Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Primo Appello** **17 luglio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.**

1. (a) Scrivere la definizione di autovettore di una matrice quadrata.

   (b) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3.$$

   i. Trovare la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base canonica.

   ii. Esistono basi di $\mathbb{R}^3$ costituite da autovettori di $\mathbf{A}$ a due a due ortogonali tra loro? Se esistono, se ne trovi una. (Non si richiede che gli autovettori scelti siano di lunghezza 1).

   iii. Trovare, se esiste, una matrice ortogonale $\mathbf{P}$ tale che $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ sia diagonale.

   iv. Scrivere una matrice diagonale, se esiste, che sia simile alla matrice $\mathbf{A}$.

   v. La matrice $\mathbf{A}^4$ ha una base ortonormale di autovettori? Perché?

Soluzione.

(i)

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

(ii) Per trovare gli autovalori di A risolviamo

$$\det\,(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] = 0$$

ottenendo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 4$. La matrice è simmetrica quindi ammette una base ortogonale di autovettori. Autovettori relativi a λ_1, λ_2 e λ_3 sono i vettori $v_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, $v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$ e $v_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ che sono chiaramente a due a due ortogonali.

(iii) La matrice S è la matrice formata dagli autovettori

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(iv) La matrice diagonale simile alla matrice A è la matrice

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

(v) La matrice $\mathbf{A}^4$ ha come autovalori gli autovalori di $\mathbf{A}$ elevati al quarta con gli stessi autovettori. Quindi anche $\mathbf{A}^4$ ha una base ortonormale di autovettori, la stessa di $\mathbf{A}$.

2. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -3x(e^z + 1)\mathbf{i} + 2(y + z^2)\mathbf{j} + 3(e^z + z)\mathbf{k},$$

calcolare il flusso Φ di $\mathbf{F}$ uscente dalla piramide $\mathcal{P}$ avente i vertici in

$$O(0, 0, 0), \quad A(2, 0, 0), \quad B(0, 4, 0), \quad C(0, 0, 4).$$

(*Suggerimento: i punti* A, B *e* C *appartengono al piano* $2x + y + z = 4$.)

Soluzione. Usiamo il teorema della divergenza:

$$\Phi = \iiint_{\mathcal{P}} \mathrm{div}\mathbf{F} \, dx \, dy \, dz,$$

poiché $\mathrm{div}\mathbf{F} = 2$,

$$\Phi = \iiint_{\mathcal{P}} 2 \, dx \, dy \, dz = 2 \, \mathrm{vol}(\mathcal{P}).$$

Osserviamo che, poiché i punti A, B e C si trovano sugli assi coordinati,

$$\mathrm{vol}(\mathcal{P}) = \frac{1}{6} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} = \frac{16}{3},$$

quindi

$$\Phi = \iiint_{\mathcal{P}} 2 \, dx \, dy \, dz = \frac{32}{2}.$$

In alternativa, la piramide $\mathcal{P}$ può essere espressa come

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - 2x, 0 \leq z \leq 4 - 2x - y\},$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathcal{P}) = \iiint_{\mathcal{P}} 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 dx \int_{y=0}^{y=4-2x} dy \int_{z=0}^{z=4-2x-y} 1 \, dz \\
&= \int_0^2 dx \int_{y=0}^{y=4-2x} \Big[z \Big]_{z=0}^{z=4-2x-y} dy = \int_0^2 dx \int_{y=0}^{y=4-2x} (4 - 2x - y) \, dy \\
&= \int_0^2 \left[(4 - 2x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=4-2x} dx = \int_0^2 \frac{(4 - 2x)^2}{2} \, dx \\
&= \left[-\frac{1}{12}(4 - 2x)^3 \right]_0^2 = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

3. Trovare il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f(x,y) = xy+4$ sull'ellisse C di equazione $g(x,y) = x^2+y^2-xy-1=0$.

Soluzione.

Il problema si può risolvere con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si consideri la Lagrangiana

$$L(x,y,\lambda) = xy + 4 - \lambda(x^2+y^2-xy-1)$$

e se ne trovino i punti stazioneri risolvendo il sistema

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda) = y - 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ \\ L_y(x,y,\lambda) = x - 2\lambda y + \lambda x = 0 \\ \\ L_\lambda(x,y,\lambda) = x^2+y^2-xy-1 = 0 \end{cases} .$$

Elimitando λ tra le prime due equazioni, si ottiene $y \pm x$, e sostituendo nel vincolo si ottengono i quattro punti $P_1(1,1)$, $P_2(-1,-1)$, $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $P_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Essendo poi $f(P_1) = f(P_2) = 5$ ed $f(P_3) = f(P_4) = \frac{11}{3}$ il massimo ed il minimo assoluti sono rispettivamente 5 e $\frac{11}{3}$.

4. Si determini il carattere delle seguenti serie, enunciando con precisione il criterio utilizzato:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^3 + 2n\log n + \sqrt{n}}{5n^4 + n^2 e^{-n} + n + 3} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,3^n}{n^n}$$

Soluzione.

(a) Il termine generale della prima serie è $\sim \dfrac{4n^2}{5n^3} = \dfrac{4}{5n}$ e poiché $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, per il criterio del confronto asintotico, la serie data diverge.

(b) Applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\,3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,n!\,3^n\,3}{(n+1)(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!\,3^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3 \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{3}{e} > 1$$

quindi la serie diverge.

5. Si consideri l'equazione differenziale

$$x''(t) + k^2 x(t) = \cos(t),$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(a) Al variare di $k \geq 0$ si risolva l'equazione.

(b) Nel caso $k = 1$ si dia un'interpretazione fisica del risultato ottenuto.

Soluzione. Consideriamo l'equazione omogenea associata

$$x''(t) + k^2 x(t) = 0$$

e associamo all'equazione il polinomio caretteristico

$$P(\lambda) = \lambda^2 + k^2,$$

le cui radici sono $\pm ik$. Nel caso $k \neq 0$, le soluzione dell'equazione omogenea sono

$$x_0(t) = a\cos(kt) + b\sin(kt),$$

nel caso $k = 0$,

$$x_0(t) = a + bt, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo un soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Nel caso $k \neq 1$, la si cerca del tipo

$$x_p(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t).$$

Sostituendo nell'equazione si trova $\alpha = \frac{1}{k^2-1}, \beta = 0$. Nel caso $k = 1$,

$$x_p(t) = t(\alpha\cos(t) + \beta\sin(t)),$$

sostituendo nell'equazione si ottiene $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}$.

In conclusione l'integrale generale è:

$$\begin{array}{ll} x(t) = a\cos(kt) + b\sin(kt) + \frac{1}{k^2-1}\cos(t) & \text{se } k \neq 0, 1 \\ x(t) = a\cos(t) + b\sin(t) + \frac{1}{2}t\sin(t) & \text{se } k = 1 \\ x(t) = a + bt - \cos(t) & \text{se } k = 0, \end{array}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.