

<b>Analisi e Geometria 1</b> <b>Prima prova in itinere.</b> <b>16 novembre 2009</b>	<b>Compito A</b>	<b>Docente:</b> <b>Gianluca Mola</b> <b>Politecnico di Milano</b> <b>Ingegneria Industriale</b>
---	------------------	--

**Punteggi degli esercizi:** Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.

1. Sia  $f(x) = \frac{\arctan(\sqrt[3]{x}) - e^{\sqrt[3]{x}} + 1}{\ln(1 + \tan \sqrt[3]{x})}$

(a) Calcolare il seguente limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Risposta:

(b) Esistono un numero  $K \neq 0$  e un numero  $\alpha > 0$  per i quali si abbia  $f(x) \sim Kx^\alpha$ , per  $x \rightarrow 0$ ? In caso affermativo, determinare una tale funzione  $Kx^\alpha$ .

Risposta:

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{e^x}$$

Insieme di definizione di $f$ :	$(0, +\infty)$
Limiti agli estremi: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ,	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
Eventuali asintoti:	$x = 0$ (asintoto verticale); $y = 0$ (asintoto orizzontale).
Derivata prima:	$f'(x) = e^{-x} \left( \frac{1}{x} - 1 - \ln x \right)$
Qual è il più grande intervallo sul quale $f$ è crescente?	$(0, 1]$
Qual è il più grande intervallo sul quale $f$ è decrescente?	$[1, +\infty)$
Eventuali punti di massimo locale:	
Eventuali punti di minimo locale:	
L'unico punto di massimo locale è $x_0 = 1$ , non ci sono punti di minimo locali.	
Derivata seconda:	$f''(x) = e^{-x} \left( 1 + \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$
Studio della convessità e della concavità :	
$f$ è concava su $(0, x_1)$ , $f$ è convessa su $(x_1, +\infty)$ , ove $x_1 > 1$ (si deduce da un confronto grafico)	
Esistono punti in cui la funzione $ f(x) $ non è derivabile?	
La funzione $ f(x) $ non è derivabile in $x_2 = \frac{1}{e}$ .	

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|^a \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali eventuali  $a \in \mathbb{R}$  la funzione  $f$  è continua in  $x_0 = 0$ .

Risposta:

$f$  è continua in  $x_0 = 0$  se  $a > 0$

(b) Usando la definizione di derivata, determinare gli eventuali  $a \in \mathbb{R}$  per i quali la funzione  $f$  è derivabile in  $x_0 = 0$ .

Risposta:

$f$  è derivabile in  $x_0 = 0$  se  $a > 1$

4. Si consideri l'equazione

$$(z - 1)^4 = (1 - i)^4$$

nel campo complesso  $\mathbb{C}$ .

(a) Scrivere tutte le soluzioni, nella forma algebrica  $a + ib$ :

$2 + i,$	$i,$	$-i,$	$2 - i$
----------	------	-------	---------

<b>Analisi e Geometria 1</b> <b>Prima prova in itinere.</b> <b>16 novembre 2009</b>	<b>Compito B</b>	<b>Docente:</b> <b>Gianluca Mola</b> <b>Politecnico di Milano</b> <b>Ingegneria Industriale</b>
---	------------------	--

**Punteggi degli esercizi:** Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.

1. Sia  $f(x) = \frac{-\tan(\sqrt[3]{x}) + e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\ln(1 + \arctan \sqrt[3]{x})}$

(a) Calcolare il seguente limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Risposta:

(b) Esistono un numero  $K \neq 0$  e un numero  $\alpha > 0$  per i quali si abbia  $f(x) \sim Kx^\alpha$ , per  $x \rightarrow 0$ ? In caso affermativo, determinare una tale funzione  $Kx^\alpha$ .

Risposta:

2. Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1 + \ln x}{e^x}$$

Insieme di definizione di $f$ :	$(0, +\infty)$
Limiti agli estremi: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ,	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
Eventuali asintoti:	$x = 0$ (asintoto verticale); $y = 0$ (asintoto orizzontale).
Derivata prima:	$f'(x) = e^{-x} \left(-\frac{1}{x} + 1 + \ln x\right)$
Qual è il più grande intervallo sul quale $f$ è crescente?	$[1, +\infty)$
Qual è il più grande intervallo sul quale $f$ è decrescente?	$(0, 1]$
Eventuali punti di massimo locale:	
Eventuali punti di minimo locale:	
L'unico punto di minimo locale è $x_0 = 1$ , non ci sono punti di massimo locali.	
Derivata seconda:	$f''(x) = e^{-x} \left(-1 - \ln x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$
Studio della convessità e della concavità :	
$f$ è convessa su $(0, x_1)$ , $f$ è concava su $(x_1, +\infty)$ , ove $x_1 > 1$ (si deduce da un confronto grafico)	
Esistono punti in cui la funzione $ f(x) $ non è derivabile?	
La funzione $ f(x) $ non è derivabile in $x_2 = \frac{1}{e}$ .	

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|^a \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali eventuali  $a \in \mathbb{R}$  la funzione  $f$  è continua in  $x_0 = 0$ .

Risposta:

$f$  è continua in  $x_0 = 0$  se  $a > 0$

(b) Usando la definizione di derivata, determinare gli eventuali  $a \in \mathbb{R}$  per i quali la funzione  $f$  è derivabile in  $x_0 = 0$ .

Risposta:

$f$  è derivabile in  $x_0 = 0$  se  $a > 1$

4. Si consideri l'equazione

$$(z + 1)^4 = (1 + i)^4$$

nel campo complesso  $\mathbb{C}$ .

