrange)

Osservazione: Per trovare i punti di max o di min di $f = f(x,y)$ sul vincolo $g(x,y) = \emptyset$ si deve risolvere:

(LAGRANGE)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = \emptyset \end{cases}$$

LAGRANGIANA: $L(x, y, \lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

I punti stazionari della Lagrangiana si ottengono risolvendo il sistema $\nabla L = \emptyset$, che coincide con Lagrange.

• **Teorema** Supponiamo che $P = (x,y)$ sia un punto appartenente a $S = \{(x,y) \in U \mid g(x,y) = \emptyset\}$, dove $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$, e che sia P un punto di max o min di f rispetto a S. Allora $(\nabla f)_P$ è ortogonale a S (in P)

Dimostrazione: $t \mapsto x(t)$ una curva tale che $x(t) \in S \;\forall t$ e $X(\emptyset) = P$

$$\left.\frac{d}{dt} f(x(t))\right|_{t=\emptyset} = \emptyset, \text{ ma } \left.\frac{d}{dt} f(x(t))\right|_{t=\emptyset} = (\nabla f)_p \cdot X(\emptyset) \quad \text{quindi} \quad (\nabla f)_p \perp S$$

• **Studio del segno di una forma quadratica** $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ la matrice simmetrica associata a q è $A = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$, verificare $q(x,y) = X^T A X$ dove $X = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $\Rightarrow (AX) \cdot X$ prod. scalare

$$(AX) \cdot X = \Bigg(\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}}_{AX}\Bigg) \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 = q(x,y)$$

1° Metodo $q(x,y) = x^2 + 8xy + 3y^2 = \underbrace{x^2 + 8xy + 16y^2}_{(x+4y)^2} - 16y^2 + 3y^2 = \underbrace{(x+4y)}_{X}{}^2 - \underbrace{13y^2}_{\sqrt{13}\,y = Y} = X^2 - Y^2$

2° metodo: Troviamo gli autovalori di $A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ [, ricordo $A = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} =$

$= \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = \lambda^2 - \mathrm{Tr}A + \det A$]

Autovalori: radici di $\lambda^2 - 4\lambda - 13$ $\begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases}$ <0

[$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Con una rotazione scrivo q come $\boxed{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2}$]

es. Studiare la forma quadratica $q(x,y) = xy$

$\begin{cases} x = X - Y \\ y = X + Y \end{cases}$ $\quad q(x,y) = (X-Y)(X+Y) = X^2 + Y^2$

• **Equazioni Differenziali**

ORDINARIE: L'incognita è una funzione di 1 variabile reale $y = y(x)$ [es $y' = y$ o $y'' = y$]

A DERIVATE PARZIALI: L'incognita è una funzione $z = f(x,y)$ [es $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$]

• **Eq.ni differenziali ordinarie del 1° ordine in forma normale** Sono del tipo $\boxed{y' = f(x,y)}$

Il problema è trovare una funzione $y = y(x)$, definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, tale che $\forall x \in I$ $y'(x) = f(x, y(x))$. L'integrale generale dell'eq. $y' = y$ è $y(x) = ke^x$, $k \in \mathbb{R}$

Dimostrazione: Ogni funzione del tipo $y(x) = ke^x$ soddisfa $y' = y$. Se $y = y(x)$ soddisfa $y' = y$, allora y è uguale a ke^x, $k \in \mathbb{R}$.

1° metodo: (Newton) Supponiamo che y sia soluzione di $y' = y$ e che sia analitica (sviluppabile in serie di potenze) $\quad y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

Dimostrando termine a termine: $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + m a_m x^{m-1} + \dots$

Allora uguagliando la serie che da y' con la serie che da y, otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} & a_0 = a_1 \\ & 2a_2 = a_1 = a_0 \to a_2 = \frac{a_0}{2} \\ & 3a_3 = a_2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3} a_2 = \frac{a_0}{6} = \frac{1}{3!} a_0 \end{aligned}\right\} \text{In generale } a_n = \frac{1}{n!} a_0$$

Sostituendo in $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ si ha:

$$y(x) = a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2} x^2 + \dots + \frac{a_0}{n!} x^n + \dots = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) = a_0 e^x$$

2° Metodo: So che $y' = y$. Supponiamo $y(x) \neq 0$, dividendo per $y(x)$:

$\ln y = x + c$, $\quad \dfrac{y'}{y} = 1$ $\quad$ cioè $\dfrac{d}{dx} \ln(y) = 1 \Rightarrow y(x) = ke^x$

[$\ln y = x + c \Rightarrow y(x) = e^{x+c} = \underbrace{e^c}_{k} e^x = ke^x$]

Riassumendo: Fissato $k \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = k \end{cases}$ ha un unica soluzione $\boxed{y(x) = ke^x}$, $x \in \mathbb{R}$

$y(0) = k$ → condizione iniziale

• **Teorema di Esistenza e Unicità** Sia $f(x,y)$ una funzione continua nel rettangolo $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ e lipschitziana rispetto a y. Allora $\exists\, \delta > 0 \mid$ nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ il problema di Cauchy

