Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**I Appello** **18 luglio 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata, rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ \alpha & -3\alpha & 0 \end{pmatrix}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Determinare α in modo che l'equazione $L(\mathbf{v}) - 2\mathbf{v} = 0$ abbia anche soluzioni non nulle.

   (b) Per il valore di α trovato, determinare una base per $\mathrm{Ker}\,(L)$ e $\mathrm{Im}\,(L)$.

   (c) Per il valore di α trovato, stabilire se la matrice è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una matrice diagonale D simile ad A e una matrice invertibile S per la quale $S^{-1}AS = D$.

   Soluzione: L'equazione ha soluzione non banale se 2 è autovalore di A e dunque se $\det(A - 2I) = 0$ da cui $\alpha = 1$ ed il relativo autovettore è $(2, 0, 1)$. Inoltre, poiché il rango di A, $rk(A) = 2$ si ha che $< (2, -1, 1), (0, 2, 0) >$ (due colonne linearmente indipendenti) fornisce una base per $\mathrm{Im}\,(L)$. Per il teorema della nullità più rango la dimensione di $\mathrm{Ker}\,(L) = 1$ ed una base è fornita dalle soluzioni del sistema $A\mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{v} = (3, 1, 0)$ è l'autovettore corrispondente all'autovalore nullo. La restante radice del polinomio caratteristico è $\lambda = 3$ con relativo autovettore $(6, -1, 3)$ e la matrice di passaggio alla forma diagonale è

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. (a) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

   (b) Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione $y'' - \alpha y = 0$ ha infinite soluzioni periodiche.

   Soluzione: L'integrale generale dell'equazione è $y(x) = A\cos x + B\sin x + (x^2 - 2)$ ed imponendo i dati iniziali si ha $A = 2$ e $B = 0$.

   (b) Le soluzioni periodiche si ottengono per $\alpha < 0$ e sono date da $y(x) = A\cos\sqrt{-\alpha}x + B\sin\sqrt{-\alpha}x$.

3. Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione $g(x, y) = x^3 + y^3$ sull'insieme $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

   Soluzione: La funzione proposta assume massimo e minimo assoluti in quanto continua su un insieme chiuso e limitato. L'origine è l'unico punto critico per la funzione all'interno del quadrato di lato di lunghezza due e centro nell'origine e l'incremento $g(x, y) - g(0, 0) = g(x, y)$ che cambia segno in un intorno dell'origine che risulta pertanto una sella. Ad esempio con il metodo delle restrizioni si vede che il massimo assoluto è 2 e per simmetria il minimo assoluto è -2.

4. Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2+y^2, x^2+y^2 \le 4\}$ orientata con vettore normale avente componente $\mathbf{k}$ positiva.

   (a) Dato il campo $\mathbf{F} = (y-2z, y, 2x+e^{z^2})$, calcolare il rotore di $\mathbf{F}$ e stabilire se è conservativo.

   (b) Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo il cammino $\partial\Sigma$ (con orientazione indotta da Σ).

   Soluzione: $\nabla \times \mathbf{F} = -4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ed il campo non è conservativo. (b): utilizzando ad esempio il teorema di Stokes si ha che il lavoro cercato è uguale al flusso del rotore del campo, appena calcolato, attraverso la superficie Σ e quindi pari a

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8\rho\sin\theta - 1)\rho\,d\rho\,d\theta = -4\pi$$

   dove si è presa come parametrizzazione di Σ, $\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x^2+y^2)\mathbf{k}$, con $(x^2+y^2) \le 4$.