1. Siano assegnati i punti $P(0,0,1)$ e $Q(1,2,4)$. Determinare:

   1) le equazioni parametriche della retta passante per $P$ e per $Q$,

   2) l'equazione del piano passante per $Q$ e ortogonale alla retta $QP$.

   Soluzione

   I parametri direttori della retta $r_{PQ}$ sono: $a = 1 - 0 = 1$, $b = 2 - 0 = 2$, $c = 4 - 1 = 3$ quindi $r_{PQ}$:

$$x(t) = x_Q + at = 1 + t, \qquad y(t) = y_Q + bt = 2 + 2t, \qquad z(t) = z_Q + ct = 4 + 3t.$$

   Il piano ortogonale è dato da

$$a(x - x_Q) + b(y - y_Q) + c(z - z_Q) = 0 \quad da \;\; cui \;\; 1(x - 1) + 2(y - 2) + 3(z - 4) = 0.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 - 2\arctan x^2$$

Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

Dominio di $f$: Dominio di $f$=$\mathbb{R}$, Simmetria: $f$ è pari.

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Asintoti: NON ESISTONO dato che $f \sim x^2$ per $x \to \pm\infty$

$$f'(x) = 2x\ \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$$

Segno di $f'$:

$$f'(x) \geq 0 \quad \textit{se e solo se} \ -1 \leq x \leq 0 \ \ \textit{e} \quad 1 \geq x.$$

Punti di massimo e minimo:

$$x_{min} = -1, \quad x_{max} = 0, \quad x_{min} = 1.$$

$$f'' = 2\ \frac{x^8 + 8x^4 - 1}{(x^4+1)^2}$$

Zeri di $f''$ e deduzione dei punti di flesso:

$$x^8 + 8x^4 - 1 = 0, \qquad x_F = \pm\sqrt[4]{\sqrt{17} - 4}$$

compatibili con i max e min.

3. Data la linea $\Gamma$ in forma parametrica $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dove

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^2 + \sin(t^2 - 1), \qquad t \in \mathbb{R},$$

determinare l'equazione del piano osculatore $\pi_{osc}$ nel punto relativo a $t = 1$.

Soluzione

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = 2t, \quad z'(t) = 2t + 2t\cos(t^2 - 1)$$

$$x''(t) = 0, \quad y''(t) = 2, \quad z''(t) = 2 + 2\cos(t^2 - 1) - 4t^2 \sin(t^2 - 1),$$

da cui si ottiene

$$P(1) = (1, 1, 1), \qquad P'(1) = (1, 2, 4), \qquad P''(1) = (0, 2, 4),$$

il piano $\pi_{osc}$ è

$$2y - z - 1 = 0.$$

4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$I = \int \frac{e^x}{e^{x/2} + e^{x/3}}\ dx.$$

Soluzione

Poniamo $e^x = t^6$ da cui si ha $e^x dx = 6t^5 dt$.

$$I = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2}\ dt = 6 \int \frac{t^3 + 1}{t + 1} - \frac{1}{t + 1}\ dt$$

$$= 6[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t] - 6 \ln[t + 1] + C, \quad \textit{dove} \quad t = e^{x/6}.$$