$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha una e una sola soluzione

• Eq.ni diff lineari di ordine m: $x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = b$, dove $x(t)$ funzione incognita e i coeff. $a_0, \ldots, a_n$ e b sono funzioni assegnate (conosciute). Se $b = \emptyset$, l'eq. si dice omogenea, se $a_0, \ldots, a_m$ sono costanti, l'eq. si dice a coeff. costanti, es. $x'' + bx' + cx = f$

es. Sia $x'' + bx' + cx = \emptyset$, $b, c \in \mathbb{R}$ un eq. lineare di 2° ordine a coeff. costanti, dimostrare che le soluzioni dell'eq. costituiscono uno sp. vett.

1° Soluzione: Siano x_1, x_2 soluzioni dell'eq. assegnata. $x_1'' + bx_1' + cx_1 = \emptyset$

$x_2'' + bx_2' + cx_2 = \emptyset$

Sommando $(x_1+x_2)'' + b(x_1+x_2)' + c(x_1+x_2) = \emptyset$ Quindi anche (x_1+x_2) é soluzione

Analogamente $c_1 x_1 + c_2 x_2$ é soluzione $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2° Soluzione: Definiamo $C^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{L} C^0(\mathbb{R})$ $\quad$ C^2 e C^0 sono sp. vett $\begin{cases} L(x_1+x_2) = Lx_1 + Lx_2 \\ L(cx) = cL(x) \end{cases}$

$x \mapsto x'' + bx' + cx = Lx$ $\quad$ L é un operatore lineare

L'insieme delle soluzioni di $x'' + bx' + cx = \emptyset$ é il nucleo di L

$\mathrm{Ker}\, L$ (é quindi uno sp vett)

[In generale $\dim \mathrm{Ker}\, L = m$ se $Lx = x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x$]

• Eq.ne diff lineare omogenea di 2° ordine a coeff costanti $x = x(t)$ funzione incognita. Lo spazio delle soluzioni di $ax'' + bx' + cx = \emptyset$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ é uno sp vett di dim 2 (pari all'ordine).

Eq.ne caratteristica: $a\lambda^2 + b\lambda + c = \emptyset$. 3 casi possibili:

Caso 1) λ_1, λ_2 reali distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$, l'integrale generale é $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Caso 2) $\lambda_1 = \lambda_2$ (radici doppie) Si dimostra che $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, $e^{\lambda t}$ e $t e^{\lambda t}$ sono soluzioni lin. indip.

L'integrale generale é $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t}$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Caso 3) λ_1, λ_2 radici complesse coniugate, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ $\quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

L'integrale generale é

$$c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

• Eq.ni non Omogenee $ax'' + bx' + cx = f(t)$ $\quad$ ($f(t)$ assegnata). Sia $x_0 = x_0(t)$ una qlunque soluzione particolare dell'eq. non omogenea. Sia V lo sp vett delle soluzioni dell'eq. omogenea associata all'eq. non omogenea: $ax'' + bx' + cx = \emptyset$ (eq. omogenea associata). Allora lo spazio delle soluzioni dell'eq. non omogenea é $V + x_0 = \{x + x_0,\ x \in V\}$ = sp. Affine.

Dimostrazione $ax'' + bx' + cx = L(x)$. Consideriamo la funzione $x + x_0$ in $V + x_0$, allora

$L(x+x_0) = \underbrace{Lx}_{\emptyset} + \underbrace{Lx_0}_{f} = \emptyset + f = f$

Sia z una soluzione dell'eq. non omogenea, $L(z) = f$, anche x_0 é soluzione dell'eq. non omogenea, $L(x_0) = f$, Allora $L(z - x_0) = \emptyset$, Allora $x = z - x_0$ é soluzione del problema omogeneo, ossia $x \in V$. Dunque $z = x + x_0$, $x \in V$

$$\boxed{z \in V + x_0}$$

esempio: Trovare l'integrale generale dell'eq. lineare non omogenea $x''(t) - 4x(t) = e^t$

- eq. associata: $x'' - 4x = \emptyset$
- eq. caratteristica: $\lambda^2 - 4 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = +2 \end{cases}$

Integrale generale dell'eq. omogenea $c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo: $x(t) = Ae^t$ (A da determinare)

$$x'(t) = Ae^t$$
$$x''(t) = Ae^t$$

Sostituiamo nell'eq.ne $Ae^t - 4Ae^t = e^t \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$ dunque $-\frac{1}{3}e^t$ soluzione particolare

L'integrale generale dell'equazione non omogenea è $\boxed{c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{3}e^t}$

- Trovare una soluzione particolare del problema di Cauchy

esempio: Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} x'' + 9x = te^t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$

