Punteggi: Es.1=7 punti, Es.2=7 punti, Es.3=4 punti, Es.4=12 punti.
Istruzioni: Nello spazio sottostante gli esercizi devono essere riportati sia i risultati che i calcoli. Tempo a disposizione: due ore. Punteggio minimo per superare la prova: 18 punti.

1. Verificare la convergenza del seguente integrale improprio e calcolarne il valore

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}dx.$$

Soluzione

Posto $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-2}}$, si noti che $f(x) > 0$ sull'intervallo di intgrazione $(2, +\infty)$. Di conseguenza è possibile utilizzare il criterio del confronto asitotico. Si vede facilmente che

$$f(x) \sim 2(x-2)^{-1/2} \quad \text{per} \quad x \to 2^+$$

e

$$f(x) \sim x^{-3/2} \quad \text{per} \quad x \to +\infty.$$

Poichè, in virtù dei criteri generali di convergenza, le funzioni $g(x) = 2(x-2)^{-1/2}$ e $x^{-3/2}$ sono integrabili in senso generalizzato (sugli intervalli $(2, x_0)$ e $(x_0, +\infty)$ rispettivamente, ove x_0 è un valore arbitrario strettamente compreso tra 2 e $+\infty$), ne segue che f è integrabile in senso generalizzato su $(2, +\infty)$.

Per calcolare il valore esatto dell'integrale, procediamo al calcolo di una primitiva di f. Operando la sostituzione $t = \sqrt{x-2}$, con semplici conti si vede che

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-2}}dx = 2\int \frac{1}{t^2+2}dt = \sqrt{2}\int \frac{1/\sqrt{2}}{\left(t/\sqrt{2}\right)^2+1}dt =$$

$$= \quad \sqrt{2}\arctan\left(t/\sqrt{2}\right) + cost = \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}-1} + cost.$$

Quindi

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}dx = \lim_{M\to+\infty} \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{M}{2}-1} - \lim_{m\to 2^+} \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{m}{2}-1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

2. Sia data la seguente equazione differenziale

$$y'(t) = 2t\left[y(t)^2 + 1\right].$$

i) Esibire una formula di rappresentazione per la generica soluzione;

ii) calcolare la soluzione del problema di Cauchy avente come dato iniziale $y(0) = 1$;

iii) in questo caso, specificare l'intervallo massimale di definizione della soluzione.

Soluzione

i) l'equazione a variabili separabili, allora abbiamo che

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)^2+1}dt = 2\int t dt \iff \arctan\left[y(t)\right] = t^2 + c \iff y(t) = \tan\left(t^2 + c\right),$$

ove $t \in I$, intervallo che dipende dal dato iniziale.

ii) Imponendo nella formula trovata sopra il dato $y(0) = 1$, si vede che

$$\tan c = 1 \iff c = \frac{\pi}{4}.$$

di conseguenza la soluzione ammette la formula di rappresentazione

$$y(t) = \tan\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

iii) E' necessario imporre la limitazione

$$t^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2},$$

da cui si deduce facilmente che

$$t \in I = \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right).$$

3. Si consideri la curva tridimensionale di equazione

$$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin t\,\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Si calcoli la massa totale del corpo avente come supporto $\mathbf{r}$ e come densità lineare di massa

$$\delta(x, y, z) = \sqrt{x}.$$

Soluzione

Si ha

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = 2t\,\mathbf{i} - \sqrt{2}\sin t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

e, di conseguenza

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{4t^2 + 2}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Quindi la massa totale può essere calcolata come

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \delta(\mathbf{r}(t))\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{4t^2 + 2}dt = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} 8t\sqrt{4t^2 + 2}dt \\ &= \frac{1}{24}\left[\left(4t^2 + 2\right)^{3/2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{24}\left[\left(16\pi^2 + 2\right)^{3/2} - 2^{3/2}\right]. \end{aligned}$$

4. Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{e^{2x} - 1}.$$
Riportare in tabella i risultati e sul retro del foglio tracciare il grafico e riportare i calcoli.

Dominio di f: La funzione è definitita su tutto $\mathbf{R}$.
Limiti agli estremi del dominio: $$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$
Asintoti: la retta $y = -1$ è un asintoto orizzontale. Non esistono asintoti obliqui.
f' $$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{3(e^{2x} - 1)^{2/3}}.$$
Dominio di f' e classificazione dei punti di non derivabilità: il dominio di f' è dato da $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, f non è derivabile nel punto $x = 0$ in quanto $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = +\infty$, e il punto $x = 0$ è un punto a tangente verticale.
Segno di f': $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
Punti di massimo e minimo: f non ha punti di massimo e minimo.
f'': Per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ si ha $$f''(x) = \frac{4}{9} e^{2x} \frac{e^{2x} - 3}{(e^{2x} - 1)^{5/3}}.$$
Segno di f'' e punti di flesso: Risulta $f''(x) = 0$ per $x = \log(3)/2$ e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (\log(3)/2, +\infty)$. Quindi il punto $x = \log(3)/2$ è un punto di flesso.