Analisi e Geometria 1

Primo appello, 18 febbraio 2013

Punteggi degli esercizi: Es.1: 9 punti; Es.2: 6 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 9 punti.

1. (a) Scrivere la definizione di: $g(x) = o(h(x))$, *per* $x \to a$.

   (b) Sia f una funzione derivabile n volte in un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Scrivere la formula di Taylor di ordine n di f, con il centro in x_0 e il resto nella forma di Peano.

   (c) Calcolando le opportune derivate, trovare lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \tan x$, con centro in $x_0 = 0$, arrestato al terzo ordine, con il resto di Peano.

   (d) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x}$$

Soluzione. (d) Utilizziamo gli sviluppi:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned} \tag{1}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned} \tag{2}$$

e

$$\begin{aligned} \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

Allora:

Versione A

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\ &= \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Versione B

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\arctan x - x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\
&= \frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Versione C

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+\ln(1+x)}{\tan x - x} &= \lim_{x\to 0}\frac{-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\
&= \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Versione D

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+\ln(1+x)}{\arctan x - x} &= \lim_{x\to 0}\frac{-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\
&= \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. (a) Trovare la soluzione $f = f(t)$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = 4t^3\, x(t) \\ x(1) = -1 \end{cases}$$

(b) Trovare il valore minimo e il valore massimo di f sull'intervallo $[1, 3]$.

Soluzione. **Versione A**

(a) L'equazione $x'(t) = 4t^3\, x(t)$ è a variabili separabili, e anche lineare omogenea del primo ordine. Risolviamola come equazione a variabili separabili. L'equazione $x'(t) = 4t^3\, x(t)$ ha la soluzione identicamente nulla $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, che però non soddisfa la condizione iniziale $x(1) = -1$. Vicino $x_0 = 1$, la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy si manterrà sicuramente diversa da zero (più precisamente si manterrà negativa, poiché $x(1) = -1$). Allora, dividendo per $x(t)$, si ha

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = 4t^3$$

da cui si ricava

$$\ln|x(t)| = t^4 + c, \qquad |x(t)| = Ce^{t^4},$$

con C costante positiva, ossia

$$x(t) = Ke^{t^4}$$

con K costante arbitraria. La condizione $x(1) = -1$ impone $K = -1/e$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = -\frac{1}{e}\, e^{t^4}$$

(Controllare la soluzione con un calcolo diretto).

(b) Sull'intervallo $I = [1, 3]$ la funzione $x(t) = -\frac{1}{e}\, e^{t^4}$ è decrescente (perché $x'(t) < 0$ per ogni $t \in I$). Quindi il valore massimo M e il valore minimo m sono assunti agli estremi dell'intervallo $I = [1, 3]$:

$$\begin{aligned} M &= x(1) = -1 \\ m &= x(3) = -\frac{1}{e}\, e^{3^4} = -\frac{1}{e}\, e^{81} \end{aligned}$$

Versione B

(a) La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 4t^3\, x(t) \\ x(1) = -2 \end{cases}$$

è $x(t) = -\frac{2}{e}\, e^{t^4}$.

(b) Il valore massimo M e il valore minimo m di $x = x(t)$ su $I = [1, 4]$ sono:

$$\begin{aligned} M &= x(1) = -2 \\ m &= x(4) = -\frac{2}{e}\, e^{4^4} = -\frac{1}{e}\, e^{256} \end{aligned}$$

Versione C

(a) La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 4t^3\, x(t) \\ x(1) = -3 \end{cases}$$

è $x(t) = -\frac{3}{e}\, e^{t^4}$.

(b) Il valore massimo M e il valore minimo m di $x(t) = -\frac{3}{e}\, e^{t^4}$ su $I = [-3, -1]$ sono:

$$\begin{aligned} M &= x(-1) = -3 \\ m &= x(-3) = -\frac{3}{e}\, e^{81} \end{aligned}$$

Versione D

(a) La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 4t^3\, x(t) \\ x(1) = -4 \end{cases}$$

è $x(t) = -\frac{4}{e}\, e^{t^4}$.

(b) Il valore massimo M e il valore minimo m di $x(t) = -\frac{4}{e}\, e^{t^4}$ su $I = [-4, -1]$ sono:

$$\begin{aligned} M &= x(-1) = -4 \\ m &= x(-3) = -\frac{4}{e}\, e^{81} \end{aligned}$$

3. Sia γ il filo di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, \pi] \quad (\text{con } r > 0)$$

munito della densità di massa $\delta(\theta) = e^{\theta}$.

(a) Calcolare la massa totale M di γ.

(b) Calcolare le coordinate del baricentro B del filo γ.