Trovare una soluzione particolare del tipo $x(t) = (at+b)e^t$

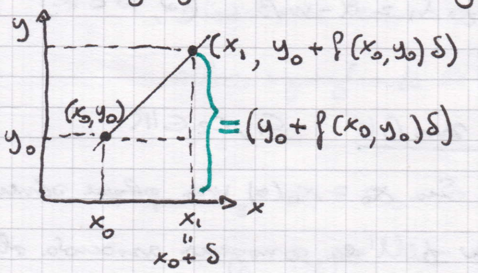
$$x(t) = (at+b)e^t$$
$$x'(t) = ae^t + (at+b)e^t = e^t(at+a+b)$$
$$x''(t) = e^t(at+a+b) + e^t a = e^t(at+2a+b)$$
$$\underbrace{\cancel{e^t}(at+2a+b)}_{x''} + 9\underbrace{[(at+b)\cancel{e^t}]}_{x} = t\cancel{e^t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$10at + 2a + 10b = t \Rightarrow \boxed{(10a-1)t + 2a + 10b = 0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} (10a-1) = 0 \\ (2a+10b) = 0 \end{cases}$$

- Il metodo di Eulero

$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ Problema di Cauchy

$f = f(x,y)$ nota e regolare

Trovare $y = y(x)$ tale che $\forall x$ $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$



Nel punto (x_0, y_0) la pendenza è $f(x_0, y_0)$

Fisso $\delta > 0$ e costruisco una serie del tipo

ASCISSE	ORDINATE
x_0	$y_0 = y(x_0)$ (assegnato)
$x_1 = x_0 + \delta$	$y_1 = (y_0 + f(x_0, y_0)\delta)$
$x_2 = x_1 + \delta = x_0 + 2\delta$	$y_2 = (y_1 + f(x_1, y_1)\delta)$
$\vdots$	$\vdots$
$x_k = x_0 + k\delta$	$y_n = (y_{n-1} + f(x_{k-1}, y_{n-1})\delta)$
$\vdots$	$\vdots$

Dimostrare che quando $\delta \to 0$ la funzione $y_\delta(x)$ data dal metodo di eulero tende a e^x [$x \in \mathbb{R}$ es. $x = 1$]

$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $x_n = k\delta$, $y_n = (1+\delta)^k$ $\Rightarrow \delta = \frac{1}{n}$ l'arbitraria corrispondenza a $x = 1$ quando $\delta = \frac{1}{n}$ è

$$(1+\delta)^k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Per x qualunque si ha un limite del tipo $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

- Trasformare un eq. del 2° ordine in un sistema del 1° ordine

$x'' + bx' + cx = \emptyset$ se $\boxed{x' = y}$ allora $\boxed{y' = x'' = -bx' - cx = -by - cx}$

Sotto forma matriciale $X = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ e $X' = \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -cx - by \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{vmatrix}}_{A} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \quad \text{si scrive} \quad X' = AX$$

- Prodotto Scalare $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t)\, dt$

- Norma $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left[\int_a^b f^2(t)\, dt \right]^{\frac{1}{2}}$

- Distanza $dist(f,g) = \|f - g\| = \left[\int_a^b [f(t) - g(t)]^2\, dt \right]^{\frac{1}{2}}$

- Convergenza in media quadratica (f_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, successione in $C[a,b]$, $f \in [a,b]$

$f_n \xrightarrow[(C[a,b], \langle , \rangle)]{} f$ significa $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = \emptyset$ (convergenza in media quadratica)

- Sistema ~~ortonormale~~ Un sistema di funzioni $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n$, $n \in \mathbb{N}$, in $(C[a,b], \langle , \rangle)$ si dice sistema ortonormale se $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ \emptyset & \text{se } i \neq j \end{cases}$

(Due funzioni sono ortonormali fra loro se hanno norma $= 1$ e se $\int_a^b f(t) g(t)\, dt = \emptyset$)

- Serie di fourier la serie di fourier di $f(x)$ è

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$ i coefficienti si trovano:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \cos(nx)\, dx$$ Se f è dispari $\forall k$ $a_n = \emptyset$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \sin(nx)\, dx$$ Se f è pari $\forall k$ $b_n = \emptyset$

- Teorema sulla convergenza puntuale $[\emptyset, 2\pi] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ limitata e monotona a tratti

a) Se in $x_0 \in [\emptyset, 2\pi]$ f è continua, la serie di fourier di f converge a $f(x_0)$

b) Se x_0 è un punto di discontinuità, la serie di fourier converge a $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$

- Matrice Hessiana

$$H_{f(x_0, y_0)} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$\det Hf(x_0, y_0)$	$f_{xx}(x_0, y_0)$	punto critico	segno
$> \emptyset$	$> \emptyset$	punto min	def pos
$> \emptyset$	$< \emptyset$	punto max	def neg
$< \emptyset$		punto sella	indef
$= \emptyset$		caso dubbio	semidef

- Integrale composto

$$\int f g' = fg - \int f' g$$

- funz. Pari $f(x) = f(-x)$ es. $x^2, x^4, \cos(x), \cosh(x)$
- funz. Dispari $f(-x) = -f(x)$ es. $x, x^3, \sin(x), \sinh(x)$