(a) Scrivere tutte le soluzioni, nella forma algebrica  $a + ib$ :

$i,$	$-2 + i,$	$-2 - i,$	$-i$
------	-----------	-----------	------



<b>Analisi e Geometria 1</b> <b>Prima prova in itinere.</b> <b>16 novembre 2009</b>	<b>Compito C</b>	<b>Docente:</b> <b>Gianluca Mola</b> <b>Politecnico di Milano</b> <b>Ingegneria Industriale</b>
---	------------------	--

1. Sia  $f(x) = \frac{\arctan(\sqrt[5]{x}) - e^{\sqrt[5]{x}} + 1}{\ln(1 + \tan \sqrt[5]{x})}$

(a) Calcolare il seguente limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Risposta:

0

(b) Esistono un numero  $K \neq 0$  e un numero  $\alpha > 0$  per i quali si abbia  $f(x) \sim Kx^\alpha$ , per  $x \rightarrow 0$ ? In caso affermativo, determinare una tale funzione  $Kx^\alpha$ .

Risposta:

$-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{5}}$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{2e^x}$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Insieme di definizione di $f$ : $(0, +\infty)$
Limiti agli estremi: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
Eventuali asintoti: $x = 0$ (asintoto verticale); $y = 0$ (asintoto orizzontale).
Derivata prima: $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \left( \frac{1}{x} - 1 - \ln x \right)$
Qual è il più grande intervallo sul quale $f$ è crescente? $(0, 1]$ Qual è il più grande intervallo sul quale $f$ è decrescente? $[1, +\infty)$
Eventuali punti di massimo locale: Eventuali punti di minimo locale: L'unico punto di massimo locale è $x_0 = 1$ , non ci sono punti di minimo locali.
Derivata seconda: $f''(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \left( 1 + \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$
Studio della convessità e della concavità : $f$ è concava su $(0, x_1)$ , $f$ è convessa su $(x_1, +\infty)$ , ove $x_1 > 1$ (si deduce da un confronto grafico)
Esistono punti in cui la funzione $ f(x) $ non è derivabile? La funzione $ f(x) $ non è derivabile in $x_2 = \frac{1}{e}$ .

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |\tan x|^a \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali eventuali  $a \in \mathbb{R}$  la funzione  $f$  è continua in  $x_0 = 0$ .

Risposta:

$f$  è continua in  $x_0 = 0$  se  $a > 0$

(b) Usando la definizione di derivata, determinare gli eventuali  $a \in \mathbb{R}$  per i quali la funzione  $f$  è derivabile in  $x_0 = 0$ .

Risposta:

$f$  è derivabile in  $x_0 = 0$  se  $a > 1$

4. Si consideri l'equazione

$$(z - i)^4 = (1 - i)^4$$

nel campo complesso  $\mathbb{C}$ .

(a) Scrivere tutte le soluzioni, nella forma algebrica  $a + ib$ :

$1 + 2i,$	$-1 + 2i,$	$-1,$	$1$
-----------	------------	-------	-----

<b>Analisi e Geometria 1</b> <b>Prima prova in itinere.</b> <b>16 novembre 2009</b>	<b>Compito D</b>	<b>Docente:</b> <b>Gianluca Mola</b> <b>Politecnico di Milano</b> <b>Ingegneria Industriale</b>
---	------------------	--

1. Sia  $f(x) = \frac{\tan(\sqrt[5]{x}) - e^{\sqrt[5]{x}} + 1}{\ln(1 - \arctan \sqrt[5]{x})}$

(a) Calcolare il seguente limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Risposta:

(b) Esistono un numero  $K \neq 0$  e un numero  $\alpha > 0$  per i quali si abbia  $f(x) \sim Kx^\alpha$ , per  $x \rightarrow 0$ ? In caso affermativo, determinare una tale funzione  $Kx^\alpha$ .

Risposta:

2. Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1 + \ln x}{2e^x}$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Insieme di definizione di $f$ : $(0, +\infty)$
Limiti agli estremi: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
Eventuali asintoti: $x = 0$ (asintoto verticale); $y = 0$ (asintoto orizzontale).
Derivata prima: $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \left(-\frac{1}{x} + 1 + \ln x\right)$
Qual è il più grande intervallo sul quale $f$ è crescente? $[1, +\infty)$ Qual è il più grande intervallo sul quale $f$ è decrescente? $(0, 1]$
Eventuali punti di massimo locale: Eventuali punti di minimo locale: L'unico punto di minimo locale è $x_0 = 1$ , non ci sono punti di massimo locali.
Derivata seconda: $f''(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \left(-1 - \ln x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$
Studio della convessità e della concavità : $f$ è convessa su $(0, x_1)$ , $f$ è concava su $(x_1, +\infty)$ , ove $x_1 > 1$ (si deduce da un confronto grafico)
Esistono punti in cui la funzione $ f(x) $ non è derivabile? La funzione $ f(x) $ non è derivabile in $x_2 = \frac{1}{e}$ .

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |\tan x|^a \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali eventuali  $a \in \mathbb{R}$  la funzione  $f$  è continua in  $x_0 = 0$ .

Risposta:

$f$  è continua in  $x_0 = 0$  se  $a > 0$

(b) Usando la definizione di derivata, determinare gli eventuali  $a \in \mathbb{R}$  per i quali la funzione  $f$  è derivabile in  $x_0 = 0$ .

Risposta:

$f$  è derivabile in  $x_0 = 0$  se  $a > 1$

4. Si consideri l'equazione

$$(z + 1)^4 = (1 + i)^4$$

nel campo complesso  $\mathbb{C}$ .

(a) Scrivere tutte le soluzioni, nella forma algebrica  $a + ib$ :

$i,$	$-i,$	$-2 + i,$	$-2 - i$
------	-------	-----------	----------