Versione A Risposta:

(a) Indicata con $f(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ la funzione vettoriale che parametrizza la curva γ, si ha $f'(\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$ e $||f'(\theta)|| = r$.

i. La massa totale di γ è

$$M = \int_\gamma \delta \,\mathrm{d}s = \int_0^\pi \delta(\theta)\, ||f'(\theta)|| \,\mathrm{d}\theta = r\int_0^\pi \mathrm{e}^\theta \,\mathrm{d}\theta = r(\mathrm{e}^\pi - 1)\,.$$

ii. Le coordinate del baricentro B di γ sono

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{M}\int_\gamma \delta\, x \,\mathrm{d}s = \frac{1}{M}\int_0^\pi \delta(\theta)\, x(\theta)\, ||f'(\theta)|| \,\mathrm{d}\theta = \frac{r^2}{M}\int_0^\pi \mathrm{e}^\theta \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \\ y_B &= \frac{1}{M}\int_\gamma \delta\, y \,\mathrm{d}s = \frac{1}{M}\int_0^\pi \delta(\theta)\, y(\theta)\, ||f'(\theta)|| \,\mathrm{d}\theta = \frac{r^2}{M}\int_0^\pi \mathrm{e}^\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,. \end{aligned}$$

Integrando due volte per parti, si ha

$$\int \mathrm{e}^\theta \cos\theta \,\mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^\theta\cos\theta + \int \mathrm{e}^\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^\theta\cos\theta + \mathrm{e}^\theta\sin\theta - \int \mathrm{e}^\theta\cos\theta \,\mathrm{d}\theta$$

da cui si ottiene

$$\int \mathrm{e}^\theta\cos\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{e}^\theta}{2}\,(\cos\theta + \sin\theta)\,.$$

Integrando ancora per parti e usando l'integrale appena trovato, si ha

$$\int \mathrm{e}^\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^\theta\sin\theta - \int \mathrm{e}^\theta\cos\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{e}^\theta}{2}\,(\sin\theta - \cos\theta)\,.$$

Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{r^2}{r(\mathrm{e}^\pi - 1)}\left[\frac{\mathrm{e}^\theta}{2}\,(\sin\theta + \cos\theta)\right]_0^\pi = -\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{\mathrm{e}^\pi - 1}\,\frac{r}{2} \\ y_B &= \frac{r^2}{r(\mathrm{e}^\pi - 1)}\left[\frac{\mathrm{e}^\theta}{2}\,(\sin\theta - \cos\theta)\right]_0^\pi = \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{\mathrm{e}^\pi - 1}\,\frac{r}{2}\,. \end{aligned}$$

In conclusione, si ha

$$B \equiv \left(-\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{\mathrm{e}^\pi - 1}\,\frac{r}{2}, \frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{\mathrm{e}^\pi - 1}\,\frac{r}{2}\right)\,.$$

Osservazione. Per la posizione del baricentro rispetto alla curva, si veda la figura seguente

Versione B Sia γ il filo di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [\pi, 2\pi] \quad (\text{con } r > 0)$$

munito della densità di massa $\delta(\theta) = e^{\theta}$. Trovare la massa totale M e il baricentro B del filo.

Risposta: $M = (\mathrm{e}^{\pi} - 1)\mathrm{e}^{\pi}\, r$ e $B \equiv \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\,\dfrac{r}{2}, -\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}\,\dfrac{r}{2} \right)$.

Versione C

Sia γ il filo di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, \pi] \quad (\text{con } r > 0)$$

munito della densità di massa $\delta(\theta) = e^{-\theta}$. Trovare la massa totale M e il baricentro B del filo.

Risposta: $M = (1 - \mathrm{e}^{-\pi})\, r$ e $B \equiv \left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\,\dfrac{r}{2}, \dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\,\dfrac{r}{2} \right)$.

Versione D

Sia γ il filo di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [\pi, 2\pi] \quad (\text{con } r > 0)$$

munito della densità di massa $\delta(\theta) = e^{-\theta}$. Trovare la massa totale M e il baricentro B del filo.

Risposta: $M = (\mathrm{e}^{\pi} - 1)\mathrm{e}^{-2\pi}\, r$ e $B \equiv \left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{1-\mathrm{e}^{\pi}}\,\dfrac{r}{2}, \dfrac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{1-\mathrm{e}^{\pi}}\,\dfrac{r}{2} \right)$.

4. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, sia r la retta passante per $A = (1, 0, 2)$ e $B = (3, 4, 1)$ e sia s la retta intersezione dei piani $x - 2y - 1 = 0$ e $y + z = 0$.

   (a) Stabilire se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

   (b) Nel fascio di piani il cui sostegno è la retta s, determinare il piano $\mathcal{P}$ parallelo alla retta r.

   (c) Calcolare la distanza tra le rette r e s.

