1. Calcolare, al variare del parametro reale α, il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x - 1 - x)^\alpha}{\sin x - \arctan x}.$$

SOLUZIONE

Si noti che, utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin opportuni, possiamo dedurre le relazioni di asintoticità

$$e^x - 1 - x \sim \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - 1 - x = \frac{x^2}{2}$$

e

$$\sin x - \arctan x \sim x - \frac{x^3}{6} - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}$$

per $x \to 0$. Di conseguenza, tornando al limite, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x - 1 - x)^\alpha}{\sin x - \arctan x} = \frac{3}{2^\alpha} \lim_{x\to 0^+} x^{-3+2\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha < \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2\sqrt{2}}, & \text{se } \alpha = \frac{3}{2}, \\ 0^+, & \text{se } \alpha > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{3}x\sqrt{9-x^2}$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Dominio di f:
$D(f) = [-3, 3]$. Si osservi che la funzione è dispari, restringiamo quindi lo studio all'intervallo $[0, 3]$.

Limiti agli estremi:
$f(0) = f(3) = 0$

Eventuali asintoti:
Nessun asintoto.

Derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{3\sqrt{9-x.^2}} = \frac{2x^2-9}{3\sqrt{9-x^2}}$$

Discutere la derivabilità di f:
$D(f') = [0, 3)$. Inoltre, $\lim_{x \longrightarrow 3^-} f'(x) = +\infty$.

Studio del segno di f:
$f < 0$ in $(0, 3)$, $f(0) = f(3) = 0$.

Si dica se f ammette punti di massimo o minimo ASSOLUTI:
f ha un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{3}/2$.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{x(27-2x^2)}{3(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} \qquad x \in [0, 3)$$

.

Studio della convessità e della concavità:
$f''(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 3)$ e $f''(0) = 0$. Quindi f è convessa in $(0, 3)$ e $x = 0$ è un punto di flesso per f.

Grafico di f:

3. Si consideri l'equazione differenziale, dipendente dal parametro reale k,

$$y'(t) = -5ty(t) + kt.$$

   (a) Determinare la soluzione che si annulla nell'origine.

   (b) Determinare k in modo che

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{y(t)}{t^2} = -1.$$

Giustificare le risposte, riportando i calcoli. Si tratta di un'equazione differenziale lineare e si ottiene facilmente l'integrale generale

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-5\int t\mathrm{d}t} \int \mathrm{e}^{5\int t dt} kt\mathrm{d}t \\ &= \frac{k}{5} + c\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t^2} \qquad\qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ si ha

$$0 = \frac{k}{5} + c,$$

da cui $c = -k/5$. La soluzione cercata è quindi

$$y = \frac{k}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t^2}\right).$$

Per calcolare il limite, si ricordi il limite notevole

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

e dunque

$$\begin{aligned} \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{y(t)}{t^2} &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{k}{5}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t^2}}{t^2}\right) \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} -\frac{5}{2} * \frac{k}{5}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t^2}}{-\frac{5}{2}t^2}\right) \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} -\frac{k}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t^2 - 1}}{\frac{5}{2}t^2}\right) = -\frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{y(t)}{t^2} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 2.$$

4. Studiare, al variare del parametro reale β, la converganza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}\right)\arctan x}{(3+x)^\beta} dx.$$

SOLUZIONE

Si noti preliminarmente che la funzione integranda è continua e positiva sul dominio di integrazione $(0, +\infty)$. Inoltre, non presenta singolarità per $x \to 0^+$. Di conseguanza è possibile applicare il criterio del confronto asintotico, e basta studiare il caso $x \to +\infty$. Utilizzando la relazione $(1+t)^\alpha \sim 1 + \alpha t$ per $t \to 0$ e per ogni α, abbiamo

$$\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[4]{x} = x^{1/4}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/4} - 1\right] \sim x^{1/4}\left(1 + \frac{1}{4x} - 1\right) = \frac{1}{4}x^{-3/4}.$$

Poichè valgono anche le (ovvie) relazioni

$$(3+x)^\beta \sim x^\beta \quad \text{e} \quad e \arctan x \sim \frac{\pi}{2}$$

per $x \to +\infty$, deduciamo infine

$$\frac{\left(\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}\right)\arctan x}{(3+x)^\beta} \sim \frac{\pi}{8}x^{-3/4-\beta}$$

per $x \to +\infty$. Tale integrale converge se, e solo se, $\beta > \frac{1}{4}$.