Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Primo Appello** **17 febbraio 2014** **Compito A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 8 punti; Es.3: 8 punti; Es.4: 11 punti.
Istruzioni: *Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 - \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 = 0$ e rappresentarle sul piano di Gauss.

Soluzione

Primo modo. In forma trigonometrica, sia $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$; si ha che $\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$, $\frac{z}{\bar{z}} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$, $\frac{\bar{z}}{z} = \cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)$, $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$, $\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 = \cos(-4\theta) + i\sin(-4\theta)$. Poiché due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono per multipli di 2π, dovrà essere: $4\theta = -4\theta + 2k\pi$, da cui $\theta = k\frac{\pi}{4}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che l'equazione perde di significato se $z = 0$. Le soluzioni dell'equazione sono rappresentate geometricamente dai punti degli assi cartesiani e delle bisettrici, origine esclusa.

Secondo modo. Posto $w = \frac{z}{\bar{z}}$, l'equazione di partenza diventa

$$w^2 - \frac{1}{w^2} = 0$$

ossia $w^4 = 1$, con $w \neq 0$ (ossia $z \neq 0$). Questa equazione ha soluzioni $w = \pm 1, \pm\mathbf{i}$. Pertanto, posto $z = x + \mathbf{i}\,y$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $\overline{z} = x - \mathbf{i}\,y$ e quindi si hanno i seguenti casi

$$\begin{array}{lclclcl}
w = 1 & \Longleftrightarrow & z = \overline{z} & \Longleftrightarrow & x + \mathbf{i}\,y = x - \mathbf{i}\,y & \Longleftrightarrow & y = 0 \\
w = -1 & \Longleftrightarrow & z = -\overline{z} & \Longleftrightarrow & x + \mathbf{i}\,y = -x + \mathbf{i}\,y & \Longleftrightarrow & x = 0 \\
w = \mathbf{i} & \Longleftrightarrow & z = \mathbf{i}\,\overline{z} & \Longleftrightarrow & x + \mathbf{i}\,y = \mathbf{i}x + y & \Longleftrightarrow & y = x \\
w = -\mathbf{i} & \Longleftrightarrow & z = -\mathbf{i}\,\overline{z} & \Longleftrightarrow & x + \mathbf{i}\,y = -\mathbf{i}x - y & \Longleftrightarrow & y = -x\,.
\end{array}$$

Poiché $z \neq 0$, le soluzioni dell'equazione sono rappresentate geometricamente dai punti degli assi cartesiani e delle bisettrici, origine esclusa.

2. (a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x$$

dove i coefficienti $\tan x, \cos^2 x$ sono definiti sull'intervallo $I = (-\pi/2, \pi/2)$.

(b) Trovare la soluzione φ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + (\tan x)y = \cos^2 x \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

specificando l'intervallo massimale sul quale tale soluzione può essere estesa. Trovata φ, si controlli, con una verifica diretta, che essa soddisfi entrambe le condizioni (1). Disegnare il grafico qualitativo della funzione φ in un intorno di $x_0 = 0$.

Soluzione

(a) Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine, cioè del tipo $y' + a(x)y = f(x)$. Dalla teoria sappiamo che la soluzione generale si può scrivere

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}B(x)$$

dove $A(x)$ una qualunque antiderivata di $a(x)$, $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria e $B(x)$ è una qualunque antiderivata di $f(x)e^{A(x)}$. Nel nostro caso, una primitiva di $a(x) = \tan x$ è $A(x) = -\ln|\cos x| = -\ln \cos x$ (perché $\cos x$ è positivo su $(-\pi/2, \pi/2)$) e una primitiva di $f(x)e^{A(x)} = (\cos^2 x)\, e^{-\ln \cos x} = \cos x$ è $B(x) = \sin x$. La soluzione generale è dunque

$$C \cos x + \cos x \sin x \tag{2}$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. (La soluzione generale è somma di $C \cos x$, $C \in \mathbb{R}$, che è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, e di $\cos x \sin x$ che è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea).

(b) La condizione $y(0) = 1$ impone $C = 1$. La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$\varphi(x) = \cos x + \sin x \cos x$$

Tale soluzione è definita su tutto l'intervallo $I = (-\pi/2, \pi/2)$ su cui sono definiti i coefficienti dell'equazione. (Questo accade sempre, quando l'equazione è lineare). Il grafico qualitativo di $\varphi(x)$ vicino a $x_0 = 0$ è quello del suo polinomio di Taylor di ordine 2, che è la parabola

$$P_2(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$$

La funzione φ passa per il punto $(0, 1)$ con pendenza 1 ed è concava (volge la concavità verso il basso).