SOLUZIONE (**Versione A**)

a) Le equazioni parametriche di r e di s sono $x = 1 + 2t,\ y = 4t,\ z = 2 - t$; e $x = 2t' + 1,\ y = t',\ z = -t'$. Le rette sono sghembe.

b) Il fascio di sostegno s ha equazione: $x - 2y - 1 + \lambda(y + z) = 0$. I piani del fascio hanno vettore normale $\underline{n} = (1, -2 + \lambda, \lambda)$. Imponendo che $\underline{n} \cdot (2, 4, -1) = 0$ si trova $\lambda = 2$. Il piano del fascio parallelo a r ha equazione $x + 2z - 1 = 0$

c) La distanza tra le due rette si può calcolare scegliendo un punto qualunque $P \in r$ e calcolando la distanza di P da π. Quindi $d(r, s) = d(A, \pi) = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Versione B

Sia r la retta passante per $A = (0, 1, 2)$ e $B = (4, 3, 1)$ e s la retta di equazione cartesiana $x - 2z - 1 = y + z = 0$.

(a) Stabilire se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Nel fascio di sostegno la retta s determinare il piano π parallelo alla retta r.

(c) Calcolare la distanza tra r e s.

SOLUZIONE (**Versione B**)

a) Le equazioni parametriche di r e di s sono $x = 4t,\ y = 1 + 2t,\ z = 2 - t$; e $x = 2t' + 1,\ y = -t',\ z = t'$. Le rette sono sghembe.

b) Il fascio di sostegno s ha equazione: $x - 2z - 1 + \lambda(y + z) = 0$. I piani del fascio hanno vettore normale $\underline{n} = (1, \lambda, -2 + \lambda)$. Imponendo che $\underline{n} \cdot (4, 2, -1) = 0$ si trova $\lambda = -6$. Il piano del fascio parallelo a r ha equazione $x - 6y - 8z - 1 = 0$

c) La distanza tra le due rette si può calcolare scegliendo un punto qualunque $P \in r$ e calcolando la distanza di P da π. Se $P = (0, 1, 2)$, si ha che $d(A, \pi) = \dfrac{23}{\sqrt{101}}$.

Versione C

Sia r la retta passante per $A = (1, 2, 0)$ e $B = (3, 1, 4)$ e s la retta di equazione cartesiana $2x - y - 1 = x + z = 0$.

(a) Stabilire se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Nel fascio di sostegno la retta s determinare il piano π parallelo alla retta r.

(c) Calcolare la distanza tra r e s.

SOLUZIONE (**Versione C**)

a) Le equazioni parametriche di r e di s sono $x = 1 + 2t,\ y = 2 - t,\ z = 4t$; e $x = t',\ y = 2t' + 1,\ z = -t'$. Le rette sono sghembe.

b) Il fascio di sostegno s ha equazione: $2x - y - 1 + \lambda(x + z) = 0$. I piani del fascio hanno vettore normale $\underline{n} = (2 + \lambda, -1, \lambda)$. Imponendo che $\underline{n} \cdot (2, -1, 4) = 0$ si trova $\lambda = -\dfrac{5}{6}$. Il piano del fascio parallelo a r ha equazione $7x - 6y - 5z - 6 = 0$

c) La distanza tra le due rette si può calcolare scegliendo un punto qualunque $P \in r$ e calcolando la distanza di P da π. Quindi $d(r, s) = d(A, \pi) = \dfrac{11}{\sqrt{110}}$.

Versione D

Sia r la retta passante per $A = (2, 1, 0)$ e $B = (1, 4, 3)$ e s la retta di equazione cartesiana $2y - z + 1 = x + y = 0$.

(a) Stabilire se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Nel fascio di sostegno la retta s determinare il piano π parallelo alla retta r.

(c) Calcolare la distanza tra r e s.

SOLUZIONE (**Versione D**)

a) Le equazioni parametriche di r e di s sono $x = 2 - t,\ y = 1 + 3t,\ z = 3t$; e $x = t',\ y = -t',\ z = -2t' + 1$. Le rette sono sghembe.

b) Il fascio di sostegno s ha equazione: $2y - z + 1 + \lambda(x + y) = 0$. I piani del fascio hanno vettore normale $\underline{n} = (\lambda, 2 + \lambda, -1)$. Imponendo che $\underline{n} \cdot (-1, 3, 3) = 0$ si trova $\lambda = -\dfrac{3}{2}$. Il piano del fascio parallelo a r ha equazione $3x - y + 2z - 2 = 0$

c) La distanza tra le due rette si può calcolare scegliendo un punto qualunque $P \in r$ e calcolando la distanza di P da π. Quindi $d(r, s) = d(A, \pi) = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$.