3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, sia r la retta passante per i punti $A = (1, 0, 1)$ e $B = (-1, 2, -1)$ e sia s la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 4 + 2u \\ y = -1 - u \\ z = 2 + u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$

   (a) Trovare un vettore di direzione per la retta r e un vettore di direzione per la retta s. Stabilire se r e s sono parallele, incidenti o sghembe.

   (b) Trovare un'equazione cartesiana del piano $\mathcal{P}$ contenente il punto $P = (0, 1, 0)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{b} = (3, -2, 2)$. Stabilire se tale piano $\mathcal{P}$ include la retta r.

   (c) Trovare la distanza tra le rette r e s.

Soluzione

(a) Un vettore di direzione per la retta r è $B - A = (-2, 2, -2)$. oppure $\overrightarrow{\mathbf{r}} = (-1, 1, -1)$. Un vettore di direzione di s è $\overrightarrow{\mathbf{s}} = (2, -1, 1)$. Siccome questi due vettori non sono proporzionali, le rette non sono parallele. Equazioni parametriche per la retta r sono:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

L'intersezione $r \cap s$ si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 1 - t &= 4 + 2u \\ t &= -1 - u \\ 1 - t &= 2 + u \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione: $(0, 1, 0)$. Quindi r e s sono incidenti (cioè, la loro intersezione consiste di un solo punto).

(b) Un vettore ortogonale al piano $\mathcal{P}$ è il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, -2, -2)$, o il vettore ad esso proporzionale $(0, 1, 1)$. Quindi $\mathcal{P}$ ha equazione $(y - 1) + (z - 0) = 0$, ossia $y + z - 1 = 0$. Le coordinate di ogni punto $(1 - t, t, 1 - t)$ della retta r soddisfano l'equazione $y + z - 1 = 0$ del piano $\mathcal{P}$, dunque la retta r è inclusa nel piano $\mathcal{P}$.

(c) Le rette r e s sono incidenti; pertanto la distanza tra di esse (la minima distanza tra un punto $X \in r$ e un punto $Y \in s$) è zero.

4. Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = (1+x)\, e^{1-x^2}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, e sia $\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^x (1+t)\, e^{1-t^2}\ \mathrm{d}t$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(a) Stabilire se la funzione integrale F ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

(b) Determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo locale di F.

(c) Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{f(x)-2}\,.$$

(d) Scrivere lo sviluppo di Taylor della funzione F nel punto $x_0 = 1$, troncato al terzo ordine, con resto secondo Peano.

Soluzione

(a) La funzione integrale F ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)$$

ossia se converge l'integrale generalizzato

$$I = \int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} (1+t)\, \mathrm{e}^{1-t^2}\ \mathrm{d}t\,.$$

Poiché la funzione $f(t) = (1+t)\,\mathrm{e}^{1-t^2}$ è positiva per $t > -1$ (ossia in un opportuno intorno di $+\infty$) e poichè per $t \to +\infty$ si ha

$$f(t) \sim \frac{t}{\mathrm{e}^{t^2}} \leq \frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2}\,,$$

applicando il teorema del confronto asintotico e il teorema del confronto, possiamo concludere che, essendo $1/t^2$ integrabile in senso generalizzato per $t \to +\infty$, anche la funzione f è integrabile in senso generalizzato per $t \to +\infty$. Quindi, l'integrale I converge e la funzione F possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

(b) La funzione integrale F è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $F'(x) \geq 0$ se e solo se $(1+x)\,\mathrm{e}^{1-x^2} \geq 0$, ossia se e solo se $x \geq -1$. Pertanto, la funzione F possiede solo un minimo locale per $x = -1$.

(c) Poichè $F(1) = 0$ e $f(1) = 2$, il limite L presenta una forma di indeterminazione $0/0$. Applicando la regola di De l'Hopital, si ha

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{F'(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(1+x)\,\mathrm{e}^{1-x^2}}{(1-2x-2x^2)\,\mathrm{e}^{1-x^2}} = -\frac{2}{3}\,.$$

(d) Si ha $F(1) = 0$ e

$$\begin{aligned} &F'(x) = f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{1-x^2} && F'(1) = 2 \\ &F''(x) = f'(x) = (1-2x-2x^2)\,\mathrm{e}^{1-x^2} && F''(1) = -3 \\ &F'''(x) = f''(x) = (-2-6x+4x^2+4x^3)\,\mathrm{e}^{1-x^2} && F'''(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Pertanto, lo sviluppo di Taylor di F nel punto $x_0 = 1$, troncato al terzo ordine, con resto secondo Peano, è

$$\begin{aligned} F(x) &= F(1) + F'(1)\,(x-1) + \frac{F''(1)}{2}\,(x-1)^2 + \frac{F'''(1)}{6}\,(x-1)^3 + o((x-1)^3) \\ &= 2\,(x-1) - \frac{3}{2}\,(x-1)^2 + o((x-1)^3) \qquad \text{per } x \to 1\,. \end{aligned}$$